MAA9 vastaukset k25

1. Aritmeettinen lukujono 12 p.

Olkoon $4, 12, 20, 28, \ldots$ aritmeettinen lukujono.

1.1 Laske erotusluku d ja lukujonon yleinen jäsen a_n . **4 p.**

$d = 12 - 4 = 8$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 4 + (n-1) \cdot 8 = 8n - 4$

1.2 Laske lukujonon 500. jäsen. Onko luku $1\ 000$ lukujonon jäsen? **5 p.**

Hyödynnetään edellisen kohdan tulosta

$a_n = 8n - 4$

$a_{500} = 8 \cdot 500 - 4 = 3996$

Ratkaistaan n yhtälöstä

$1000 = 8n - 4 \Leftrightarrow 8n = 1004 \parallel : 8 \Leftrightarrow n = 125{,}5$

Koska n ei ole kokonaisluku niin luku 1000 ei ole jonon jäsen.

1.3 Laske lukujonon 500 ensimmäisen jäsenen summa. **3 p.**

Aritmeettinen summa saadaan lasketuksi kaavalla

$S = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$ sijoitetaan arvot edellisistä kohdista

$S = 500 \cdot \dfrac{4 + 3996}{2} = 1\ 000\ 000$

2. Rekursiivinen kukujono 12 p.

Rekursiivinen lukujono (a_n) määritellään seuraavasti:

$a_1 = 1$ ja $a_n = 2a_{n-1} + 3$, kun $n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

2.1 **3 p.**

Laske a_2, a_3 ja a_4.

$a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

$a_3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$

$a_4 = 2 \cdot 13 + 3 = 29$

2.2 4 p.

Onko lukujono (a_n) aritmeettinen tai geometrinen?

Lukujono ei ole aritmeettinen sillä
$a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4 \neq a_3 - a_2 = 13 - 5 = 8$ eli peräkkäisten jäsenten erotus ei ole sama.
Lukujono ei ole myöskään geometrinen sillä peräkkäisten jäsenten osamäärä ei ole sama.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{1} \neq \frac{a_3}{a_2} = \frac{13}{5}$$

2.3 5 p.

Määritä $\sum_{i=1}^{7} a_i$

Lasketaan ensin 3 jäsentä

$a_5 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$

$a_6 = 2 \cdot 61 + 3 = 125$

$a_7 = 2 \cdot 125 + 3 = 253$

Lasketaan sitten summa

$$\sum_{i=1}^{7} a_i = 1 + 5 + 13 + 29 + 61 + 125 + 253 = 487$$

3. Leena täyttää 18 vuotta 12 p.

Päivänä, jolloin Leena syntyi, ja jokaisena Leenan syntymäpäivänä aina 15 -vuotispäivään saakka, äiti talletti Leenan tilille saman rahamäärän. Tilin korko lähdeveron vähentämisen jälkeen on $5\ \%$. Jos vuotuisen talletuksen suuruus oli 200 euroa, niin kuinka paljon Leena voi nostaa tililtä, kun hän täyttää 18 vuotta?

Kirjataan aluksi muuamia tapahtumia:
0 v: Tilillä $200\ €$
1 v: Tilillä $200\ € + 1{,}05 \cdot 200\ €$
2 v: Tilillä $200\ € + 1{,}05 \cdot 200€ + 1{,}05^2 \cdot 200€$
...
15 v: Tilillä $200\ € + 1{,}05 \cdot 200\ € + \ldots + 1{,}05^{15} \cdot 200\ €$
Seuraavan kolmen vuoden aikana kertyy vuosittain korkoa, joten 16 talletusta tuottavat
18 v: Tilillä $1{,}05^3 \cdot 200\ € + 1{,}05^4 \cdot 200\ € + \ldots + 1{,}05^{18} \cdot 200\ €$
Muodostuu geometrinen summa

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{1{,}05^3 \cdot 200\,(1 - 1{,}05^{16})}{1 - 1{,}05} = 5477{,}30\ €$$

$$\frac{1.05^3 * 200 * (1 - 1.05^{16})}{1 - 1.05}$$

5477.300782

4. Autolaina 12 p.

Pelle ja Ville ottivat auton hankintaa varten $40\ 000$ euron lainan. Laina-aika on viisi vuotta ja lainalle sovittiin kiinteä $3{,}6\ \%$:n vuosikorko. Laina on tasaerälaina ja sitä lyhennetään puolivuosittain.

