3.19 CAS

a) Osoita, että funktiot $F_1(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$ ja $F_2(x)=\dfrac{5x^2+16}{x^2+3}$ ovat molemmat funktion $f(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$ integraalifunktioita.

b) Laske $F_2(x)-F_1(x)$.

c) Mikä yhteys on funktioiden F_1 ja F_2 välillä?

a) $F_2'(x)=\dfrac{10x\cdot(x^2+3)-(5x^2+16)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{\cancel{10x^2}+30x-\cancel{10x^2}-32x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}=f(x)$

$F_1'(x)=\dfrac{0\cdot(x^2+3)-1\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}=f(x)$

b) $\dfrac{5x^2+16}{x^2+3}-\dfrac{1}{x^2+3}=\dfrac{5x^2+15}{x^2+3}=\dfrac{5\cancel{(x^2+3)}}{\cancel{x^2+3}}=5$

c) $F_2(x)=F_1(x)+5$

Polynomifunktion integrointi

Integroimissääntö:

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C}$$

Esim. $\int \left(4x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) dx = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - 5 \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 - 3x + C$

$$= \underline{\underline{x^4 - \frac{5}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^2 - 3x + C}}$$

Örn. $\int (3x^2-4x)^2\,dx = \int \left((3x^2)^2 - 2\cdot 3x^2\cdot 4x + (4x)^2\right) dx =$

$\int (9x^4 - 24x^3 + 16x^2)\,dx = 9\cdot\frac{1}{5}x^5 - 24\cdot\frac{1}{4}x^4 + 16\cdot\frac{1}{3}x^3 + c$

$= \frac{9}{5}x^5 - 6x^4 + \frac{16}{3}x^3 + c$

Örn $\int \left(3x^2 t - \frac{1}{2}t^2 x^3\right) dt =$

$3x^2\cdot\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}x^3\cdot\frac{1}{3}t^3 + c = \frac{3}{2}x^2t^2 - \frac{1}{6}x^3t^3 + c$

4.10 CAS

a) Määritä funktio f, kun tiedetään, että $f''(x) = 2x + 1$.

b) Määritä funktio f, kun tiedetään, että $f''(x) = 2x + 1$ ja funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(0, 2)$ kautta ja funktion f derivaattafunktiolla on nollakohta $x = 1$.

a) Pitää integroida kahteen kertaan

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (2x+1)\,dx = x^2 + x + C$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^2 + x + C)\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + D}}$$

b) Tehtävänannon mukaan $f'(1) = 0 \Rightarrow 1^2 + 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$

– " – $f(0) = 2 \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot 0^3 + \frac{1}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + D = 2$

$D = 2$

Vast: $f(x) = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2}}$