7.20 ★★★

Jos kokonaisluku $n \geq 2$ on toisen kokonaisluvun m neliö, eli $n = m^2$, niin luvun n alkutekijähajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on parillinen. Jos nimittäin luvulla m on alkutekijähajotelma

$$m = t_1^{e_1} \cdot t_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot t_k^{e_k},$$

niin luvun n alkutekijähajotelmaksi saadaan

$$\begin{aligned} n &= m^2 \\ &= (t_1^{e_1} \cdot t_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot t_k^{e_k})^2 \\ &= t_1^{2e_1} \cdot t_2^{2e_2} \cdot \ldots \cdot t_k^{2e_k} \end{aligned}$$

Tässä hajotelmassa kaikki eksponentit ovat muotoa $2e_j$ ja siten parillisia. Todista tätä ideaa soveltamalla seuraava väite:

Jos kokonaisluvun $n \geq 2$ alkutekijähajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on parillinen, luku n on jonkin kokonaisluvun neliö.

7.21 ★★★

Määritä pienin sellainen kokonaisluku n, joka on jonkin kokonaisluvun neliö ja joka on jaollinen luvulla 120. Käytä apuna tehtävän 7.20 tulosta.

Jaetaan 120 alkulukuihin

$= 12 \cdot 10 = 3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Muodostetaan luku: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2$

$= 3600 = 60^2$

$\frac{3600}{120} = 30$