**3.19** **a)** Osoita, että funktiot $F_1(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ ja

$F_2(x) = \dfrac{5x^2+16}{x^2+3}$ ovat molemmat funktion

$f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$ integraalifunktioita.

**b)** Laske $F_2(x) - F_1(x)$.

**c)** Mikä yhteys on funktioiden $F_1$ ja $F_2$ välillä?

a) $F_1'(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2+3) - 1 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2} = f(x)$

$F_2'(x) = \dfrac{10x \cdot (x^2+3) - (5x^2+16) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{\cancel{10x^3} + 30x - \cancel{10x^3} - 32x}{(x^2+3)^2} = f(x)$

b) $\dfrac{5x^2+16}{x^2+3} - \dfrac{1}{x^2+3} = \dfrac{5x^2+15}{x^2+3} = \dfrac{5\cancel{(x^2+3)}}{\cancel{x^2+3}} = 5$

c) $F_2(x) = F_1(x) + 5$

## Polynomifunktion integrointi

Integroimissääntö:

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C}$$

Esim. $\int \left(4x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}x - 2\right) dx = 4 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 5 \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

$$= \underline{\underline{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - 2x + C}}$$

Örn. $\int (3x^2-2x)^2\,dx =$

$$\int \left((3x^2)^2 - 2\cdot 3x^2\cdot 2x + (2x)^2\right)dx = \int (9x^4 - 12x^3 + 4x^2)\,dx =$$

$$9\cdot\frac{1}{5}x^5 - 12\cdot\frac{1}{4}x^4 + 4\cdot\frac{1}{3}x^3 + c = \frac{9}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c$$

Örn. $\int \left(\frac{1}{2}x^2 t - \frac{2}{3}x t^2\right)dt = \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{3}t^3 + c$

$$= \frac{1}{4}x^2t^2 - \frac{2}{9}x t^3 + c$$

**4.10** CAS

**a)** Määritä funktio $f$, kun tiedetään, että
$f''(x) = 2x + 1$.

**b)** Määritä funktio $f$, kun tiedetään, että
$f''(x) = 2x + 1$ ja funktion $f$ kuvaaja kulkee pisteen $(0, 2)$ kautta ja funktion $f$ derivaattafunktiolla on nollakohta $x = 1$.

a) Pitää integroida kahteen kertaan

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (2x+1)\,dx = x^2 + x + C$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^2+x+C)\,dx = \underline{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + D}$

b) Tehtävänannon mukaan $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$

– II – $f(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot 0^3 + \frac{1}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + D = 2$

$D = 2$

Vast: $\underline{f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2}$