

8.19 Olkoon $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

- a) Määritä sellaiset vakiot a , b ja c , että funktiolla f on maksimiarvo $f(0) = 1$ ja minimikohdat $x = -1$ ja $x = 2$.
- b) Määritä funktion f minimiarvot.

Kun $f(0) = 1$, niin

$$3 \cdot 0^4 + a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c = 1$$

$c = 1$

Derivoidaan:

$$f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx$$
$$= x(12x^2 + 3ax + 2b)$$

$f'(x) = 0$, kun $x = 0$ v $12x^2 + 3ax + 2b = 0$
nollakohdat ovat -1 ja 2

Sij. $x = -1$: $12 - 3a + 2b = 0$

$x = 2$: $48 + 6a + 2b = 0$

$-36 - 9a = 0$

$-9a = 36 \quad | : (-9)$

$a = -4$ \Rightarrow $b = -12$

1a) $f(-1) = \dots$

$f(2) = \dots$

8.21 Osoita, että funktio $f(x) = x^3 - ax^2 + a^2x$ on kaikkialla aidosti kasvava vakion a arvosta riippumatta.

Derivaatan avulla:

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a^2$$

Wallabohdat:

$$3x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$a=3, \quad b=-2a, \quad c=a^2$$

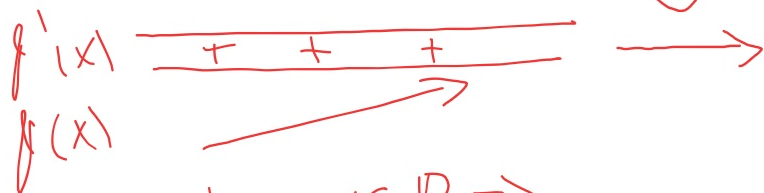
ratk. kaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{(-2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a^2}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{2a \pm \sqrt{-8a^2}}{6} \text{ ei ymmärrä, sillä } -8a^2 \leq 0 \text{ kun } a \in \mathbb{R}$$

Kulubukaario:



koska $f'(x) > 0$, kun $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ on aidosti kasvava kaikkialla

Voidaan osoittaa, että edellä tehdyt havainnot pätevät yleisesti.

Suurin ja pienin arvo suljetulla välillä

LAUSE

Olkoon f suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio.

- 1) Funktiolla f on aina suurin ja pienin arvo.
- 2) Jos funktio f on lisäksi derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, niin se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välille $]a, b[$ kuuluvasa derivaattafunktion nollakohdassa tai välin $[a, b]$ päätepisteessä.

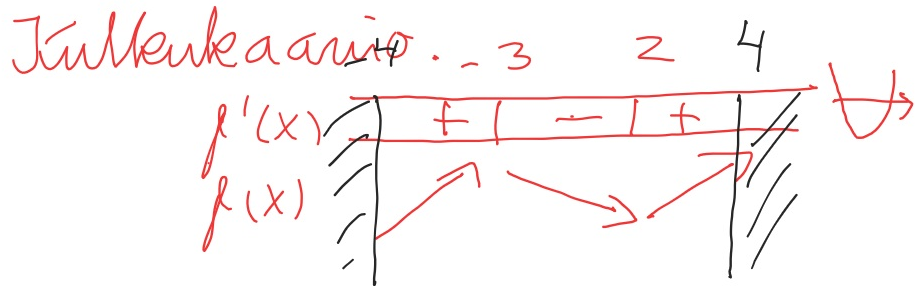
Huomaa, että polynomifunktio on kaikkialla jatkuva ja kaikkialla derivoituva, joten lausetta voi aina soveltaa polynomifunktioon.

Esim. Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[-4, 4]$

Derivoatan avulla:

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

$$\text{nollakohdat: } x = -3 \vee x = 2$$



$$\begin{aligned} f(-4) &= 29 \text{ (suurin)} \\ f(-3) &= -\frac{29}{2} \text{ (pienin)} \\ f(2) &= -\frac{19}{3} \text{ (pienin)} \\ f(4) &= \end{aligned}$$

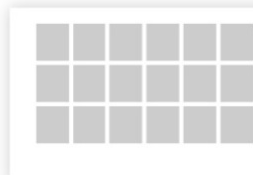
	$12 \cdot a + 4 \cdot b + 96$
Define $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	done
$f(-4)$	$\frac{35}{3}$
$f(4)$	$\frac{19}{3}$
$f(-3)$	$\frac{29}{2}$
$f(2)$	$-\frac{19}{3}$

Kulkukaavio:



```
\begin{matrix}
& & \\
& & \\
& & \\
& & \\
\end{matrix}
```

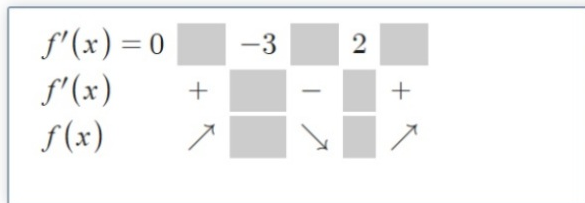
Kulkukaavio:



```
\begin{matrix}
& & & & \\
& & & & \\
& & & & \\
& & & & \\
\end{matrix}
```

lisää koodiin

Kulkukaavio:



```
\begin{matrix}
f'(x) = 0 & -3 & 2 & \\
f'(x) & + & - & + \\
f(x) & \nearrow & \searrow & \nearrow
\end{matrix}
```

Kulkukaavio:

$$\begin{matrix}
 f'(x) = 0 & -3 & 2 \\
 f'(x) & + & - & + \\
 f(x) & \nearrow & \searrow & \nearrow
 \end{matrix}$$