MAA07 25.3.2025 SA Ratkaisut ja pisteytys

Muista perustella vastauksesi hyvin!
Lue kaikki osan tehtävät ensin läpi ja mieti, mihin tehtäviin sinun kannattaa vastata.

Sisällys

Osa 1: A-Osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

1. Monivalintatehtävä integraalifunktioista 12 p.

Valitse jokaisessa kohdassa ainoa oikea vaihtoehto

1.1 2 p.

Funktion $x^3 - 6x^2 + 3$ integraalifunktiot ovat

- ○ $\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 3x + C$
- ○ $3x^2 - 2x^3 + 3x + C$
- ○ $\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$
- ○ $3x^2 - 12x + C$
- ○ $\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + C$

1.2 2 p.

Funktion $(2x+3)^5$ integraalifunktiot ovat

- ○ $\frac{1}{6}(2x+3)^6+C$
- ○ $2(2x+3)^6+C$
- ○ $\frac{1}{2}\cdot 2(2x+3)^5+C$
- ○ $\frac{1}{2}(2x+3)^6+C$
- ○ $(2x+3)^6+C$
- ○ $\frac{1}{12}(2x+3)^6+C$
- ○ $2(2x+3)^5+C$

1.3 2 p.

Funktion $-6\sin 3x$ integraalifunktiot ovat

- ○ $-18\cos 3x+C$
- ○ $18\cos 3x+C$
- ○ $6\cos 3x+C$
- ○ $-6\cos 3x+C$
- ○ $-2\cos 3x+C$
- ○ $2\cos 3x+C$

1.4 2 p.

Funktion xe^{x^2} integraalifunktiot ovat

- ○ $2xe^{x^2}+C$
- ○ $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}x^3}+C$
- ○ $\frac{1}{2}e^{2x}+C$
- ○ $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$
- ○ $e^{x^2}+C$
- ○ $xe^{x^2}+C$

1.5 2 p.

Funktion $\frac{x^3}{x^4+2}$ integraalifunktiot ovat

- ○ $x^3\ln(x^4+2)+C$
- ○ $\frac{1}{4}\ln(x^4+2)+C$
- ○ $\frac{x^4}{(x^4+2)^2}+C$
- ○ $\frac{1}{4}\ln(x^3)+C$

- $\dfrac{6x^2 - x^6}{(x^4+2)^2} + C$
- $\ln(x^4+2) + C$

1.6 2 p.

Kun $x > 0$, niin funktion $\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$ integraalifunktiot ovat

- $\ln(4x+1) + C$
- $\sqrt{4x+1} + C$
- $\dfrac{1}{4}\sqrt{4x+1} + C$
- $\ln\sqrt{4x+1} + C$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{4x+1}}$
- $\dfrac{1}{2}\sqrt{4x+1} + C$

2. Pinta-ala 12 p.

Määritä funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[1,\ 3]$, kun

2.1 $f(x) = 3x^2 + 2x$ **6 p.**

RATKAISU
Tarkasteluvälillä $f(x) \geq 0$ (jos sijoitat posit. arvon, saat kahden posit. arvon summan). Kuvaaja on siis x-akselin yläpuolella. Pinta-ala

$$\int_1^3 (3x^2+2x)\,dx = \Big/_1^3\, 3\cdot\tfrac{1}{3}x^3 + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot x^2 = \Big/_1^3\, x^3 + x^2 = \left(3^3+3^2\right) - \left(1^3+1^2\right) = 27+9-2 = 34$$

PISTEYTYS
- todettu f positiivinen/ kuvaaja x-akselin yläpuolella (2p.)
- määrätty integraali (1p.)
- integroitu oikein (1p.)
- sijoitus oikein (1p.)
- vastaus oikein (1p.)

2.2 $f(x) = -x - 2.$ **6 p.**

RATKAISU
tarkasteluvälillä $f(x) < 0$ kuvaaja on x-akselin alapuolella. Pinta-ala saadaan laskemalla

$$A = -\int_1^3 (-x-2)\,dx = -\Big/_1^3 -\tfrac{1}{2}x^2 - 2x = -\left(-\tfrac{1}{2}\cdot 9 - 6 - \left(-\tfrac{1}{2} - 2\right)\right) = 8$$

PISTEYTYS

- todettu f negatiivinen/ kuvaaja x-akselin alapuolella (2p.)
- määrätty integraali (1p.)
- integroitu oikein (1p.)
- sijoitus oikein (1p.)
- vastaus oikein (1p.)

