MAA6 vastaukset s24

1.1 3 p.

$\lim_{x\to -2}\left(3x^2-4x+6\right)$

$$=3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)+6=26$$

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

1.3 3 p.

$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-x^2}{8}$

$$=\frac{5\cdot 0^3-0^2}{8}=\frac{0}{8}=0$$

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

1.2 3 p.

$\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x^2-9}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

1.4 3 p.

$\lim_{x\to 3}\frac{4x-12}{x^2-3x}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{4(x-3)}{x(x-3)}=\frac{4}{3}$$

2.1 3 p.

kohdassa -2

$$\lim_{x\to -2-}f(x)=4=f(-2)=\lim_{x\to -2+}f(x)$$

$f(x)$ on siis jatkuva kohdassa x=-2

Vastauksen pituus: 25 merkkiä.

2.2 3 p.

kohdassa 1

$$\lim_{x\to -1-}f(x)=3=f(-1)=\lim_{x\to -1+}f(x)$$

$f(x)$ on siis jatkuva kohdassa x=-1

2.3 3 p.

kohdassa 3

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = 2 \neq f(3) = 3 = \lim_{x\to 3+} f(x)$$

$f(x)$ ei ole siis jatkuva kohdassa 3

Vastauksen pituus: 25 merkkiä.

2.4 3 p.

Onko f derivoituva kohdassa -2.

Jotta funktio olisi derivoituva jossain kohtaa niin sen täytyy olla jatkuva kyseisessä kohdassa ja toispuolisten derivaattojen pitää olla keskenään yhtäsuuret.
$f(x)$ on kyllä jatkuva kohdassa -2 mutta toispuoliset derivaatat ovat erisuuria. Vasemmanpuoleinen derivaatta on positiivinen ja oikeanpuoleinen derivaatta on negatiivinen.

3.

Olkoon $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 1$

3.1 Tutki, milloin funktion $f(x)$ derivaatta on positiivinen. **6 p.**

$f'(x) = -x^2 + 4$, etsitään nollakohdat $-x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \parallel \sqrt{} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Tehdään kulkukaavio:

$$\begin{array}{lccccc} & & -2 & & 2 & \\ f'(x) & - & & + & & -\ Alas.\ auk.\ parab. \\ f(x) & \searrow & & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

$f'(x) > 0,\ kun\ -2 < x < 2$

Vastauksen pituus: 39 merkkiä.

3.2 Määritä funktion $f(x)$ ääriarvot ja niiden laatu. **6 p.**

Kohdan 3.1 merkkikaaviosta nähdään että maksimikohta on 2 ja minimikohta on -2.

Maksimi on siis $f(2) = -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - 1 = -\frac{8}{3} + 7 = \frac{13}{3}$ ja

minimi on $f(-2) = -\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2) - 1 = \frac{8}{3} - 9 = -\frac{19}{3}$

4. Parametrin määrittäminen 12 p.

Millä parametrin a arvolla funktion $f(x) = \frac{x^2+ax-x-a}{x-1}$ raja-arvo kohdassa $x = 1$ on 5 ?

Jotta funktiolla olisi raja-arvo kohdassa 1, niin x = 1 pitää olla myös osoittajan nollakohta eli siellä pitää olla sama tekijä kuin nimittäjässä.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x + ax - a}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1) + a(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+a) \quad = 5,\ kun\ a = 4$$

Osoittajasta saadaan siis yhteiseksi tekijäksi $x - 1$ mikä sitten supistuu pois.

5. Aidosti vähenevä funktio 12 p.

Osoita, että funktio $g(x) = -\frac{x^3}{4x^2+1}$ on kaikkialla aidosti vähenevä.

Derivoidaan g:

$$g'(x) = -\frac{3x^2(4x^2+1) - 8x(x^3)}{(4x^2+1)^2} = -\frac{4x^4+3x^2}{(4x^2+1)^2}$$

$4x^4 + 3x^2 \geq 0,\ kun\ x \in \mathbb{R}$ (parillisten potenssien summa on aina positiivinen tai 0) , ainoa nollalohta on 0. Tästä seuraa että koko lauseke $g'(x)$ on aina negatiivinen tai yhdessä kohdassa 0.

Kun derivaatta on negatiivinen niin funktio on aidosti vähenevä, x = 0 on terassikohta.

6. Vesi-ilmapallo 12 p.

Konsta heittää vesi-ilmapallon kohti seitsemän metrin päässä sijaitsevaa puuta, jolloin pallon lentorataa voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = -0{,}029x^2 + 0{,}114x + 1{,}800$. Muuttuja x on pallon maanpinnan suuntainen etäisyys (metreinä) Konstasta ja $f(x)$ on pallon korkeus metreinä.

6.1 Määritä pallon lentoradalle piirretyn tangentin yhtälö pisteessä, jossa pallo iskeytyy puuhun. Anna tangentin kulmakerroin ja vakiotermi kolmen desimaalin tarkkuudella. 6 p.

Tangentin kulmakerroin $k = f'(7)$ ja radan y-koordinaatti on $f(7) = 1{,}177$

-0,029*(7^2)+0,114*7+1,800
= 1,177

$f'(x) = \ -0{,}058x + 0{,}114$, $k = -0{,}292$

Tangentin yhtälö saadaan $y - y_0 = k(x - x_0)$, joten $y - 1{,}177 = -0{,}292(x-7) \ \Leftrightarrow\ y = -0{,}292x + 3{,}221$

6.2 Missä kulmassa vesi-ilmapallo törmää puuhun? Anna vastaus pallon lentoradan ja puun pystysuoran pinnan välisenä kulmana asteen kymmenyksen tarkkuudella. 6 p.