4.1 Kuinka suuri on lainan takaisinmaksuerä? 4 p.

Koska vuosikorko on 3,6 % niin puolen vuoden korko on 1,8 %, eli q=1,018. Maksuja on 2 x 5=10 kpl. Käytetään annuiteetin kaavaa jossa pääoma K = 40 000 €.

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} = 40\ 000 \cdot 1{,}018^{10} \cdot \frac{1-1{,}018}{1-1{,}018^{10}} = 4406{,}59\ €$$

$$40000*1.018^{10}*\frac{1-1.018}{1-1.018^{10}}$$

4406.591238

4.2 Kuinka paljon lainaa on jäljellä 3 vuoden kuluttua lainan lyhennyksen jälkeen? 4 p.

Käytetään hyväksi jäljellä olevan pääoman laskukaavaa, kolmessa vuodessa lyhennyksiä k=6

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q} = 40\ 00 \cdot 1{,}018^6 - 4406{,}59 \cdot \frac{1-1{,}018^6}{1-1{,}018} = 16\ 860{,}87\ €$$

$$40000*1.018^6-4406.59*\frac{1-1.018^6}{1-1.018}$$

16860.86676

4.3 Kuinka paljon korkoa joudutaan lainasta maksamaan? 4 p.

Lasketaan ensin tasaerät yhteen ja vähennetään siitä sitten alkuperäinen pääoma.

$$10 \cdot 4406{,}59\ € - 40\ 000\ € = 4065{,}90\ €$$

5. Talletuksia tilille 12 p.

Tilille, jonka nettokorkokanta on $4{,}0\ \%$, talletetaan jokaisen vuoden alussa 600 euroa viidentoista vuoden ajan.

5.1 Laske tulukkolaskentaohjelmalla tilin pääoma 16. vuoden lopussa koron lisäämisen jälkeen. 6 p.

Korkotekijäksi tulee 1,04. Ensimmäisen vuoden lopussa tilillä on 1,04*600=624,00 €.

Toisesta vuodesta eteenpäin kopioidaan kaava:

= =1,04*(C2+B3)

Edellisen vuoden lopussa tilillä ollut summa lisätään uuteen talletukseen ja kerrotaan korkotekijällä 1,04. 16. vuoden lopussa tilillä on siis 12994,51 €.

Vuodet	Talletus vuoden alussa	Tilillä rahaa vuoden lopussa
1	600	624,00
2	600	1272,96
3	600	1947,88
4	600	2649,79
5	600	3379,79
6	600	4138,98
7	600	4928,54
8	600	5749,68
9	600	6603,66
10	600	7491,81
11	600	8415,48
12	600	9376,10
13	600	10375,15
14	600	11414,15
15	600	12494,72
16		12994,51

5.2 Laske edellinen tehtävä 6.1 ilman taulukkolaskentaohjelmaa. 6 p.

Talletuksista muodostuu siis geometrinen summa:

$600 \cdot 1{,}04^2 + 600 \cdot 1{,}04^3 + \cdots + 600 \cdot 1{,}04^{16}$

15 kpl. yhteenlaskettavia.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{600 \cdot 1{,}04^2 \cdot (1-1{,}04^{15})}{1-1{,}04} = 12994{,}51 \text{ €}$$

$$\frac{600*1.04^2(1-1.04^{15})}{1-1.04}$$

12994.50743

6. Isovanhempien talletuksen suuruus 12 p.

Kun Iida syntyy isovanhemmat tekevät talletuksen, josta on tarkoitus antaa Iidalle syntymäpäiväksi rahaa seuraavasti: 18 vuoden kuluttua talletuksesta $1\ 800$ €, 19 vuoden kuluttua talletuksesta $1\ 900$ € ja 20 vuoden kuluttua talletuksesta $2\ 000$ €. Vuosikorko $6\ \%$ pysyy samana koko ajan. Korosta pankki perii ja tilittää valtiolle $30\ \%$:n lähdeveron. Laske euron tarkkuudella, kuinka suuri tallettavan pääoman vähintään tulee olla.