3. Integraalifunktioita 12 p.

Integroi funktio ja näytä välivaiheet.

3.1 $\int \frac{2+x+x^2}{x} dx$
3 p.

RATKAISU

$$\int \frac{2+x+x^2}{x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + 1 + x\right) dx = 2\ln|x| + x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

PISTEYTYS

- Jaettu kolmeen eri termiin (1p.)
- 2 termiä neljästä oikein (1p.)
- Vastaus oikein (1p.)

- Itseisarvomerkit puuttuu (-1p.)
- Ei todettu että luku C on reaalinen vakio (-0p.)

3.2 $\int \left(\frac{x}{x^3+1}\right)^2 dx \;=$ **3 p.**

RATKAISU

$$\int \left(\frac{x}{x^3+1}\right)^2 dx \;= \int \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx = \int x^2 (x^3+1)^{-2} dx =$$
$$= \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3+1)^{-2} dx = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (x^3+1)^{-1} + C = -\frac{1}{3(x^3+1)} + C$$

PISTEYTYS

- Muutettu tulomuotoon integroimista varten (1p.)
- Sisäfunktion derivaatta oikein (1p.)
- Vastaus oikein (1p.)

- Ei todettu että luku C on reaalinen vakio (-0p.)

3.3 $\int \frac{3x}{(5x^2+2)\sqrt{5x^2+2}} dx \ = $ **3 p.**

RATKAISU

$$\int \frac{3x}{(5x^2+2)\sqrt{5x^2+2}} dx \ = \int 3x(5x^2+2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{3}{10} \int 10x(5x^2+2)^{-\frac{3}{2}} dx =$$
$$= \frac{3}{10} \cdot (-2) \cdot (5x^2+2)^{-\frac{1}{2}} + C \ = \ -\frac{3}{5\sqrt{5x^2+2}} + C$$

PISTEYTYS

- Muutettu tulomuotoon integroimista varten (1p.)
- Sisäfunktion derivaatta oikein (1p.)
- Vastaus oikein (1p.)

\---

- Ei todettu että C on reaalinen vakio (-0p.)

3.4 $\int \frac{2x}{2x^2-3} dx$ **3 p.**

RATKAISU

$$\int \frac{2x}{2x^2-3} dx = \frac{2}{4} \int \frac{4x}{2x^2-3} dx = \frac{1}{2} \ln\left|2x^2-3\right| + C$$

PISTEYTYS

- Nimittäjäfunktion derivaatta oikein osoittajaan (1p.)
- Huomattu että kyseessä luonnollinen logaritmi-sääntö (1p.)
- Vastaus oikein (1p.)

\---

- Ei todettu että luku C on reaalinen vakio (-0p.)

4. Pyörähdyskappale 12 p.

Käyrien $y = -x^2 + 2$ ja $y = 1$ rajaama alue pyörähtää x -akselin ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus. Anna vastaus tarkkana arvona ja likiarvona yhden desimaalin tarkkuudella.

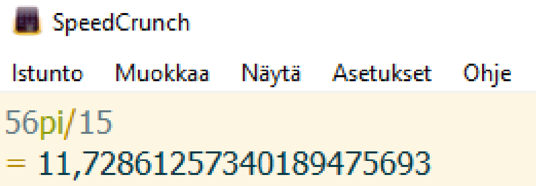
RATKAISU

Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet:

$$-x^2+2=1 \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

Idea: Paraabelin kaari muodostaa kappaleen ulkopinnan ja suora sisäpinnan.

$$V = V_{ulko} - V_{sisä} = \pi \int_{-1}^{1} \left(-x^2+2\right)^2 dx - \pi \int_{-1}^{1} (1)^2 dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(x^4-4x^2+4-1\right) dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(x^4-4x^2+3\right) dx$$
$$= \pi \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+3x\right) = \pi \left(\frac{1}{5}-\frac{4}{3}+3-\left(-\frac{1}{5}+\frac{4}{3}-3\right)\right) = \pi \left(\frac{2}{5}-\frac{8}{3}+6\right) =$$
$$= \pi \left(\frac{6-40+90}{15}\right) = \frac{56\pi}{15}$$



Vastaus: $\frac{56\pi}{15} \approx 11{,}7$ t.y.

