11.19 Funktion $f(x) = 3x + |1 - 2x|$ kuvaaja ja x-akseli rajaavat välillä $[-2, 1]$ alueen. Laske alueen pinta-ala.

Tutkitaan $|1-2x|$

nollakohta: $1 - 2x = 0$

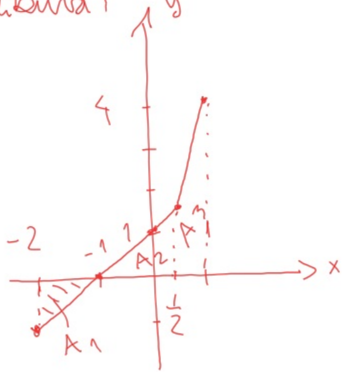
$-2x = -1$

$x = \frac{1}{2}$

merkkikaavio:

	$\frac{1}{2}$	
$1-2x$	+	−
$f(x) =$	$3x+(1-2x) = x+1$	$3x+(-1+2x) = 5x-1$

Mallikuva:

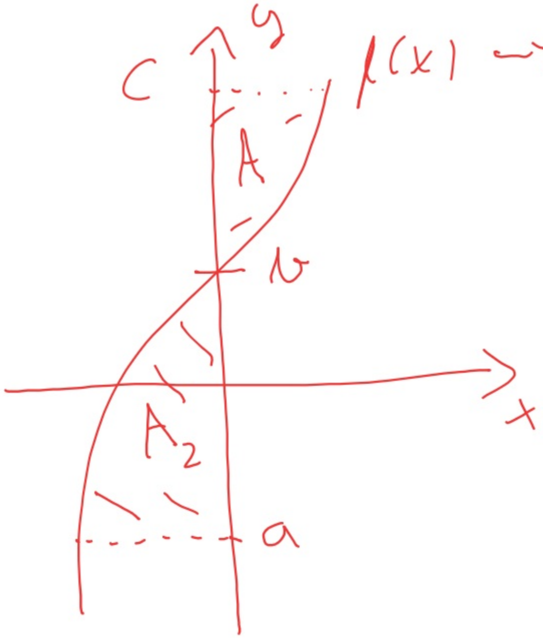


$A_1 = -\int_{-2}^{-1} x+1 \, dx =$

$A_2 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x+1 \, dx =$

$A_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 5x-1 \, dx =$

Käyrän ja y-akselin rajaama pinta-ala



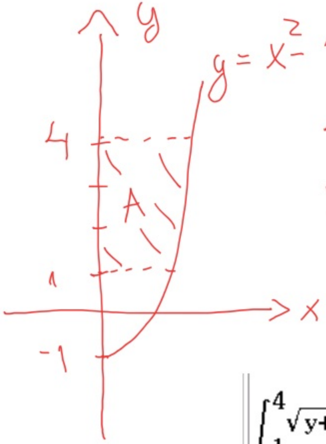
$f(x) \rightarrow$ ratkaistaan x ja saadaan $f(y)$

$$A_1 = \int_b^c f(y)\,dy$$

$$A_2 = -\int_a^b f(y)\,dy$$

Esim. Määritä funktion $f(x) = x^2 - 1$ ja y-akselin rajaama pinta-ala välillä $1 \le y \le 4$, kun $x \ge 0$.

Mallikuva:



$y = x^2 - 1$ Ratkaistaan x:

$x^2 = y + 1 \quad \| \sqrt{\ }$

$x = (\pm)\sqrt{y+1} = f(y)$

$$A = \int_1^4 \sqrt{y+1}\,dy = \int_1^4 (y+1)^{\frac{1}{2}}\,dy = \Big/_1^4 \frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}} =$$

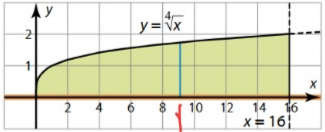
$$\frac{2}{3}\Big/_1^4 (y+1)\sqrt{y+1} = \frac{2}{3}\left((4+1)\sqrt{4+1} - ((1+1)\sqrt{1+1})\right) =$$

$$\frac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right) = \underline{\frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}}$$

$$\int_1^4 \sqrt{y+1}\,dy$$

$$\frac{10\cdot\sqrt{5}}{3} - \frac{4\cdot\sqrt{2}}{3}$$

12.4 Niittyaluetta rajaa x-akselia pitkin kulkeva tie ja aidat, jotka kulkevat pitkin käyrää $y=\sqrt[4]{x}$ ja suoraa $x=16$. Niitty jaetaan kahteen, pinta-alaltaan yhtä suureen osaan tietä vastaan kohtisuoralla aidalla. Mihin kohtaan aita rakennetaan?



$x=a$

Solverilla suoraan

$$\text{solve}\left(\int_0^a \sqrt[4]{x}\,dx=\int_a^{16} \sqrt[4]{x}\,dx,\ a\right)$$

$$\left\{a=8\cdot 2^{\frac{1}{5}}\right\}$$

TAI osissa

$$\int_0^a \sqrt[4]{x}\,dx$$

$$\frac{4\cdot a^{\frac{5}{4}}}{5}$$

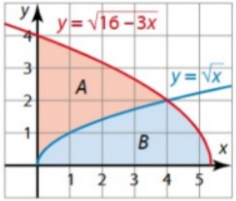
$$\int_a^{16} \sqrt[4]{x}\,dx$$

$$\frac{-4\cdot a^{\frac{5}{4}}}{5}+\frac{128}{5}$$

$$\text{solve}\left(\frac{4\cdot a^{\frac{5}{4}}}{5}=\frac{-4\cdot a^{\frac{5}{4}}}{5}+\frac{128}{5},\ a\right)$$

$$\left\{a=8\cdot 2^{\frac{1}{5}}\right\}$$

12.9 Osoita, että kuvassa alueiden A ja B pinta-alat ovat yhtä suuret.



Käyrien leik. pist. x-koord.

solve$(\sqrt{16-3x}=\sqrt{x}$ $\Rightarrow y=2$

$\{x=4\}$

solve$(\sqrt{16-3x}=y \mid x\geq 0, x$

Käyrälle $y=\sqrt{16-3x}$, ratk. x

$\left\{x=\frac{-y^2}{3}+\frac{16}{3}\right\}$

Käyrälle $y=\sqrt{x}$ $\| (\ )^2$, $x\geq 0$

$y^2=x$

$A=\int_0^2 y^2\,dy+\int_2^4 \frac{-y^2}{3}+\frac{16}{3}\,dy$

$\frac{64}{9}$

Käyrälle $y=\sqrt{16-3x}$, kun $y=0$, niin $x=\frac{16}{3}$

$B=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx+\int_4^{\frac{16}{3}} \sqrt{16-3x}\,dx$

$\frac{64}{9}$

$A=B$ $\square$