Lasketaan ensin nettokorkokanta $0{,}7 \cdot 6\ \% = 4{,}2\ \%$, josta korkotekijä $q = 1{,}042$. Diskontataan lahjarahat nykypäivään, aika merkitään siis negatiivisena potenssina

$1800 \cdot 1{,}042^{-18} + 1900 \cdot 1{,}042^{-19} + 2000 \cdot 1{,}042^{-20} = 2606{,}19 \text{ €} \approx 2607 \text{ €}$

$1800*1.042^{-18}+1900*1.042^{-19}+2000*1.042^{-20}$

2606.189465

7. Asuntolaina

12 p.

Virtasen perhe ottaa talolainaa $240\ 000$ €. Laina-aika on 20 vuotta ja lainalle sovitaan kiinteä $3{,}00\ \%$:n vuosikorko. Kyseessä on tasalyhennyslaina ja sitä lyhennetään kuukausittain.

a) Kuinka suuri on 120. maksuerä?

b) Kuinka paljon lainasta maksetaan korkoja koko laina-aikana?

Lyhennyksiä on $20 \cdot 12 = 240$ kpl.

Lyhennyksen suuruus on $\dfrac{240\ 000\ €}{240} = 1000\ €$, Korko kuukaudelta on

$\dfrac{3\ \%}{12} = 0{,}25\ \% = 0{,}0025$

a) Maksuerä koostuu lyhennyksestä ja jäljellä olevan pääoman korosta. 120. lyhennyksen ainana pääomaa on lyhennetty 119 kertaa, eli pääomaa on jäljellä 121 000 €. Lyhennyksen suuruus on siis:

$1000\ € + 121\ 000\ € \cdot 0{,}0025 = 1302{,}50\ €$

b) Korot muodostavat aritmeettisen summan, sillä kuukausittain korko vähenee aina samalla määrällä lyhennyksen ollessa sama. Koron erotusluku on siis $d = -1000\ € \cdot 0{,}0025 = -2{,}50\ €$

Ensimmäisen erän korko: $240\ 000\ € \cdot 0{,}0025 = 600\ €$

Viimeisen erän korko: $1000\ € \cdot 0{,}0025 = 2{,}50\ €$

Lasketaan maksettu korko aritmeettisen summan avulla:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = n\frac{a_1 + a_n}{2} = 240 \cdot \frac{600 + 2{,}5}{2} = 72\ 300\ €$$

8. Lainasuunnittelua

12 p.

Kalle laski, että hänellä on varaa maksaa kuukausittain lainanhoitokuluja korkeintaan $1\ 000\ €$. Hän suunnittelee ottavansa $180\ 000\ €$:n tasaerälainan, jota lyhennetään kuukausittain. Kuinka pitkäksi laina-aika pitää vähintään sopia, kun lainan vuosikorko on $2{,}0\ \%$? Millä vuosikorolla pitäisi mennä, jos Kalle haluaisi laina-ajaksi 17 vuotta?

Lainan pääoma $K = 180\ 000\ €$, kuukausittainen korkokerroin on $q = \left(1 + \frac{2}{12 \cdot 100}\right)$. Annuiteetti $A = 1000\ €$

,ratkaistaan korkokaudet n annuiteetin laskukaavasta

$A = Kq^n \dfrac{1-q}{1-q^n}$, $1000 = 180\ 000 \cdot \left(1 + \dfrac{2}{12 \cdot 100}\right)^n \cdot \dfrac{1 - \left(1 + \frac{2}{12 \cdot 100}\right)}{1 - \left(1 + \frac{2}{12 \cdot 100}\right)^n}$

$$\text{solve}\left(1000=180000*\left(1+\frac{2}{12*100}\right)^n*\frac{1-\left(1+\frac{2}{12*100}\right)}{1-\left(1+\frac{2}{12*100}\right)^n},n\right)$$

$\{n=214.1832543\}$

, laina aika on siis 214 kk eli 17 vuotta 10 kk.

17 vuotta on 204 kk, joten ratkaistaan annuiteetti korkotekijän q suhteen

$$\text{solve}\left(1000=180000*q^{204}*\frac{1-q}{1-q^{204}},q\right)$$

$\{q=-0.9716135158, q=1.001248191\}$

Lasketaan sitten vuosikorko

```
12*0.001248191
                                0.014978292
0.014978292*100
                                1.4978292
```

Vuosikoron pitäisi olla 1,5 %