PISTEYTYS

- Leikkauspisteet (1p.)
- Idea tilavuuden muodostumisesta (1p.)
- Ulkotilavuus oikein (1p.)
- Sisätilavuus oikein (1p.)
- Saatu oikea neljännen asteen lauseke (2p.)
- Integroitu oikein (2p.)
- Sijoitettu rajat oikein (1p.)
- Laskettu tarkka arvo oikein (2p.)
- Likiarvo oikein (näytetty esim. Speed crunch) (1p.)

Voit käydä tarkastelemassa A-osan vastauksiasi nyt.
Palautettuasi A-osan et voi enää muokata A-osan vastauksia.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit palata kokeeseen jatkamaan tehtäviin vastaamista.

...

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöösi palautettuasi A-osan.

Palauta A-osa

Osa 2: B-Osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

5. Neliö ja paraabeli 12 p.

Neliön kulmapisteet ovat $(-1,\,0)$, $(1,\,0)$, $(-1,\,2)$ ja $(1,\,2)$. Paraabeli $y = a\cdot x^2$, missä a on positiivinen parametri, jakaa neliön siniseen ja oranssiin osaan kuvien mukaisesti. Etsi sellaiset luvun a arvot, että eriväristen alueiden pinta-alojen suhde on $1:3$.

RATKAISU

Tarkasteltavana on kaksi eri tapausta riippuen siitä leikkaako paraabeli neliön pystysuoraa vai vaakasuoraa sivua. Selvitetään ensin millä parametrin a arvolla paraabeli kulkee neliön kulmapisteiden $(-1,\,2)$ ja $(1,\,2)$ kautta:

$f(x):=a\cdot x^2$	*Done*
$\text{solve}(f(-1)=2,a)$	$a=2$
$\text{solve}(f(1)=2,a)$	$a=2$

Paraabeli kulkee neliön suoralla $y=2$ sijaitsevien kulmapisteiden kautta, kun $a=2$.

Merkitään kuvien sinisen alueen pinta-alaa A_s ja oranssin alueen pinta-alaa A_o .

Paraabeli kulkee neliön suoralla $y=2$ sijaitsevien kulmapisteiden kautta, kun $a=2$. Tätä pienemmillä luvun a positiivisilla arvoilla paraabeli leikkaa neliön pystysuoria sivuja.
Etsitään sellainen luvun a arvo, että $A_o = 3\cdot A_s$.
Sinisen pinta-alan lauseke on $A_s = \int_{-1}^{1} ax^2\ dx$.
Koska koko neliön pinta-ala on 4 , niin $A_o = 4 - A_s = 4 - \int_{-1}^{1} ax^2\ dx$.
Ratkaistaan yhtälö $4 - \int_{-1}^{1} a\cdot x^2\ dx = 3\cdot \int_{-1}^{1} a\cdot x^2\ dx \ \Leftrightarrow\ \int_{-1}^{1} a\cdot x^2 dx = 1$ luvun a suhteen, kun $0<a<2$:

$\text{solve}\left(\int_{-1}^{1}\left(a\cdot x^2\right)dx=1,a\right)$	$a=\frac{3}{2}$

Oranssin alueen pinta-ala on kolme kertaa sinisen alueen pinta-alaa suurempi, kun $a=\frac{3}{2}$.

Tarkastellaan sitten tapausta $a>2$, jolloin Paraabeli $y=ax^2$ leikkaa neliön vaakasuoria sivuja. Lausutaan paraabelin ja neliön vaakasuoran sivun leikkauspisteiden x-koordinaatit luvun a avulla: $ax^2 = 2 \ \Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}$.

Oranssin alueen pinta-ala on $A_o = \int_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} 2 - a\cdot x^2\ dx$.

