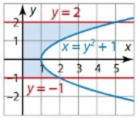
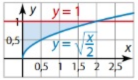
**14.15** Kuvan väritetty alue pyörähtää $y$-akselin ympäri. Piirrä muodostuva pyörähdyskappale ja laske sen tilavuus.

**a)**




**b)**

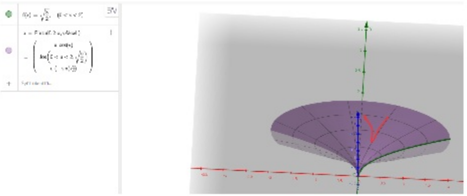



b) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, kun $y = 1$

$1 = \sqrt{\frac{x}{2}} \quad \| (\,)^2$

$1 = \frac{x}{2} \quad \| \cdot 2$

$x = 2$



Ratkaistaan $x$:

$y^2 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2y^2$

$$V = \pi \int_0^1 (2y^2)^2 \, dy = \pi \int_0^1 4y^4 \, dy = \pi \Big/_0^1 \frac{4}{5} y^5 = \pi\left(\frac{4}{5} \cdot 1^5 - \frac{4}{5} \cdot 0^5\right)$$

$$= \frac{4}{5}\pi$$

**15.4** Käyrien $y_1 = x^2 + 3$ ja $y_2 = \frac{1}{4}x^2 + 6$ rajaama alue pyörähtää $x$-akselin ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus.

Käyrien leikkauspisteet:

$x^2 + 3 = \frac{1}{4}x^2 + 6$

$\frac{3}{4}x^2 = 3 \quad \| : \frac{3}{4}$

$x^2 = 4 \quad \| \sqrt{\ }$

$x = \pm 2$

kun $x = 0$:

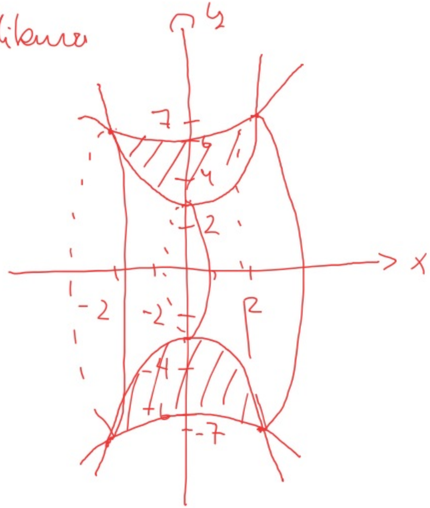
$y_1 = 3$

$y_2 = 6$ (ylempi käyrä)

kun $x = \pm 2$

$y_1 = y_2 = 7$

mallikuva




$V = \pi \int_{-2}^{2} (y_2)^2\,dx - \pi \int_{-2}^{2} (y_1)^2\,dx =$

$\pi \int_{-2}^{2} \left( \left(\frac{1}{4}x^2 + 6\right)^2 - (x^2+3)^2 \right) dx =$

$\pi \int_{-2}^{2} \left( \frac{1}{16}x^4 + 3x^2 + 36 - (x^4 + 6x^2 + 9) \right) dx =$

$\pi \int_{-2}^{2} \left( -\frac{15}{16}x^4 - 3x^2 + 27 \right) dx =$

$\pi \Big/_{-2}^{2} -\frac{3}{16}x^5 - x^3 + 27x =$

$\pi\left(-\frac{3}{\cancel{16}_{1}} \cdot \cancel{32}^{2} - 8 + 54 - \left(\frac{3}{\cancel{16}_{1}} \cdot \cancel{32}^{2} + 8 - 54\right)\right) = \underline{\underline{80\pi}}$

$g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 6, \quad (-2 < x < 2)$

$h(x) = x^2 + 3, \quad (-2 < x < 2)$

$b = \text{Pinta}(g, 2\pi, \text{xAkseli})$

$$= \begin{pmatrix} u \\ \text{Jos}\left(-2 < u < 2, \frac{1}{4}u^2 + 6\right)\cos(v) \\ \text{Jos}\left(-2 < u < 2, \frac{1}{4}u^2 + 6\right)\sin(v) \end{pmatrix}$$

$c = \text{Pinta}(h, 2\pi, \text{xAkseli})$

$$= \begin{pmatrix} u \\ \text{Jos}(-2 < u < 2, u^2 + 3)\cos(v) \\ \text{Jos}(-2 < u < 2, u^2 + 3)\sin(v) \end{pmatrix}$$

+ Syöttökenttä...