22.17 Sievennä funktio ensin muotoon $f(x) = a\ln x + b$ ja määritä sitten sen derivaattafunktio.

a) $f(x) = 3\ln x - \ln 2x$

b) $f(x) = \ln x^2 + \ln \frac{2}{x}$

c) $f(x) = \ln \sqrt{x} - \ln \sqrt[3]{x}$

a) $f(x) = 3\ln x - (\ln 2 + \ln x)$

$= 3\ln x - \ln 2 - \ln x$

$= \underbrace{2}_{a}\ln x \underbrace{- \ln 2}_{b}$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 0 = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = 2\ln x + \ln 2 - \ln x$

$= \ln x \underbrace{+ \ln 2}_{b}$

$a = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln x^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{3}\ln x = \frac{1}{6}\ln x$

$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{6x}$

22.19 Ratkaise funktion $f(x)=\ln\frac{x^2-x}{x^2+1}$ derivaattafunktion nollakohdat.

Mj. $\frac{x^2-x}{\underbrace{x^2+1}_{>0}}>0$

$>0 \Rightarrow$ osoittaja määrää merkin

Osoittajan nollakohdat:

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0 \vee x-1=0$

$x=1$

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 1 & \\ + & \circ & - & \circ & + \end{array}$$

Mj: $x<0$ tai $x>1$

$D \ln g(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$

$f'(x)=\frac{1}{\frac{x^2-x}{x^2+1}} \cdot \frac{(2x-1)(x^2+1)-(x^2-x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{x^2+1}{x^2-x} \cdot \frac{\cancel{2x^3}+2x-x^2-1-(\cancel{2x^3}-2x^2)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{\cancel{x^2+1}}{x^2-x} \cdot \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^{\cancel{2}}} = \frac{x^2+2x-1}{(x^2-x)(x^2+1)}$

$f'(x)=0$, kun $x^2+2x-1=0$

$\underline{\underline{x=-1 + \sqrt{2}}}$

23.4 Määritä funktion $f(x) = x^2 e^x$ suurin ja pienin arvo välillä $[-4, 1]$.

$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$

$= \underbrace{e^x}_{>0}(2x + x^2)$

$f'(x) = 0$, kun $2x + x^2 = 0$

$x(2+x) = 0$

$x = 0 \lor 2 + x = 0$

$x = -2$

	-4		-2		0		1
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗	maks. kohta	↘	min kohta	↗	

$f(-4) = (-4)^2 \cdot e^{-4} = \frac{16}{e^4} \approx 0{,}29$

$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$

$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$ (pienin)

$f(1) = 1^2 \cdot e = e \approx 2{,}7$ (suurin)

22.20 Määritä funktion f määrittelyjoukko ja derivaattafunktio.

a) $f(x) = \ln(\ln x)$ **b)** $f(x) = \lg(\ln x)$

b) Mj $\lg \underline{x}$

$x > 0 \Rightarrow \ln x > 0$

$\ln x = 0$, kun

$\ln e^0 = 0$

$x = e^0 = 1$

$\Rightarrow$ Mj. $x > 1$

b) $f(x) = \lg(\ln x) = \log_{10}(\ln x)$

$f'(x) = \frac{1}{\ln 10 \cdot \ln x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{D \ln x}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{x \ln x \ln 10}}}$