

10.17 Kolmiulotteinen koordinaatisto on valittu niin, että maanpinta on  $xy$ -tasossa ja pituusyksikkönä on metri. Maan alla oleva vesijohto kulkee pisteestä  $(0, 0, -2)$  vektorin  $3\vec{i} + 4\vec{j}$  suuntaan yhteensä 3 metriä. Sen jälkeen vesijohto täytyy liittää yhdysputken avulla runkoputkeen, joka kulkee pisteen  $(4, 4, -3)$  kautta vektorin  $-2\vec{i} + 3\vec{j}$  suuntaan. Kuinka pitkä yhdysputken on vähintään oltava, jotta se riittää yhdistämään tämän vesijohdon runkoputkeen? [yo pitkä s2020]

• 0  
 $A(0, 0, -2)$

Vektori  $|\vec{AP}| = 3$ , suuntavektorin  $\vec{S}$   
 yksikkövektori  $\vec{S}_0 = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{5}$

$\vec{OP} = \vec{OA} + 3\vec{S}_0$   
 $= -2\vec{k} + \frac{9}{5}\vec{i} + \frac{12}{5}\vec{j} \Rightarrow$  Piste P koordinaatit  
 $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, -2)$ ,  $\vec{PQ} = (x - \frac{9}{5})\vec{i} + (y - \frac{12}{5})\vec{j} + (z + 2)\vec{k}$

Runkojohdon suora parametrisuudessa  
 $\vec{PQ} \perp \vec{RQ}$ , eli  
 $\vec{PQ} \cdot \vec{RQ} = 0$

$\vec{RQ} = (x - 4)\vec{i} + (y - 4)\vec{j} + (z + 3)\vec{k}$

$\vec{PQ} = (x - \frac{9}{5})\vec{i} + (y - \frac{12}{5})\vec{j} + (z + 2)\vec{k}$

$\vec{RQ} \cdot \vec{PQ} = 0$

$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z+3 \\ x-\frac{9}{5} & y-\frac{12}{5} & z+2 \end{vmatrix} = 0$

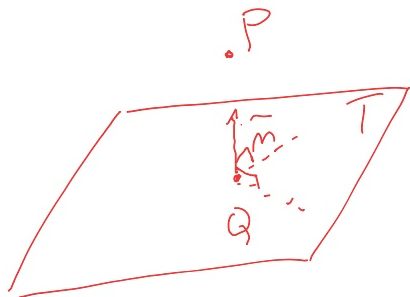
$\{x=4, y=4, z=-3, r=0\}, \{x=\frac{48}{13}, y=\frac{58}{13}, z=-3, r=\frac{2}{13}\}$

$|\vec{PQ}| = \sqrt{(\frac{48}{13} - \frac{9}{5})^2 + (\frac{58}{13} - \frac{12}{5})^2 + (-3 + 2)^2}$

$\sqrt{(\frac{48}{13} - \frac{9}{5})^2 + (\frac{58}{13} - \frac{12}{5})^2 + (-3 + 2)^2}$

2. 971661022

## Pisteen etäisyys tasosta



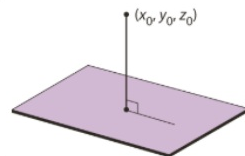
Pisteen  $P$  ja tason lähimmän pisteen  $Q$  välinen vektori  $\vec{PQ} \parallel \vec{m}$ . Pisteen  $P$  etäisyys tasosta on  $d = |\vec{PQ}|$

$\vec{m}$  = tason  $T$  normaalivektori

HUOM! MAOL

pisteen  $(x_0, y_0, z_0)$  etäisyys tasosta on

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



11.6 Taso sisältää pisteen  $(4, 3, -5)$  ja sen suuntavektorit ovat  $\vec{u} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  ja  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ . Määritä laskemalla se tason piste, joka on lähimpänä pistettä  $P = (3, -13, -2)$ .

Skalaarektoit:  $\vec{u}$  ja  $\vec{v}$

Tason normaalivektori  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow$  tason yhtälö normaalimuodossa

```

[-2 -1 1] → u
[1 2 -3] → v
crossP(u, v)
[1 -5 -3]

```

$$x - 5y - 3z + d = 0$$

Tason piste  $(4, 3, -5) \Rightarrow$  ratkaistaan  $d$

$$4 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot (-5) + d = 0$$

$$d = -4$$

Taso:  $x - 5y - 3z - 4 = 0$

Oikean tason lähin piste Q

Suoran  $(\vec{PQ})$  parametrisointi  $(\vec{PQ} \parallel \vec{n})$

$$\vec{PQ} = r\vec{n}$$

$$\begin{cases} x = 3 + r \\ y = -13 - 5r, r \in \mathbb{R} \\ z = -2 - 3r \end{cases}$$

$$x - 5y - 3z - 4 = 0$$

4: n tuntemattoman yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 4 \\ r = -2 \end{cases}$$

Vast: lähin piste  $(1, -3, 4)$