Tiheysfunktio

- Kuvaa jatkuvan satunnaismuuttujan jakauman

Tiheysfunktio $f(x)$:n ominaisuudet

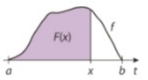
1. $f(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

MATEMATIIKKA (2)

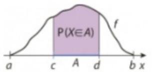
Normaalijakauma

Jatkuva todennäköisyysjakauma

f pätee:

(1) $\forall x \in E$: $f(x) \geq 0$	
(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$ (jos $E = \mathbb{R}$, niin ehto on $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$)	

Muuttujaan liittyvä *kertymäfunktio* on $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

todennäköisyys	$\mathrm{P}(X \in A) = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x = F(d) - F(c)$	
odotusarvo	$\mathrm{E}(X) = \mu = \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x$	
keskihajonta	$\mathrm{D}(X) = \sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x} = \sqrt{\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x - \mu^2}$	
varianssi	σ^2	

12.4 Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{kun } x\le 0\\ \dfrac{a}{\sqrt[4]{x}}, & \text{kun } 0<x\le 1\\ 0, & \text{kun } x>1.\end{cases}$$

Määritä

a) vakion a arvo

b) satunnaismuuttujan X odotusarvo

c) satunnaismuuttujan X keskihajonta.

a) 1° $f(x)$ pitää olla ≥ 0, kun $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{\underbrace{\sqrt[4]{x}}_{>0}} \ge 0$, kun $0 < x \le 1$

a:n pitää niin olla ≥ 0

2° $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{=0} + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{1}^{\infty} 0\,dx}_{=0} = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0+} \int_{t}^{1} \frac{a}{\sqrt[4]{x}}\,dx = 1$ | $\int \frac{a}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx = a\int x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4}{3}a\underbrace{x^{\frac{3}{4}}}_{\sqrt[4]{x^3}} (+c)$

$\lim_{t\to 0+} \frac{4}{3}a\cdot \underbrace{\sqrt[4]{1^3}}_{=1} - \frac{4}{3}a\underbrace{\sqrt[4]{t^3}}_{\to 0} = 1$

$\frac{4}{3}a = 1$

$a = \frac{3}{4}$

solve($\int_0^1 \frac{a}{4\sqrt{x}}dx=1$, a

$\{a=\frac{3}{4}\}$

b) $\overset{\mu}{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{3}{4\cdot\sqrt[4]{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{3x}{4\sqrt[4]{x}}\,dx$

$\int_{-\infty}^{0} \ldots\,dx = 0$, $\int_{1}^{\infty} \ldots\,dx = 0$

$\int_0^1 \frac{3x}{4*4\sqrt{x}}dx$

$\frac{3}{7}$

keskihajonta	$D(X)=\sigma=\sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 f(x)dx}=\sqrt{\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2}$

$\sqrt{\int_0^1 x^2*\frac{3}{4*4\sqrt{x}}dx-(\frac{3}{7})^2}$

$\frac{4\cdot\sqrt{33}}{77}$