8.17 Olkoon $f(x) = x(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-1})$. Määritä

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Laavennetaan $(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-1})$:llä $\quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad$ | Mlg. $x^2-1 \geq 0$

$x \leq -1 \lor x \geq 1$

a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-1}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x((\sqrt{x^2+3})^2 - (\sqrt{x^2-1})^2)}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x((x^2+3) - (x^2-1))}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}+1)}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2-1}} =$$

$\sqrt{x^2} = |x|$!

$$\underbrace{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})} + \sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}$$ *

$$\underbrace{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

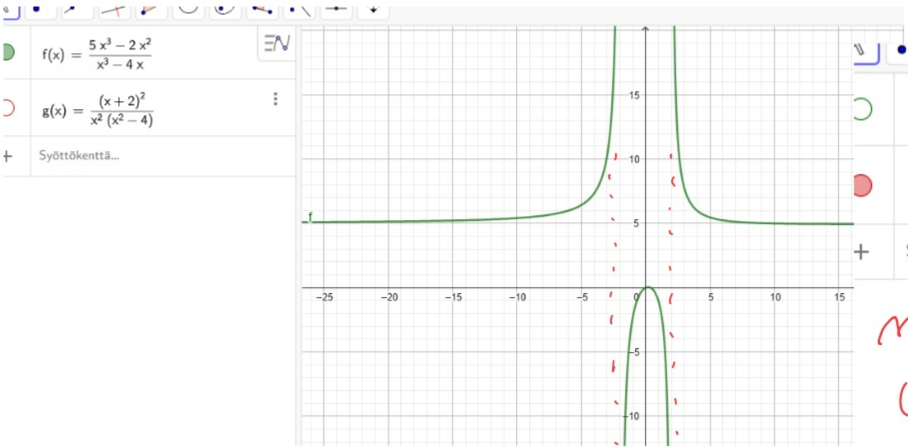
$$|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

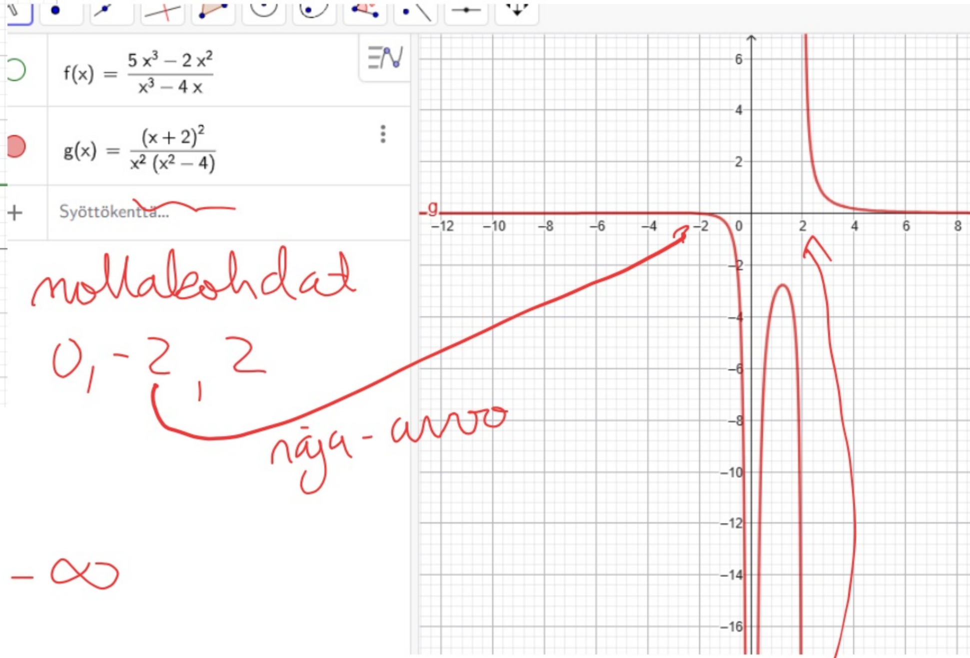
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$|x| \to -x$, $x<0$

