14.18 Jos funktiossa $f(x, y)$ annetaan toiselle muuttujista vakioarvo, saadaan aikaan yhden muuttujan funktio. Jos esimerkiksi $f(x, y) = -3x^2 + xy$, niin $f(x, 4) = -3x^2 + 4x$.

Olkoon $f(x, y) = \sin x^2 - x^2 y^2$. Määritä funktion g suurin arvo, kun

a) $g(y) = f(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y)$ **b)** $g(x) = f(x, 1)$.

a) $g(y) = \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 y^2 = \overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{=1} - \frac{\pi}{2} y^2 = 1 - \frac{\pi}{2} y^2$

Tutkitaan derivaatan avulla: $g'(y) = -\frac{\pi}{2} \cdot 2y = -\pi y$

$g'(y) = 0$, kun $-\pi y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

		0	
$g'(y)$	+		−
$g(y)$	↗		↘

maks kohta

Maksimiarvo $g(0) = 1 - \frac{\pi}{2} \cdot 0^2 = \underline{\underline{1}}$

b) $g(x) = \sin x^2 - x^2 \cdot 1^2$
$= \sin x^2 - x^2$

$g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x - 2x = 2x(\cos(x^2) - 1)$

$g'(x) = 0$, kun $2x = 0 \vee \cos x^2 - 1 = 0$

$x = 0$

$\cos x^2 = 1$

$x^2 = n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$x = \pm\sqrt{n 2\pi}$

	$-\sqrt{2\pi}$		0		$\sqrt{2\pi}$	
$g'(x)$		−		−		

Osittaisderivaatta

Merkintä $\partial_x f(x,y)$, $f_x(x,y)$, $\partial_y f(x,y)$, $f_y(x,y)$

$\frac{d}{dx} f(x,y)$ $\frac{d}{dy} f(x,y)$

Esim. $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$

$\partial_x f(x,y) = 0 - 2x - 0 = -2x$

$\partial_y f(x,y) = 0 - 0 - 2y = -2y$

Esim. $g(x,y) = x^3y^2 - 2xy^3 - 4$

$\partial_x g(x,y) = 3x^2y^2 - 2y^3$

$\partial_y g(x,y) = 2x^3y - 6xy^2$

Osittaisderivaatan arvo tietyssä pisteessä kertoo muutosnopeuden

$\partial_x f(x_0,y_0)$ positiivisen x-akselin suuntaan

$\partial_y f(x_0,y_0)$ — " — y- — " —

Kriittisessä pisteessä:

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases}$$

Kriittinen piste voi olla maksimipiste

minimipiste

satulapiste

15.6 Määritä funktion $f(x,y) = x^3 + y^2 + 2xy + 1$ kriittisistä pisteistä se, joka on lähimpänä pistettä (2, 1). Määritä tämän lyhimmän etäisyyden tarkka arvo.

Muodostetaan ensin osittaisderivaatat

$\partial_x f(x,y) = 3x^2 + 2y$

$\partial_y f(x,y) = 2y + 2x$

Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2y + 2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y = -3x^2 \\ 2y = -2x \end{cases} \Rightarrow -3x^2 = -2x$$

$-3x^2 + 2x = 0$

$x(-3x+2) = 0$

$x = 0 \vee -3x + 2 = 0$

$-3x = -2$

$x = \frac{2}{3}$

kun $x = 0 \Rightarrow 2y + 2 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

kun $x = \frac{2}{3} \Rightarrow 2y + 2 \cdot \frac{2}{3} = 0$

$2y = -\frac{4}{3}$

$y = -\frac{2}{3}$

Kriittiset pisteet $(0,0)$ ja $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$