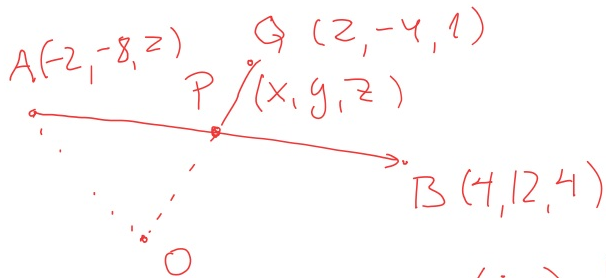


7.14 Olkoon pisteen  $P$  paikkavektori  
 $\overline{OP} = (2\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}) + t(-\bar{i} + 10\bar{j} + 3\bar{k})$ .

Laske, millä parametrin  $t$  arvolla piste  $P$  on  
pisteiden  $A = (-2, -8, 2)$  ja  $B = (4, 12, 4)$   
kautta kulkevalla suoralla.



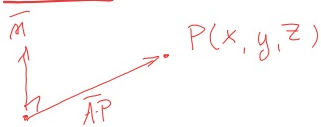
$$\overline{OP} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k} + t(-\bar{i} + 10\bar{j} + 3\bar{k})$$

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA} + s\overline{AB} \\ &= -2\bar{i} - 8\bar{j} + 2\bar{k} + s(6\bar{i} + 20\bar{j} + 2\bar{k})\end{aligned}$$

$$\begin{cases} (i:t) & 2 - t = -2 + 6s \\ (j:t) & -4 + 10t = -8 + 20s, \quad t, s \in \mathbb{R} \\ (k:t) & 1 + 3t = 2 + 2s \end{cases}$$

$$t = \frac{7}{10} \quad \text{ja} \quad s = \frac{11}{20}$$

## Tasoa



$$A = (1, 2, 3)$$

Tason normaali vektori

$$\vec{m} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{AP} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z-3)\vec{k}$$

Piste P on tasossa jos

$$\vec{AP} \perp \vec{m}, \text{ eli}$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{m} = 0$$

$$-2 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-2) - 1 \cdot (z-3) = 0$$

Tason koordinaattimurto

Kerästäen lauseke auki  $\Rightarrow$

$$-2x + 2 + 4y - 8 - z + 3 = 0$$

$$-2x + 4y - z - 3 = 0$$

Tason normaali murto

$$A = (x_0, y_0, z_0)$$

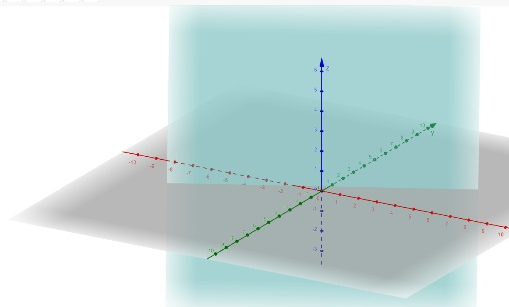
$$\vec{m} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

1 -2x+4y-z-3=0  
+ Syntetiso...



8.7 Taso kulkee origon kautta ja sen suuntavektorit ovat  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  ja  $\vec{v} = -5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ .

a) Määritä laskemalla tason yhtälön normaalimuoto.

b) Osoita, että piste  $P = (4, 6, -2)$  on tasossa.

Tason normaali vektori  $\vec{n}$  saadaan ristituloilla

$$\begin{array}{|l} [2 \ 3 \ -1] \Rightarrow \vec{u} \\ [-5 \ 1 \ 2] \Rightarrow \vec{v} \\ \text{crossP}(\vec{u}, \vec{v}) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|l} [2 \ 3 \ -1] \\ [-5 \ 1 \ 2] \\ [7 \ 1 \ 17] \end{array}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = 7\vec{i} + \vec{j} + 17\vec{k}$$

