

8.16 a) Muodosta sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen $(2, 4, 6)$ kautta ja leikkaa xy -tason pitkin suoraa $x + 2y = 3$.

b) Missä pisteissä a-kohdan taso leikkaa koordinaattiakselit?

[yo pitkä k2016]

Tason normaalimuutis on

$$ax + by + cz + d = 0$$

muutis: $x + 2y = 3 \Rightarrow$ koska xy -tasossa $z = 0$

$a=1, b=2, d=-3 = 0$, taso kulkee pisteen $(2, 4, 6)$ kautta \Rightarrow

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + c \cdot 6 - 3 = 0$$

$$6c = -7$$

$$c = -\frac{7}{6}$$

a) x -akselin piste: $(x, 0, 0)$

$$x + 2 \cdot c \cdot \frac{-7}{6} \cdot 0 - 3 = 0$$

$$x = 3$$

a)

Taso on: $x + 2y - \frac{7}{6}z - 3 = 0$

$V: (3, 0, 0)$

y -akselin piste: $(0, y, 0) \dots$

9.2



Suora kulkee pisteiden $A = (-2, 0, 5)$ ja

$B = (10, -4, 11)$ kautta ja leikkaa tason

$x + 4y + 6z - 44 = 0$ pisteessä P . Määritä piste P

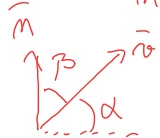
a) geometriaohjelmalla

b) laskemalla.

a) Suoran suuntavektori $\vec{v} = \vec{AB} = 12\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$

Tason $x + 4y + 6z - 44 = 0$ normaalinvektori

$$\vec{m} = \vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$



Normaalinvektorin ja suuntavektorin välinen kulma β

$$\cos(\vec{m}, \vec{v}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{v}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{v}|} = \cos \beta$$

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 12 + 4 \cdot (-4) + 6 \cdot 6 = 32$$

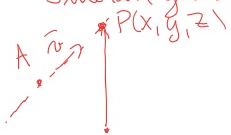
$$|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{53}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{12^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{196}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{32}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{196}}\right) = 71,7^\circ$$

\Rightarrow deikkauskulma $90^\circ - 71,7^\circ = \underline{\underline{18,3^\circ}}$

Suoran yhtälö: $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{v}$ koordinaattimuodossa | Taso: $x + 4y + 6z - 44 = 0$



$$\begin{cases} x = -2 + 12t \\ y = 0 - 4t \\ z = 5 + 6t \end{cases}$$

$$-2 + 12t + 4(-4t) + 6(5 + 6t) - 44 = 0$$

$$-2 + 12t - 16t + 30 + 36t - 44 = 0$$

$$32t = 16 \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 12 \cdot \frac{1}{2} = 4 \\ y = 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} = -2 \\ z = 5 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 8 \end{cases}$$

$$y = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2$$

$$z = 5 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

deikkauspiste $(4, -2, 8)$

9.16 a) Suora kulkee pisteen $(1, 2, 0)$ kautta ja sen suuntavektori on $\vec{s} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$. Osoita, että suora on tasossa $x - y + 2z + 1 = 0$.

b) Osoita, että suoralla $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} (t \in \mathbf{R})$

ja tasolla $4x + y + 2z = 0$ ei ole yhtään yhteistä pistettä.

a) Tutkitaan leikkaako suora tason suora koordinaattimuodossa.

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 0 - 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

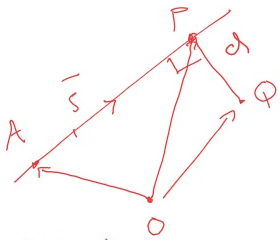
Sijoitetaan tason $x - y + 2z + 1 = 0$ yhtälöön

$$1 + 3t - (2 - t) + 2(-2t) + 1 = 0$$
$$1 + 3t - 2 + t - 4t + 1 = 0$$
$$0 = 0 \quad (\text{identtisesti-tosi})$$

\Rightarrow Suora on tasossa kaikella

$t \in \mathbf{R}$ arvoilla, eli kulkee tasossa \square

Pisteen etäisyys suoralta



$$\begin{cases} \vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{s} \\ \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} \\ \vec{s} \cdot \vec{QP} = 0 \end{cases}$$

$$A = (1, 2, 3)$$

$$\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$Q = (4, 0, 1)$$

$$P = (x, y, z)$$

$$\vec{OA} + t\vec{s} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

$$\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + t(z\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = 4\vec{i} + \vec{k} + (x-4)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-1)\vec{k}$$

$$\vec{s} \cdot \vec{QP} = 2 \cdot (x-4) + (-1) \cdot (y-0) + 3 \cdot (z-1) = 0$$

$$(\vec{i} \cdot t) \cdot \begin{cases} 1 + 2t = x \\ 2 - t = y \\ 3 + 3t = z \end{cases}$$

$$(\vec{j} \cdot t) \cdot \begin{cases} 1 + 2t = x \\ 2 - t = y \\ 3 + 3t = z \end{cases}$$

$$(\vec{k} \cdot t) \cdot \begin{cases} 1 + 2t = x \\ 2 - t = y \\ 3 + 3t = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-4=1+2t \\ y=2-t \\ z-1=3+3t \\ (x-4)+2y+3z-1=0 \end{cases} \Big|_{x, y, z, t}$$

$$d = |\vec{QP}| = \sqrt{\left(\frac{17}{9} - 4\right)^2 + \left(\frac{32}{9} - 0\right)^2 + \left(-\frac{14}{9} - 1\right)^2}$$

$$\left\{ x = \frac{17}{9}, y = \frac{32}{9}, z = -\frac{2}{3}, t = -\frac{14}{9} \right\}$$