Sinisen alueen pinta-ala on $A_s = A_{neliö} - A_0 = 4 - \int_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}} a\cdot x^2\ dx$.

Ratkaistaan yhtälö $A_s = 3\cdot A_o$ laskimella luvun a suhteen, kun $a>2$:

$\text{solve}\left(4-\int_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}}\left(2-a\cdot x^2\right)dx=3\cdot\int_{-\sqrt{\frac{2}{a}}}^{\sqrt{\frac{2}{a}}}\left(2-a\cdot x^2\right)dx,a\right)$	$a=\frac{128}{9}$

Sinisen alueen pinta-ala on kolme kertaa oranssin alueen pinta-alaa suurempi, kun $a=\frac{128}{9}$.

Vastaus: $a=\frac{3}{2}$ tai $a=\frac{128}{9}$.

PISTEYTYS

- Todettu laskemalla, että paraabeli kulkee neliön ylempien kulmapisteiden kautta kun a=2. (2 p.)
- Muodostettu sinisen alueen pinta-alan lauseke integraalin avulla, kun 0<a<2. (1 p.)

- Muodostettu oranssien alueen pinta-alan lauseke integraalin avulla, kun 0<a<2. (1 p.)
- Muodostettu oikea luvun a yhtälö tapauksessa 0<a<2. (2 p.)
- Edellinen yhtälö ratkaistu oikein. (1 p.)
- Muodostettu sinisen alueen pinta-alan lauseke integraalin avulla, kun a>2. (1 p.)
- Muodosettu oranssin alueen pinta-alan lauseke integraalin avulla, kun a>2. (1 p.)
- Muodostettu oikea luvun a yhtälö tapauksessa a>2. (2 p.)
- Edellinen yhtälö ratkaistu oikein. (1 p.)

> **Aineisto**
> 5.A Neliö ja paraabeli

6. Itseisarvofunktion integraalifunktio 12 p.

Määritä funktion $f(x) = |3x^2 - 12|$ integraalifunktio. Selitä välivaiheittain miten ratkaisusi etenee.

RATKAISU

Koska funktio f on jatkuva sillä on integraalifunktio.
Esitetään funktio paloittain määriteltynä funktiona.

Nollakohdat:

$$\mathbf{g}(x):=3\cdot x^2-12 \quad ▸ \quad \mathit{Valmis}$$
$$\text{solve}(\mathbf{g}(x)=0,x) \quad ▸ \quad x=-2 \text{ or } x=2$$

Funktio g on paraabeli, joka aukeaa ylöspäin, joten se on negatiivinen nollakohtiensa välissä.

Saadaan funktiolle f lauseke

$$|3x^2-12|=\begin{cases} 3x^2-12, & x\le -2 \\ -3x^2+12, & -2<x<2 \\ 3x^2-12, & x\ge 2 \end{cases}$$

Integroidaan ja saadaan integraalifunktio $F(x)$:

$$\mathbf{F}(x)=\begin{cases} x^3-12x+C, & x\leq -2 \\ -x^3+12x+D, & -2<x<2 \\ x^3-12x+E, & x\geq 2 \end{cases}$$

Integraalifunktio on jatkuva kohdissa -2 ja 2 .

Tutkitaan toispuoleisia raja-arvoja:

$$\lim_{x\to -2^-}\left(\mathbf{F}(x)\right)=\lim_{x\to -2^+}\left(\mathbf{F}(x)\right) \text{ ja } \lim_{x\to 2^-}\left(\mathbf{F}(x)\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(\mathbf{F}(x)\right)$$

Eli saadaan $16+C=-16+D$ ja $16+D=-16+E$.

Edelleen $E=32+D=32+32+C=64+C$ ja $D=C+32$.

Tällöin integraalifunktio siis on

$$\mathbf{F}(x)=\begin{cases} x^3-12x+C, & x\leq -2 \\ -x^3+12x+32+C, & -2<x<2 \\ x^3-12x+64+C, & x\geq 2 \end{cases}, \quad C\in R$$

PISTEYTYS
- Mainittu että funktio on jatkuva. (1p.)
- Nollakohdat saatu. (2p.)
- Selitetty paraabelin y=g(x) kulku. (1p.)
- Kirjoitettu paloittain määritelty lauseke funktiolle f. (3p.)
- Funktio f integroitu oikein. (2p.)
- Tutkittu raja-arvoja ja saatu linkki vakioiden välille. (2p.)
- Annettu vastaus yhdellä vakiolla. (1p.)

