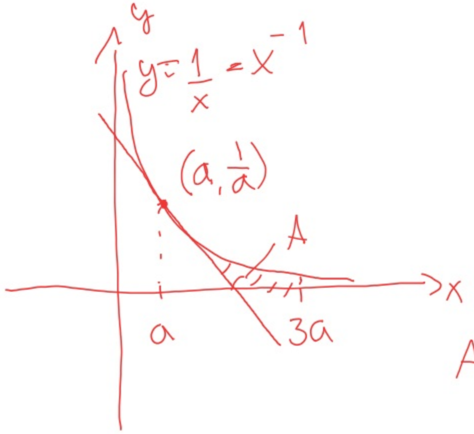
13.20 Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$, missä $x>0$, kuvaajalle piirretään tangentti kohtaan $x=a$. Osoita, että tangentin ja funktion kuvaajan välillä $[a, 3a]$ rajaaman alueen pinta-ala ei riipu kohdasta, johon tangentti piirretään.



tangentin kulmakerroin

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$k = f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

tangentin yhtälö: $y - y_0 = k(x - x_0)$

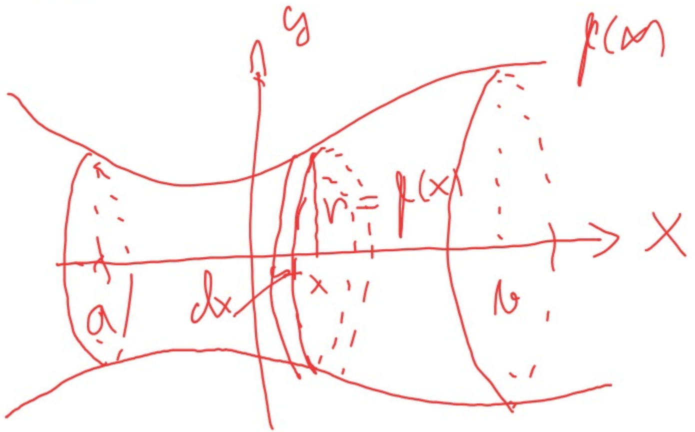
$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a)$$

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

$$A = \int_a^{3a} \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}\right) dx$$

$$= \int_a^{3a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a^2}x - \frac{2}{a}\right) dx = \ln 3 \text{ (ei riipu a:sta)} \ \square$$

Pyörähdyskappaleen tilavuus

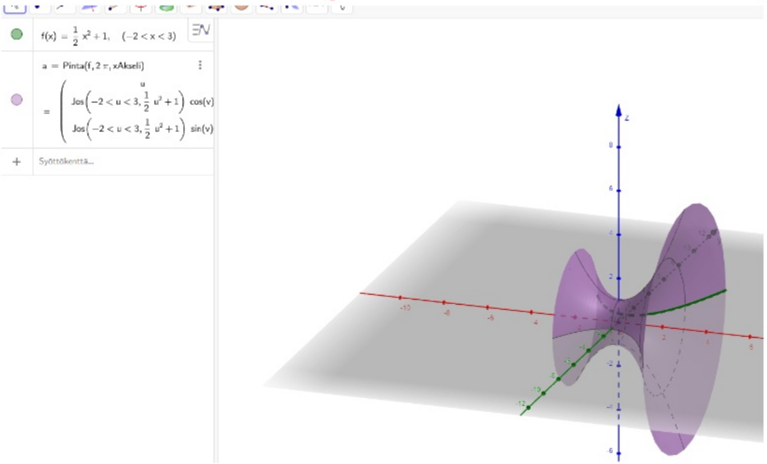


Kappaleen tilavuus

$$\boxed{V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx}$$

Esim. Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ kuvaaja välillä $-2 \le x \le 3$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus

$$V=\int_{-2}^{3}\pi\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^2 dx=\pi\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{4}x^4+x^2+1\right)dx=\pi\Big/_{-2}^{3}\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{3}x^3+x=\ldots$$



$$\int_{-2}^{3}\pi\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^2dx$$

$$\frac{365\cdot\pi}{12}$$

14.15 Kuvan väritetty alue pyörähtää y-akselin ympäri. Piirrä muodostuva pyörähdyskappale ja laske sen tilavuus.

a)