10.21 Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$, missä $x>0$, jokaisen integraalifunktion kuvaaja leikkaa funktion $g(x)=-x$ jokaisen integraalifunktion kuvaajan. Osoita, että integraalifunktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

Leikkauspisteessä tangenttien pitäisi olla kohtisuorassa

$F'(x)=f(x)$ ja $G'(x)=g(x)$

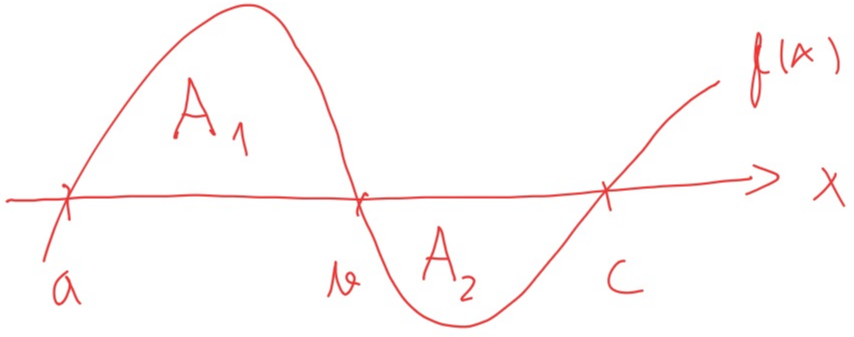
Tangenttien kulmakertoimet pisteessä $x=a$ ovat siis

$f(a)=\frac{1}{a}$, $g(a)=-a$

kohtisuoruusehto: $k_1 \cdot k_2=-1$

$\frac{1}{a}\cdot(-a)=-1$ $\square$

Käyrän ja x-akselin välinen pinta-ala

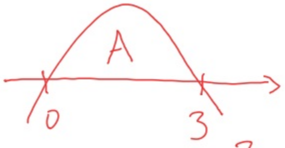


$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx = -\left(F(c) - F(b)\right)$$

11.4 Laske funktion $f(x) = -x^2 + 3x$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala.

f(x):n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli



nollakohdat: $-x^2+3x=0$

$$x(-x+3)=0$$

$$x=0 \lor -x+3=0$$

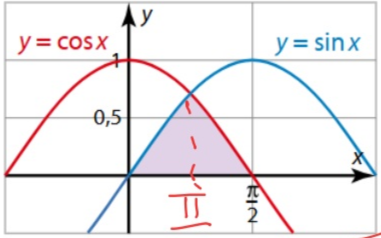
$$x=3$$

$$A=\int_0^3 (-x^2+3x)\,dx =$$

$$\Big/_0^3 -\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2 = -\frac{1}{3}\cdot 3^3+\frac{3}{2}\cdot 3^2-\left(-\frac{1}{3}\cdot 0^3+\frac{3}{2}\cdot 0^2\right)=$$

$$-9+\frac{27}{2}-0=\underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

11.6 Laske väritetyn alueen pinta-ala.



Lasketaan ensin käyrien leikkauspiste:

$$\text{solve}\left(\cos(x)=\sin(x) \mid 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left\{x=\frac{\pi}{4}\right\}$$

Lasketaan sitten pinta-ala kahdessa osassa

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$$

$$-\sqrt{2}+2$$

V: $A = \underline{\underline{2-\sqrt{2}}}$