7. Integraalifunktion minimiarvo   12 p.

Määritä sellainen funktio f , jolla on minimiarvo -7 kohdassa $x=3$ ja jonka toinen derivaattafunktio on $f''(x)=2x-2$.
Piirä lopuksi kuva funktioista $f(x)$, $f'(x)$ ja $f''(x)$ samaan koordinaatistoon.

RATKAISU

Saadaan $f'(x) = \int (2x-2)\,dx = x^2 - 2x + C$.
Koska funktiolla f on minimiarvo kohdassa $x = 3$, niin siinä kohdassa on $f'(3) = 0$.

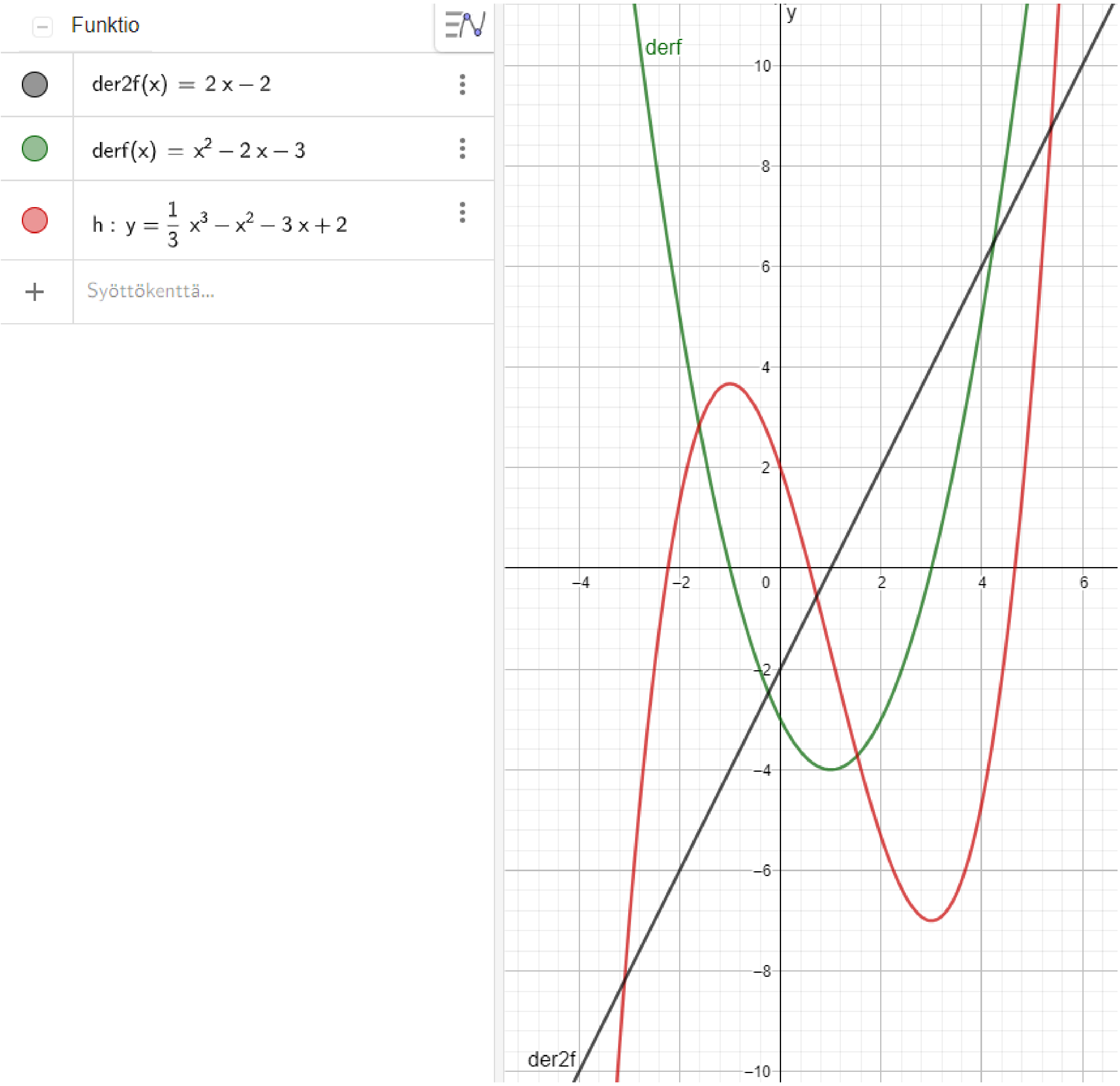
$$f'(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + C = 3 + C = 0 \;\Rightarrow\; C = -3$$

