Epäoleellinen integraali

- Määrätyn integraalin raja/rajat ovat ∞ tai $-\infty$ tai luku jossa funktio ei ole määritelty

Esim. $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^{t} f(x)\,dx$, jos raja-arvo on olemassa

sanotaan että integraali <u>suppenee</u>, muulloin <u>hajaantuu</u>

Esim $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a+} \int_t^{b} f(x)\,dx$

kun $x=a$ ei ole määritelty

10.4 Funktion $f(x)$, missä $0 < x \leq 1$, kuvaaja ja koordinaattiakselit rajaavat alueen. Laske alueen pinta-ala.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, f(x) ei ole määritelty, kun $x = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Tulkitaan $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ epäoleellisena integraalina

$$= \lim_{t \to 0+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t \to 0+} 2 - 2\sqrt{t} = 2 - 2\sqrt{0} = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_t^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \Big/_t^1 \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}+1} = \Big/_t^1 2x^{\frac{1}{2}} = \Big/_t^1 2\sqrt{x} = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{t}$$

10.6 Laske epäoleellinen integraali.

a) $\int_1^\infty \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$ **b)** $\int_0^\infty \frac{1}{(2x+3)^2}\,dx$

b) Mj. $2x+3 \neq 0$

$2x \neq -3$

$x \neq -\frac{3}{2}$ (ei kuulu integroimisväliin)

Tulkitaan epäoleellisena integraalina

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{(2x+3)^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2t+3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{\infty}} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^t \underbrace{(2x+3)^{-2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^t 2(2x+3)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\Big/_0^t -1\cdot(2x+3)^{-1} = -\frac{1}{2}\Big/_0^t \frac{1}{2x+3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2t+3} - \frac{1}{2\cdot 0+3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2t+3} - \frac{1}{3}\right)$$

yhdistetty funktio (sisäfunktio $2x+3$) sisäfunktion derivaatta 2 pitää lisätä ja kompensoida $\frac{1}{2}$:lla

ulkofunktio x^{-2}

$\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-2+1}$

yhdistetyn funktion integrointi

$$\boxed{\int f'(x)g(f(x))\,dx = G(f(x)) + C}$$