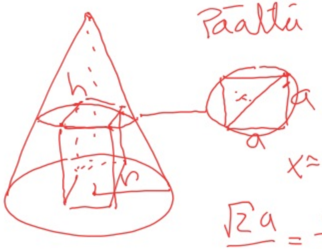
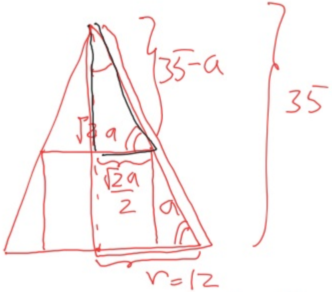
12.14 Suoran ympyräkartion korkeus on 35,0 cm ja pohjaympyrän säde 12,0 cm. Kartion sisällä on kuutio, joka yksi tahko on kartion pohjalla ja neljä kärkipistettä kartion vaipalla. Laske kuution särmän pituus.

Päältä





$$x = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$$

$$\frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

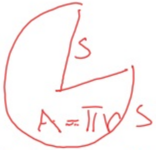
Pieni kolmio on yhdenmuotoinen ison kolmion kanssa (kk)

Tehdään verranto $\frac{35-a}{35} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{12} \Leftrightarrow 12(35-a) = \frac{35a}{\sqrt{2}}$

$\underline{\underline{a \approx 11{,}4 \text{ cm}}}$

13.6 Suoran ympyräkartion muotoista telttaa varten on varattu 16 neliömetriä kangasta. Kangasta ei käytetä teltan pohjaan. Määritä pohjaympyrän halkaisija silloin, kun teltan tilavuus on suurin mahdollinen. [yo pitkä k2015]

$\Rightarrow$ Tutkitaan V:n suurinta arvoa



$16 = \pi r s \Leftrightarrow s = \frac{16}{\pi r}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$s^2 = r^2 + h^2 \Leftrightarrow s = \sqrt{r^2+h^2}$

$\Leftrightarrow h = \sqrt{s^2 - r^2}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{\left(\frac{16}{\pi r}\right)^2 - r^2}$

$r \le s,\ r > 0$

$\begin{cases} h \le s \\ \frac{16}{\pi r} \le \sqrt{r^2+h^2} \end{cases}$

Derivoidaan

V'

Derivaatan nollakohdat

Merkkikaavio

	0		1,71	
V'		+		−
V		↗		↘

maks. kohta

Vast: Tilavuus on suurin kun $r = 1{,}71$ m $\Rightarrow$ halkaisija $\underline{3{,}4 \text{ m}}$

Define $V(r) = \frac{1}{3} * \pi * r^2 * \sqrt{\left(\frac{16}{\pi r}\right)^2 - r^2}$

done

$\frac{d}{dr}(V(r))$

$$\frac{r^2 \cdot \left(\frac{2\cdot(r^4\cdot\pi^2-256)}{r^3\cdot\pi^2} - 4\cdot r\right)\cdot\pi}{6\cdot\sqrt{\frac{-(r^4\cdot\pi^2-256)}{r^2\cdot\pi^2}}} + \frac{2\cdot r\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{-(r^4\cdot\pi^2-256)}{r^2\cdot\pi^2}}}{3}$$

$$\text{simplify}\left(\frac{r^2 \cdot \left(\frac{2\cdot(r^4\cdot\pi^2-256)}{r^3\cdot\pi^2} - 4\cdot r\right)\cdot\pi}{6\cdot\sqrt{\frac{-(r^4\cdot\pi^2-256)}{r^2\cdot\pi^2}}} + \frac{2\cdot r\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{-(r^4\cdot\pi^2-256)}{r^2\cdot\pi^2}}}{3}\right)$$

$$\frac{-|r|\cdot(3\cdot r^4\cdot\pi^2-256)}{3\cdot r\cdot\sqrt{-r^4\cdot\pi^2+256}}$$

$$\text{solve}\left(\frac{-|r|\cdot(3\cdot r^4\cdot\pi^2-256)}{3\cdot r\cdot\sqrt{-r^4\cdot\pi^2+256}} = 0, r\right)$$

$\{\cancel{r=-1.714765516}, r=1.714765516\}$

$$\frac{-|r|\cdot(3\cdot r^4\cdot\pi^2-256)}{3\cdot r\cdot\sqrt{-r^4\cdot\pi^2+256}} \Big| r=1.6$$

$1.493074002 > 0$

$$\frac{-|r|\cdot(3\cdot r^4\cdot\pi^2-256)}{3\cdot r\cdot\sqrt{-r^4\cdot\pi^2+256}} \Big| r=1.8$$

$-1.480291341 < 0$

9.	Olkoon teltan pohjan säde r ja sivujana s, jolloin korkeus $h=\sqrt{s^2-r^2}$. Teltan vaipan ala $A=\pi rs=16$, josta $s=\frac{16}{\pi r}$.	1
	Teltan tilavuus $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{s^2-r^2}$.	1
	Sijoitetaan tähän $s=\frac{16}{\pi r}$, jolloin saadaan $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\sqrt{\frac{256}{\pi^2 r^2}-r^2}=\frac{1}{3}\sqrt{256r^2-\pi^2 r^6}$.	1
	$V(r)$ on suurin, kun juurrettava $f(r)=256r^2-\pi^2 r^6$, $r>0$, on suurin. Derivoidaan: $f'(r)=512r-6\pi^2 r^5=2r\left(256-3\pi^2 r^4\right)$.	1
	Nollakohdat: $f'(r)=0 \Leftrightarrow r=0 \vee r^4=\frac{256}{3\pi^2} \Leftrightarrow r=0 \vee r=\pm\frac{4}{\sqrt[4]{3\pi^2}}$.	1
	Näistä vain $r=+\frac{4}{\sqrt[4]{3\pi^2}}$ on kelvollinen, ja sen likiarvo on 1,715. Se on myös tilavuuden $V(r)$ maksimikohta, joten kysytty lattian halkaisija $2r\approx 3,43$ (m).	1