15.18 Funktion $f(x) = 3x^2 - 3$ kuvaajan ja x-akselin rajaama alue pyörähtää suoran $x = 1$ ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus.

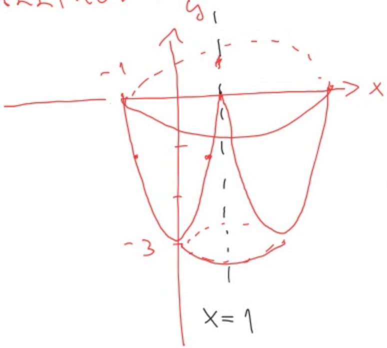
$f(x) = 0$, kun $3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1 \quad \| \sqrt{\ }$

$x = \pm 1$

MALLIKUVA



Ratkaistaan $f(x)$ x:n suhteen

$y = 3x^2 - 3$

$y + 3 = 3x^2 \quad \| : 3$

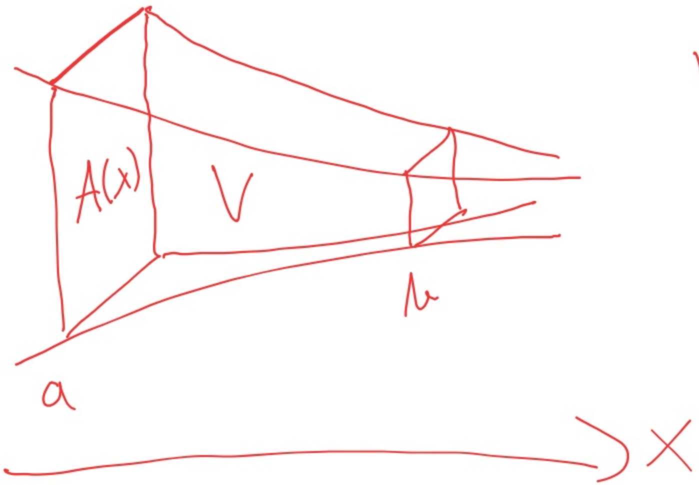
$\frac{1}{3}y + 1 = x^2 \quad \| \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}y + 1}$

Integroidaan y:n suhteen

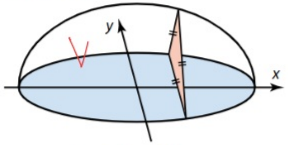
$$V = \pi \int_{-3}^{0} \left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}y + 1}\right)^2 dy - \pi \int_{-3}^{0} \left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}y + 1}\right)^2 dy = 8\pi$$

yleinen tilavuus

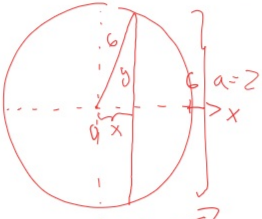


$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

16.6 Kappaleen pohja on origokeskinen ympyrä, jonka säde on 6. Kaikki kappaleen pohjatasoa vastaan kohtisuorat y-akselin suuntaiset poikkileikkaukset ovat tasasivuisia kolmioita. Laske kappaleen tilavuus.



Tasasivuisen kolmion pinta-ala: $A=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a sivun pit.)



Symmetria

$y^2+x^2=6^2$

$y^2=36-x^2 \quad \| \sqrt{\ }$

$y=\pm\sqrt{36-x^2}$

$a=2\sqrt{36-x^2} \Rightarrow A(x)=\frac{(2\sqrt{36-x^2})^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\cancel{4}(36-x^2)\cdot\sqrt{3}}{\cancel{4}}$

$V=2\int_0^6 A(x)\,dx=2\int_0^6 \sqrt{3}(36-x^2)\,dx=$

$2\sqrt{3}\Big/_0^6 36x-\frac{1}{3}x^3=2\sqrt{3}\left(36\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 6^3-(0)\right)$

$=\underline{\underline{288\cdot\sqrt{3}}}$