

2.

$$\overline{OA} = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k} \text{ ja } \overline{OB} = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}$$

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1) \bar{i} + (y_2 - y_1) \bar{j} + (z_2 - z_1) \bar{k}$$

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$$

$$= x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k} + \frac{x_2 - x_1}{2} \bar{i} + \frac{y_2 - y_1}{2} \bar{j} + \frac{z_2 - z_1}{2} \bar{k} \text{ lavennetaan samannimisiksi.}$$

$$= \frac{2x_1}{2} \bar{i} + \frac{2y_1}{2} \bar{j} + \frac{2z_1}{2} \bar{k} + \frac{x_2 - x_1}{2} \bar{i} + \frac{y_2 - y_1}{2} \bar{j} + \frac{z_2 - z_1}{2} \bar{k} \text{ lasketaan yhteen}$$

$$= \frac{2x_1 + x_2 - x_1}{2} \bar{i} + \frac{2y_1 + y_2 - y_1}{2} \bar{j} + \frac{2z_1 + z_2 - z_1}{2} \bar{k}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2} \bar{i} + \frac{y_1 + y_2}{2} \bar{j} + \frac{z_1 + z_2}{2} \bar{k}$$

Joten yhtälö on voimassa.

3.1

Muodostetaan vektorien lausekkeet.

$$\overline{AB} = (3 - (-2))\bar{i} + (-1 - 2)\bar{j} + (0 - 5)\bar{k} = 5\bar{i} - 3\bar{j} - 5\bar{k}$$

$$\overline{CD} = (-1 - 2)\bar{i} + (10 - 1)\bar{j} + (-2 - 4)\bar{k} = -3\bar{i} + 9\bar{j} - 6\bar{k}$$

Lasketaan vektorien pituudet.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{59}$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

3.2

Lasketaan vektorien pistetulo.

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 5 \cdot (-3) + (-3) \cdot 9 + (-5) \cdot (-6) = -15 - 27 + 30 = -12$$

Ratkaistaan vektorien välinen kulma α .

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{AB}| |\overline{CD}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{-12}{\sqrt{59} \cdot 3\sqrt{14}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-12}{\sqrt{59} \cdot 3\sqrt{14}}\right)$$

$$\alpha = 98,00027\dots^\circ \approx 98^\circ$$

$$\arccos(-12/(\sqrt{59} \cdot \sqrt{126})) \\ = 98,00027188857161778316$$

3.3

Lasketaan vektorien ristitulo

$$\begin{aligned}\overline{AB} \times \overline{CD} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -3 & -5 \\ -3 & 9 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} \bar{k} \\ &= (-3 \cdot (-6) - (-5) \cdot 9) \bar{i} - (5 \cdot (-6) - (-5) \cdot (-3)) \bar{j} + (5 \cdot 9 - (-3) \cdot (-3)) \bar{k} \\ &= 63 \bar{i} + 45 \bar{j} + 36 \bar{k}\end{aligned}$$

5.1

Vektorien \bar{a} ja \bar{b} määrämän suunnikkaan pinta-ala on

$$\begin{aligned}|\bar{a} \times \bar{b}| &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -1 & -7 \\ 2 & 10 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \bar{k} \\ &= |(-1 \cdot (-2) - 10 \cdot (-7)) \bar{i} - (4 \cdot (-2) - 2 \cdot (-7)) \bar{j} + (4 \cdot 10 - 2 \cdot (-1)) \bar{k}| \\ &= |72 \bar{i} - 6 \bar{j} + 42 \bar{k}| \\ &= \sqrt{72^2 + (-6)^2 + 42^2} \\ &= \sqrt{6984} = 6\sqrt{194}\end{aligned}$$

[4 -1 -7] → a	
[2 10 -2] → b	
norm(crossP(a, b))	[4 -1 -7]
□	[2 10 -2]
	6·√194
	■ CAS-laskimella

5.2

Vektorien \bar{a} , \bar{b} ja \bar{c} määrämän suuntaissärmiön tilavuus on

$$\begin{aligned}|(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}| &= |(72 \bar{i} - 6 \bar{j} + 42 \bar{k}) \cdot (-3 \bar{i} + 2 \bar{j} + 5 \bar{k})| \\ &= |72 \cdot (-3) + (-6) \cdot 2 + 42 \cdot 5| \\ &= |-18| \\ &= 18\end{aligned}$$

Tai

$$\text{särmiön tilavuus} \quad V = |\overline{abc}|,$$

$$\left| \det \begin{pmatrix} 4 & -1 & -7 \\ 2 & 10 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \right|$$

18

CAS-laskimella

6.