Siten $f(x) = \int (x^2 - 2x - 3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + D$.

Tiedetään myös minimiarvo, joten $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + D = -9 + D = -7 \;\Rightarrow\; D = 2$.

Kysytty funktio on siis $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$.

Kuva:



PISTEYTYS
- Integroitu ja saatu funktion f' lauseke. (2p.)
- Käytetty tietoa f'(3)=0. (1 p.)
- Ratkaistu C=3. (1p.)
- Integroitu ja saatu funktion f lauseke. (2 p.)
- Käytetty tietoa f(3)=-7. (1 p.)
- Ratkaistu integroimisvakio D=2. (1 p.)

- Vastaus oikein (1p.)
- Kuva jossa kuvaajat oikein (3 p.)

8. Pyörähdyskappale 12 p.

8.1 Alue jonka käyrä $y = x^2 - 3$ rajaa x-akselin kanssa pyörähtää x-akselin ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus. Anna vastaus tarkkana arvona. **6 p.**

RATKAISU jos ei käytetty CAS-laskinta

Etsitään funktion nollakohdat. $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.
Funktio on paraabeli, joka aukeaa ylöspäin joten alue jää x -akselin ala-puolelle.

Tilavuuden kaava $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

$$V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2-3)^2 dx = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^4 - 6x^2 + 9)\, dx = \pi \Big/_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{\sqrt{3}^5}{5} - 2\cdot\sqrt{3}^3 + 9\sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}^5}{5} + 2\cdot\sqrt{3}^3 - 9\sqrt{3}\right)\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - 6\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5} - 6\sqrt{3} + 9\sqrt{3}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{18\sqrt{3}}{5} + 6\sqrt{3}\right) = \frac{48\sqrt{3}\pi}{5}$$

Vastaus: $V = \frac{48\sqrt{3}\pi}{5}$ t.y.

PISTEYTYS:
- Nollakohdat oikein. (1p.)
- Selitys, että nollakohdat antavat integrointirajat. (1 p.)
- Integraalilauseke muodostettu oikein (rajat, pii ja funktion neliö näkyy) (1 p)
- Integroitu oikein. (2 p.)
- Vastaus tarkkana arvona. (1p.)

VAIHTOEHTOINEN RATKAISU CAS-laskinta käyttäen:

$f(x):=x^2-3$ ▸ Valmis

solve$(f(x)=0,x)$ ▸ $x=-\sqrt{3}$ or $x=\sqrt{3}$

Tilavuus V $= \pi\cdot\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (f(x))^2\, dx$ ▸ $\frac{48\cdot\pi\cdot\sqrt{3}}{5}$

PISTEYTYS jossa on käytetty CAS-laskinta:

- Nollkohdat oikein. (1p.)
- Selitys, että nollakohdat antavat integrointirajat. (1 p.)
- Integraalilauseke muodostettu oikein (rajat, pii ja funktion neliö näkyy) (1 p.)
- Integroitu CAS-laskimella ja saatu tulos (2 p.)
- Vastaus tarkkana arvona. (1p.)

8.2 Alue jonka käyrä $y = x^2 - 3$ rajaa x-akselin kanssa pyörähtää y-akselin ympäri.
Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus. Anna vastaus tarkkana arvona. **6 p.**

RATKAISU ilman CAS-laskimen käyttöä

Ratkaistaan funktion yhtälöstä x ja saadaan
$x^2 = y + 3$, josta edelleen $x = -\sqrt{y+3}$ tai $x = \sqrt{y+3}$.

