5.17 Määritä vakio a siten, että

$$\int_a^{a+1} (2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$ [yo pitkä k2004]

$$\Big/_{a}^{a+1} (x^2+3x) = (a+1)^2 + 3(a+1) - (a^2+3a)$$

$$= \cancel{a^2}+2a+1+\cancel{3a}+3-\cancel{a^2}-\cancel{3a}$$

$$=2a+4$$

Ratkaistaan: $2a+4 = \frac{1}{2}$

$$2a = -\frac{7}{2} \quad \|:2$$

$$\underline{\underline{a = -\frac{7}{4}}}$$

5.19 Olkoon $f(x)=|x-1|$

a) Määritä funktion f nollakohdat.

b) Ilmaise funktion f lauseke paloittain määriteltynä ilman itseisarvoja.

c) Laske $\int_0^2 |x-1|\,dx$.

$$= \int_0^1 (-x+1)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \ge 0 \\ -a, & \text{kun } a < 0 \end{cases}$$

$|x-1| = 0$, kun

$x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

	$x<1$	$x \geq 1$
$x-1$	$-$	$+$
$\lvert x-1 \rvert$	$-(x-1) = -x+1$	$x-1$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x \ge 1 \\ -x+1, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

Potenssifunktion integrointi

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

- yleistyy koskemaan myös murtopotensseja ja juuria

Määrittelyjoukoista:

Kun $n = 1, 2, 3, \dots$ niin $x \in \mathbb{R}$

Kun $n = \dots, -3, -2, -1$ niin $x \neq 0$

Kun n on murtoluku niin $x > 0$

Esim. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$, kun $x>0$

$$= \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$$

$$\frac{1}{3}+1 = \frac{1}{3}+\frac{3}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$x^{\frac{4}{3}} = x^{1+\frac{1}{3}} = x^{1} \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

$$= x\sqrt[3]{x}$$

Esim.

$$\int -\frac{3}{x\sqrt{x}}\,dx \quad , \text{kun } x>0$$

$$= \int -\frac{3}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int -\frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int -3 \cdot x^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

$$-\frac{3}{2}+1 = -\frac{3}{2}+\frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$= (-3)\cdot(-2)\, x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + C$$

$$= \frac{6}{\sqrt{x}} + C$$

6.7 Integroi funktio, kun $x > 0$.

a) $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$

b) $\frac{x-\sqrt{x}}{x} = \frac{x}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = 1 - x^{-\frac{1}{2}}$

$$\int (1 - x^{-\frac{1}{2}})\,dx = x - 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= x - 2\sqrt{x} + C$$

HUOM!

$$\int \frac{3}{x^3}\,dx \qquad x \neq 0 \qquad \frac{-3}{2 \cdot x^2}$$

Kaikki integraalifunktiot $\int \frac{3}{x^3}\,dx =$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2x^2} + C, & \text{kun } x < 0 \\ -\frac{3}{2x^2} + D, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$