Muodostetaan kolme vektoria ja valitaan piste $(1, 2, 3)$ lähtöpisteeksi.

$$\bar{a} = -\bar{i} - 2\bar{j} + (t - 3)\bar{k}$$

$$\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\bar{c} = \bar{i} - 10\bar{k}$$

Kun vektoreiden määräämän suuntaissärmiön tilavuus on nolla, niin pisteet ovat samassa tasossa. Tällöin vektoreiden skalaarikolmitulo on nolla ja pisteet ovat samassa tasossa.

Ratkaistaan

$$V = |\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & t-3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{solve}(\det \begin{pmatrix} -1 & -2 & t-3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -10 \end{pmatrix}) = 0, t$$

$$\{t=-19\}$$

Vastaus: Pisteet ovat samassa tasossa, kun $t = -19$.

7.

Muodostetaan lasersädettä kuvaavan (puoli)suoran parametriesitys.

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 2,5t \\ z = 2300 - 3,5t \end{cases} \quad (t \geq 0)$$

Säteen ja xy -tason leikkauspisteessä $z = 0$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöryhmä CAS-laskimella.

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 2,5t \\ z = 2300 - 3,5t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$x = 657,1428... \quad \text{ja} \quad y = 1642,8571... \quad \text{ja} \quad z = 0 \quad \text{ja} \quad t = 657,1428...$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0+t \\ y=0+2.5t \\ z=2300-3.5t \\ z=0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x, y, z, t \end{array} \right. \\ \{x=657.1428571, y=1642.857143, z=0, t=657.1428571\}$$

Lasketaan leikkauspisteen $(657,1428...; 1642,8571...; 0)$ etäisyys origosta $(0, 0, 0)$.

$$\sqrt{(657,1428... - 0)^2 + (1642,8571... - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 1769,41129... \\ \approx 1770\text{m}$$

8.

Muodostetaan CAS-laskimen avulla tasolle normaalivektori

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}.$$

$$\vec{AB} = (3 - 5)\vec{i} + (3 - (-2))\vec{j} + (1 - (-3))\vec{k} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{AC} = (-2 - 5)\vec{i} + (5 - (-2))\vec{j} + (3 - (-3))\vec{k} = -7\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\left| \begin{array}{l} [-2 \ 5 \ 4] \Rightarrow \vec{AB} \\ [-7 \ 7 \ 6] \Rightarrow \vec{AC} \\ \text{crossP}(\vec{AB}, \vec{AC}) \end{array} \right. \begin{array}{l} \vec{AB} \\ \vec{AC} \\ [2 \ -16 \ 21] \end{array}$$

$$\vec{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = 2\vec{i} - 16\vec{j} + 21\vec{k}$$

Muodostetaan tason yhtälö, kun piste $A = (5, -2, -3)$ on tasossa.

$$2(x - 5) - 16(y - (-2))\vec{j} + 21(z - (-3)) = 0$$

$$2x - 10 - 16y - 32 + 21z + 63 = 0$$

$$2x - 16y + 21z + 21 = 0$$

Tutkitaan, toteuttaako piste $P = (-8, 20, 15)$ tason yhtälön.

$$2 \cdot (-8) - 16 \cdot 20 + 21 \cdot 15 + 21 = 0$$

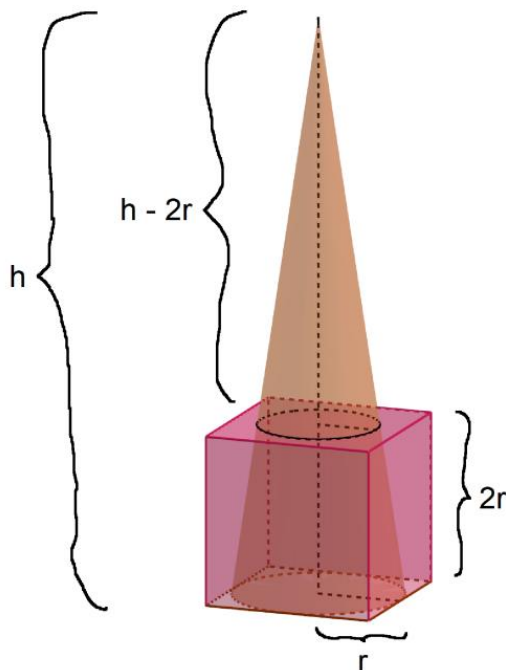
$$0 = 0$$

tosi

Piste P on tasossa.

9.

Piirretään mallikuva (poikkileikkauskuva riittää).



Jos kartion pohjaympyrän säde on r , niin kuution särmän pituus on $2r$.

Kuution ulkopuolelle jäävä osa kartiosta on yhdenmuotoinen koko kartion kanssa (niillä on yhteinen huippu ja kartioiden pohjien ja sivujanojen väliset kulmat ovat yhtä suuria, sillä pohjat ovat yhdensuuntaiset).