Tangenttisuoran suuntakulma saadaan kun tiedetään että $\tan\alpha = k$ (kulma on x-akselin ja suoran välinen kulma).

$\tan\alpha = -0{,}292 \ \Leftrightarrow\ \alpha = \arctan\ -0{,}292 \ \Leftrightarrow\ \alpha\ = -16{,}27°$

Kysytty kulma saadaan $90° - 16{,}27° = 73{,}7°$

7. Polynomifunktion määrittäminen 12 p.

Määritä se kolmannen asteen polynomifunktio, jolla on paikallinen maksimi kohdassa $f(2) = 4$ ja paikallinen minimi $f(6) = -4$.

Olkoon funktio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtie, eli $f'(2) = 0 \ ja \ f'(6) = 0$ toisaalta tiedetään myös että $f(2) = 4 \ ja \ f(6) = -4$. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Muodostetaan neljän tuntemattoman yhtälöryhmä ja ratkaistaan cas-laskimella

Define $f(x)=a*x^3+b*x^2+c*x+d$

done

Define $g(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$

done

$$\left.\begin{cases} f(2)=4 \\ f(6)=-4 \\ g(2)=0 \\ g(6)=0 \end{cases}\right|_{a,b,c,d}$$

$$\left\{a=\frac{1}{4}, b=-3, c=9, d=-4\right\}$$

Laskimessa

$g(x) = f'(x)$

Vastaus: $a = \frac{1}{4}, \ b = -3, \ c = 9, \ d = -4$

8. Derivaatan määritelmä 12 p.

Määritä erotusosamäärää käyttäen funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$ derivaatta kohdassa 3.

Derivaatan määritelmän mukaan:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3+1}}{x - 3}$$ Ratkaistaan cas-laskimella

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3+1}}{x-3}\right)$$

$$-\frac{1}{16}$$

$$f'(3) = -\frac{1}{16}$$

9. Säilyketölkki 12 p.

Pellistä valmistetaan suoran ympyrälieriön muotoinen 2,5 desilitran vetoinen säilyketölkki. Miten tölkin mitat kannattaa valita, jotta sen valmistamiseen kuluu mahdollisimman vähän peltiä? Anna mitat millimetrin tarkkuudella.

Olkoon tölkin korkeus h ja pohjan säde r. Tilavuus $V = 2{,}5\ dl\ = 0{,}25\ l\ = 250\ cm^3$.

Muodostetaan tilavuuden ja kokonaispinta-alan yhtälöt.

$250 = \pi r^2 h\ ja\ A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Ratkaistaan pinta-alasta h ja sijoitetaan se pinta-alan lausekkeeseen.

$h = \frac{250}{\pi r^2} \Rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500}{r}, r > 0$, Etsitään pinta-alan pienin arvo derivaatan avulla:

Define $A(r)=2\pi r^2+\frac{500}{r}$

done

$\frac{d}{dr}(A(r))$

$\frac{4\cdot r^3\cdot\pi-500}{r^2}$

solve($\frac{d}{dr}(A(r))=0$, r

{r=3.413920316}

$\frac{4\cdot r^3\cdot\pi-500}{r^2}|r=3$

-17.85644371

$\frac{4\cdot r^3\cdot\pi-500}{r^2}|r=4$

19.01548246

$h=\frac{250}{\pi*3.41392031^2}$

h=6.827840658

Säde 3,4 cm on minimikohta jolloin korkeudeksi tulee 6,8 cm.

10. Differentiaalilaskennan väliarvolause 12 p.

Tarkastellaan suljetulla välillä $[a,\ b]$ määriteltyä jatkuvaa funktiota f, joka on derivoituva avoimella välillä $(a,\ b)$.

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen mukaan tällöin on olemassa sellainen luku c, että $a < c < b$ ja $f'\ (c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Toisin sanoen on olemassa sellainen luku $c \in (a,\ b)$, että funktion f hetkellinen muutosnopeus pisteessä c on yhtä suuri kuin funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[a,\ b]$.

Etsi, käyttämättä piirto-ohjelmaa apuna, differentiaalilaskennan väliarvolauseen mukainen luku c, kun $f\ (x) = x^3 - 2x^2$ ja $[a,\ b] = [-1,\ 1]$.

Funktio on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva välillä $[-1,1]$.

$f'\ (x) = 3x^2 - 4x$ Ratkaistaan yhtälö $f'\ (c) = \dfrac{f\ (1) - f\ (-1)}{1-(-1)}$ cas-laskimella

Define $\mathrm{f(x)=x^3-2x^2}$

done

Define $\mathrm{g(x)=\frac{d}{dx}(f(x))}$

done

solve$\mathrm{(g(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{2},c}$

$\{c=-0.215250437, c=1.54858377\}$

solve$\mathrm{(g(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{2},c}$

$\left\{c=\frac{-\sqrt{7}}{3}+\frac{2}{3}, c=\frac{\sqrt{7}}{3}+\frac{2}{3}\right\}$

Jälkimmäinen c ei kelpaa, joten

Vastaus: $c = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$