Poikkileikkausympyrän säteen neliö on siten $r^2 = |x|^2 = x^2 = \left(\sqrt{y+3}\right)^2 = y + 3$.

Integrointirajat ovat nyt: -3 (paraabelin huippu) ja 0 .

Tilavuus on siten $V = \pi \int_{-3}^{0} (y+3)\, dy = \pi \Big/_{-3}^{0} \left(\frac{y^2}{2} + 3y\right) = \pi \left(0 - \left(\frac{9}{2} - 9\right)\right) = \frac{9\pi}{2}$

PISTEYTYS jos ei ole käytetty CAS-laskinta
- Ratkaistu x oikein. (1p.)
- Saatu lauseke säteen neliölle oikein. (1p.)
- Integrointirajat ajateltu ja selitetty oikein. (1p.)
- Integroitu oikein. (1p.)
- Sijoitus oikein. (1p.)
- Vastaus oikein. (1p.)

VAIHTOEHTOINEN RATKAISU CAS-laskinta käyttäen:

$\text{solve}\left(y=x^2-3,x\right) \blacktriangleright x=-\sqrt{y+3} \text{ and } y\geq -3 \text{ or } x=\sqrt{y+3} \text{ and } y\geq -3$

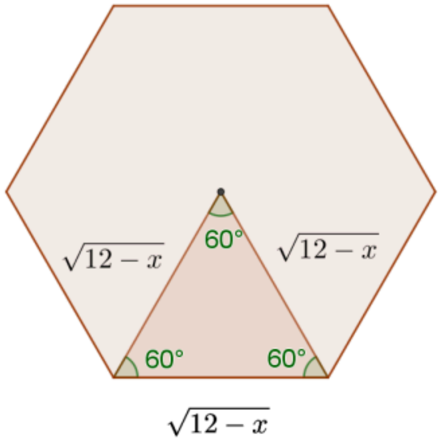
Tilavuus V $= \pi \cdot \int_{-3}^{0} \left(\sqrt{y+3}\right)^2 dy \blacktriangleright \frac{9\cdot\pi}{2}$

PISTEYTYS jos on käytetty CAS-laskinta:
- Ratkaistu x ja tilavuuslauseke näkyvissä (1+ 1 p.)
- Integroimisrajat ja sanallinen perustelu (1+1 p.)
- Integroitu ja saatu tarkka vastaus (1+1p.)

9. Tilavuus 12 p.

Puusta valmistetun esineen pohja on säännöllinen kuusikulmio ja sen korkeus 12 cm. Esineen kaikki pohjan suuntaiset poikkileikkaukset ovat kuusikulmioita, joiden sivun pituus on $\sqrt{12-x}$, missä x on etäisyys senttimetreinä pohjasta. Laske esineen tilavuus.

Muodostetaan ensin lauseke esineen pohjan suuntaisen poikkileikkauksen pinta-alalle $A(x)$ korkeudella x cm pohjasta lukien.



Säännöllinen kuusikulmio jakautuu keskipisteestään kuudeksi identtiseksi tasasivuiseksi kolmioksi, joten sen pinta-ala saadaan kuuden kolmion pinta-alan summana.

$$A(x) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12-x} \cdot \sqrt{12-x} \cdot \sin(60°) = 3 \cdot (12-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$$

(Huomaa! Saman tuloksen saa myös taulukosta löytyvällä säännöllisen kuusikulmion pinta-alakaavalla.

$$A(x) = \frac{3(\sqrt{12-x})^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}(12-x)}{2} = 18\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x\ )$$

Kappaleen tilavuus saadaan integroimalla poikkileikkauksen pinta-alaa pohjasta huipulle.

$$V = \int_0^{12} A(x)\,dx = \int_0^{12} (18\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x)\,dx = 108\sqrt{3}\ (\text{cm}^3)$$

Tilavuus on siis $108\sqrt{3}\ \text{cm}^3 = 187{,}061...\ \text{cm}^3 \approx 190\ \text{cm}^3$.

Vastaus

$190\ \text{cm}^3$

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit vielä palata muokkaamaan vastauksia, tai päättää kokeen.