Ratkaistaan kuution ulkopuolelle jäävän kartion pohjaympyrän säde x , kun sen pinta-ala on puolet koko kartion pohjaympyrän pinta-alasta.

$$\pi x^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2$$

$$x = \frac{\sqrt{2}r}{2} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{\sqrt{2}r}{2}$$

Pienen kartion pohjan säde on $\frac{\sqrt{2}r}{2}$.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan koko ison kartion korkeus h .

$$\frac{\text{Pienen kartion korkeus}}{\text{Ison kartion korkeus}} = \frac{\text{Pienen kartion pohjan säde}}{\text{Ison kartion pohjan säde}}$$

$$\frac{h-2r}{h} = \frac{\frac{\sqrt{2}r}{2}}{r}$$

$$h = 2(\sqrt{2} + 2)r$$

Lasketaan kappaleiden tilavuuksien suhde.

$$\frac{V_{\text{kartio}}}{V_{\text{kuutio}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{(2r)^3} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2(\sqrt{2} + 2)r}{(2r)^3} = \frac{\pi(2 + \sqrt{2})}{12} (\approx 0,894)$$

10.1

Lasketaan osittaisderivaattafunktiot.

$$\partial_x f(x, y) = 6 \cdot 2x - 2 \cdot 3x^2 + 0 + 6y \cdot 1 = -6x^2 + 12x + 6y$$

$$\partial_y f(x, y) = 0 - 0 + 3 \cdot 2y + 6x \cdot 1 = 6x + 6y$$

Tai:

Define $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
done

$$\frac{d}{dx} (f(x, y)) \quad \left| \begin{array}{l} -6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 6 \cdot y \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{dy} (f(x, y)) \quad \left| \begin{array}{l} 6 \cdot x + 6 \cdot y \\ \hline \end{array} \right.$$

10.2

Ratkaistaan kriittiset pisteet yhtälöparista ja päätellään niiden tyytit kuvaajasta.

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = 0 \\ \partial_y f(x, y) = 0 \end{cases}$$

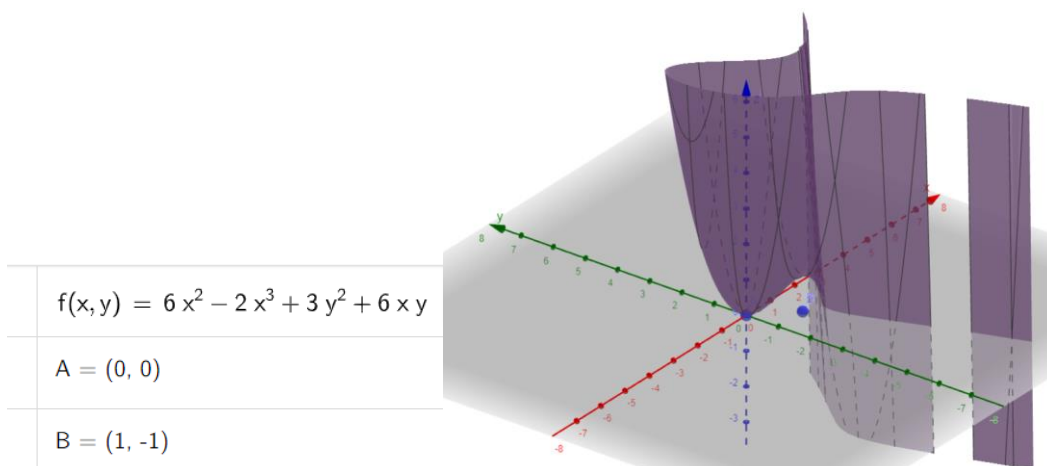
$$\begin{cases} -6x^2 + 12x + 6y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ja $y = 0$ tai $x = 1$ ja $y = -1$

Kriittiset pisteet ovat $(0, 0)$ ja $(1, -1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (f(x, y)) = 0 \\ \frac{d}{dy} (f(x, y)) = 0 \end{array} \right\}_{x, y}$$

$$\{ \{x=0, y=0\}, \{x=1, y=-1\} \}$$



Kuvaajan perusteella $(0, 0)$ on funktion minimikohta ja $(1, -1)$ on satulapiste.

Lasketaan osittaisderivaatan arvot pisteessä $(-2,4)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(-2, 4) = -6 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 = -24$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(-2, 4) = 6 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 = 12$$

Gradienttivektori on

$$\nabla f(-2, 4) = -24\bar{i} + 12\bar{j}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dx} (f(x, y)) \mid_{x=-2 \mid y=4} \\ \frac{d}{dy} (f(x, y)) \mid_{x=-2 \mid y=4} \end{array} \right| \begin{array}{l} -24 \\ 12 \end{array}$$