Taso kulkee origon  $(0, 0, 0)$  kautta  $\Rightarrow$

a)  $7x + y + 17z = 0$

b) Sijoitetaan koordinaatit:  $7 \cdot 4 + 6 + 17 \cdot (-2) = 0 \quad \square$

- 8.16 a)** Muodosta sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen  $(2, 4, 6)$  kautta ja leikkaa  $xy$ -tason pitkin suoraa  $x + 2y = 3$ .
- b)** Missä pisteissä a-kohdan taso leikkaa koordinaattiakselit?  
[yo pitkä k2016]

Oikean tason yhtälö  $ax + by + cz + d = 0$

$xy$ -tasossa  $z = 0$

Suora:  $x + 2y = 3 \Rightarrow d = -3$

$$x + 2y - cz - 3 = 0$$

Piste  $(2, 4, 6)$  on tasossa  $\Rightarrow 2 + 2 \cdot 4 - c \cdot 6 - 3 = 0$

$$c = \frac{7}{6}$$

Täten tason yhtälö on:

$$x + 2y + \frac{7}{6}z - 3 = 0$$

$$0 + 0 + \frac{7}{6}z - 3 = 0$$

$$z = \frac{18}{7}$$

n)  $z$ -akselilla  $x = 0$  ja  $y = 0$

$x$  - || -  $z = 0$  ja  $y = 0$

## 9.6

Laske tasojen  $x - 2y + 4z + 3 = 0$  ja

$7x - 2y - 4z - 35 = 0$  välisen kulman suuruus

asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Tasojen välisen kulma saadaan  
normaalivektorien välisenä kulmana

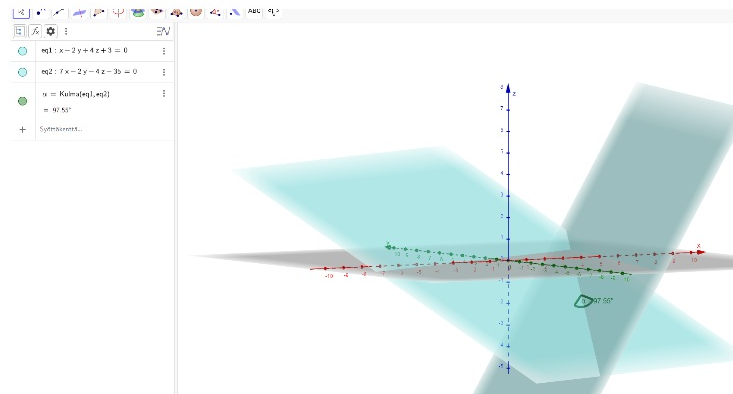
$$\vec{m}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \quad \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-4) = -5$$

$$\vec{m}_2 = 7\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k} \quad |\vec{m}_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$|\vec{m}_2| = \sqrt{7^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{69}$$

$$\cos(\vec{m}_1, \vec{m}_2) = \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{|\vec{m}_1| |\vec{m}_2|}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{69}}\right) = 97,5^\circ \Rightarrow \text{kulma on } 180^\circ - 97,5^\circ = \underline{\underline{82,5^\circ}}$$



9.4



Määritä pisteiden  $A = (1, 2, 1)$  ja

$B = (-1, 6, -2)$  kautta kulkevan suoran ja tason

$x + 2y - z + 5 = 0$  välisen kulman suuruus

asteen tarkkuudella

a) geometriaohjelmalla

b) laskemalla.

b) Valitaan suoran suuntavektori  $\vec{s} = \vec{AB}$

$$\vec{s} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

Tason normaali-vektorin  $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$$\cos(\vec{s}, \vec{n}) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| |\vec{n}|}$$

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 9$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{6}}\right) = 47,0^\circ$$

$$\Rightarrow \text{kytty kulma } \alpha = 90^\circ - 47,0^\circ = \underline{\underline{43,0^\circ}}$$

$\beta =$

```

cos⁻¹(9 / (√29 * √6))
[-2 4 -3] → s
[1 2 -1] → n
angle(s, n)
  
```

TAI

46.97728606

[-2 4 -3]

[1 2 -1]

46.97728606