$-1 \quad \to 0 \quad \to 0$

$$= \frac{4}{-(\sqrt{1}+\sqrt{1})} = \frac{4}{-2} = \underline{\underline{-2}}$$





nollakohdat

0, −2, 2

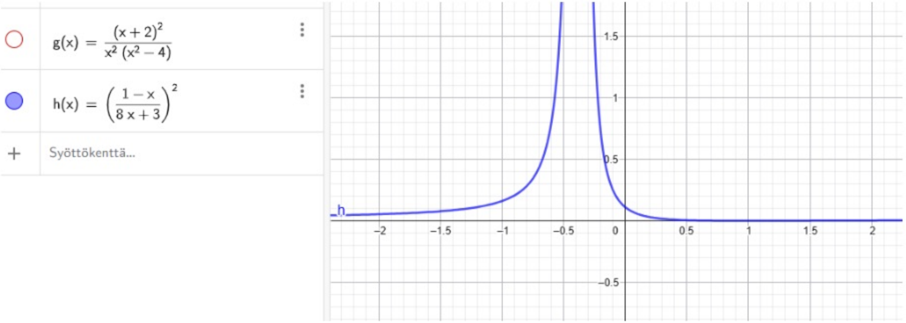
raja-arvo

epäoleellinen raja-arvo −∞

ei raja-arvoa

9.4 Tutki, onko funktiolla $f(x)=\dfrac{1-x}{(x+3)^2}$ raja-arvo tai epäoleellinen raja-arvo kohdassa

a) 1 **b)** −3.



Mj. $x+3 \neq 0$

$x \neq -3$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{(x+3)^2} = \dfrac{1-1}{(1+3)^2} = \dfrac{0}{16} = 0$

b) Koska $x=-3$ on kohta jossa $f(x)$ ei ole määritelty, niin pitää tutkia toispuolisia raja-arvoja

$$\lim_{x\to -3-} \frac{\overbrace{1-x}^{\to 4+}}{\underbrace{(\underbrace{x+3}_{\to 0-})^2}_{\to 0+}} = \infty \qquad \lim_{x\to -3+} \frac{\overbrace{1-x}^{\to 4-}}{\underbrace{(\underbrace{x+3}_{\to 0+})^2}_{\to 0+}} = \infty$$

$f(x)$:llä epäoleellinen raja-arvo ∞ kohdassa $x=-3$

9.6 Määritä derivaattaa käyttäen funktion $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+4}$ arvojoukko.

Mj $\mathbb{R}$ | $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

$$f'(x) = \frac{8(x^2+4) - 8x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-8x^2+32}{\underbrace{(x^2+4)^2}_{>0}}$$

$f'(x)=0$, kun $-8x^2+32=0$

$$x^2 = 4 \;\|\sqrt{\ }$$

$$x = \pm 2$$

Kulkukaavio:

		-2		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	min. kohta	$\nearrow$ maks. kohta		$\searrow$

Lasketaan ensin paikalliset maks. ja min. arvot

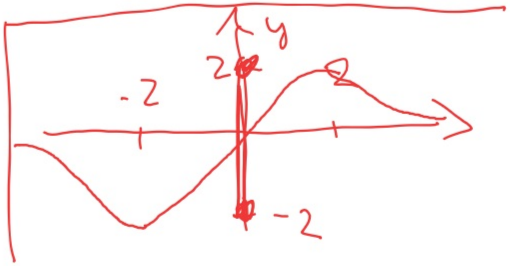
$$f(-2) = \frac{8\cdot(-2)}{(-2)^2+4} = -2$$

$$f(2) = \frac{8\cdot 2}{2^2+4} = 2$$

Tutkitaan raja-arvot

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{x^2+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8\cancel{x}}{\cancel{x}(x+\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0})} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8\cancel{x}}{\cancel{x}(x+\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0})} = 0$$



Vast. Aj $[-2, 2]$