Käänteisfunktion derivaatta

7. $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, jossa $\underline{y_0 = f(x_0)}$

Esim. $f(x) = 2x - 3$

$-1 = f(x_0) = 2x_0 - 3 \quad \| +3$

$2 = 2x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Määritä $(f^{-1})'(\underbrace{-1}_{y_0}) = \dfrac{1}{\underbrace{f'(x_0)}} = \dfrac{1}{2}$

Muod. $f'(x) = 2$

$\Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 2$

7.4 **a)** Osoita, että funktiolla $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x+7$ on käänteisfunktio.

b) Määritä käänteisfunktion f^{-1} derivaatta kohdassa 7.

c) Missä kohdissa käänteisfunktio ei ole derivoituva?

a) $f(x)$ on polynomifunktiona jatkuva, kun $x \in \mathbb{R}$

Tutkitaan monotonisuutta derivaatan avulla

$f'(x) = x^2+6x+9 = (x+3)^2 \geq 0$, nollakohta $x=-3$ (terassikohta) $\Rightarrow f(x)$ on aidosti monotoninen, eli sillä on käänteisfunktio $f^{-1}(x)$

b) $(f^{-1}(x))'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, kun $\underbrace{y_0 = f(x_0)}$

$\cancel{7} = \frac{1}{3}x_0^3+3x_0^2+9x_0+\cancel{7}$

$x_0(\frac{1}{3}x_0^2+3x_0+9) = 0$

$x_0 = 0 \lor \frac{1}{3}x_0^2+3x_0+9=0$

$D = b^2-4ac = 3^2-4\cdot\frac{1}{3}\cdot 9 = -3 < 0$

$\Rightarrow$ ei ratk.

$f'(x_0) = f'(0) = 0^2+6\cdot 0+9 = 9$

$(f^{-1}(x))'(7) = \dfrac{1}{f'(0)} = \underline{\underline{\dfrac{1}{9}}}$

c) Käänteisfunktio ei ole derivoituva, kun $f'(x_0)=0$

$x_0^2+6x_0+9=0$, kun $x_0=-3$

$y_0 = \frac{1}{3}\cdot(-3)^3+3\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)+7$

$= -9+27-27+7 = -2$

V: <u>Ei ole derivoituva kohdassa -2</u>