

MAA6 koe (loppuosa) vastaukset

1. Yhdistetty funktio ja sen derivointi 12 p.

Olkoon $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2x + 1$.

1.1 Määritä $(f \circ g)(x)$ ja $(f \circ g)'(x)$ 4 p.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ (f \circ g)'(x) &= 8x + 4\end{aligned}$$

1.2 Määritä $(g \circ f)(x)$ ja $(g \circ f)'(x)$

4 p.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= 2x^2 + 1 \\ (g \circ f)'(x) &= 4x\end{aligned}$$

1.3 Ratkaise yhtälö $(f \circ g)'(x) = (g \circ f)'(x)$ 4 p.

$$8x + 4 = 4x \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$$

2. Funktioiden derivoiteja

12 p.

Derivoi annettu funktio

2.1 $f(x) = 4 \cos \frac{x}{2} + \sin 3x$ 3 p.

$$f'(x) = 4 \cdot \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \right) + 3 \cos 3x = -2 \sin \frac{x}{2} + 3 \cos 3x$$

2.2 $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos 2x$ 3 p.

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x + \frac{1}{2} \cdot (-\sin(2x) \cdot 2) = 2 \sin x \cos x - \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

2.3 $f(x) = e^{2x} + e^{3x} \ln x$ 3 p.

$$f'(x) = 2e^{2x} + 3e^{3x} \ln x + e^{3x} \cdot \frac{1}{x} = 2e^{2x} + e^{3x} \left(3 \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

2.4 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 3 p.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

3. Kuvaajan ja y-akselin välinen kulma 12 p.

Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella funktion $f(x) = 5 \cos(7 - 2x) + 13$ kuvaajan ja y-akselin välinen kulma.

y-akselilla $x = 0$, pitää ensin selvittää funktion derivaatan arvo kohdassa 0, jotta saadaan tangentin kulmakerroin.

$$f'(x) = 5(-\sin(7 - 2x) \cdot (-2)) = 10 \sin(7 - 2x)$$

$$f'(0) = 10 \sin 7 \approx 6,569 = k \text{ tangenttisuoran kulmakerroin}$$

Suuntakulma saadaan $\tan \alpha = k$, josta $\alpha = \arctan(6,569) = 81,34^\circ$

Kuvaajan ja y-akselin välinen kulma on siis $90^\circ - 81,34^\circ = 8,66^\circ \approx 8,7^\circ$

4. Aidosti kasvava funktio 12 p.

Osoita, että funktio $f(x) = \ln 2x + \ln(x^2 + 1)$ on aidosti kasvava.

Pitää osoittaa että funktion derivaatta saa positiivisia arvoja.

Mj. $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$, sillä $x^2 + 1 > 0$ kaikilla x:n arvoilla

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ lavennetaan samannimisiksi}$$

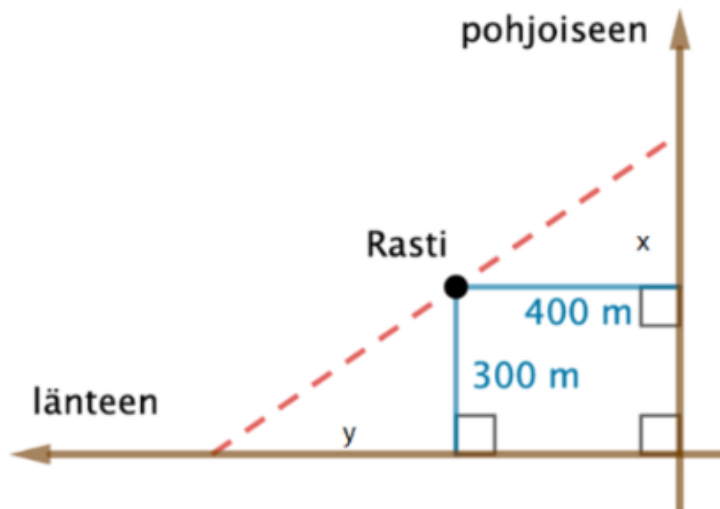
$$\frac{x^2 + 1 + 2x^2}{x(x^2 + 1)} = \frac{3x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} \text{ nimittäjä saa määruttelyjoukossa vain positiivisia arvoja ja osoittaja on kaikkialla } > 0,$$

jolloin derivaatta saa kaikkialla vain positiivisia arvoja eli $f(x)$ on aidosti kasvava.

5. Suunistusta 12 p.

Suunnistusrastin etäisyys pohjoiseen kulkevasta polusta on 400 m ja länteen kulkevasta polusta 300 m. Suunnistaja aikoo juosta rastin kautta suoraan polulta toiselle. Kuinka pitkä on lyhin mahdollinen suora reitti? Missä kohdassa tämä reitti erkanee pohjoiseen kulkevalta polulta?

Merkitään pohjoiseen vievän polun osaa x:llä ja länteen vievän polun osaa y:llä



Tällöin $\frac{x}{400} = \frac{300}{y} \Leftrightarrow y = \frac{120000}{x}$. Muodostetaan funktio reitille

$$f(x) = \sqrt{(x+300)^2 + (400+y)^2} = \sqrt{(x+300)^2 + \left(400 + \frac{120000}{x}\right)^2}$$

, derivoidaan funktio ja etsitään derivaatan nollakohdat, tutkitaan ääriarvon laatu (minimi) ja lasketaan ääriarvo.

```

Define f(x)=sqrt((x+300)^2+(400+120000/x)^2)
done
d/dx (f(x)) | x>0
x^3-48000000
x^2*sqrt(x^2+160000)
solve(d/dx (f(x))=0)
{x=363.4241186}
d/dx (f(x)) | x=360
-0.01927058898
d/dx (f(x)) | x=370
0.03556548235
f(363.4241186)
986.5662555
    
```

Lyhin reitti on siis 990 m ja reitti erkanee 660 m:n päässä risteyksestä pohjoisen suuntaan.

6. Lääkkeen määrä 12 p.

Erään elimistössä olevan lääkkeen määrä vähenee tunnissa 7,0 %. Lääkeaineen määrä alussa on 25 mg.

6.1 2 p.

Muodosta funktio, joka ilmaisee elimistössä olevan lääkeaineen määrän t tunnin kuluttua.

Kun lääke vähenee 7 % tunnissa niin määrä tulee 0,93-kertaiseksi tunnissa, jolloin lääkkeen määrää kuvaa funktio $f(t) = 25 \cdot 0,93^t$

6.2 2 p.

Laske elimistössä olevan lääkeaineen määrä vuorokauden kuluttua.

Lasketaan $f(24) = 25 \cdot 0,93^{24} = 4,38 \approx 4,4 \text{ mg}$

6.3 4 p.

Millä nopeudella lääkeaineen määrä vähenee vuorokauden kuluttua?

Muutosnopeutta kuvaa derivaatta, joten lasketaan

$f'(24)$

Define $f(t)=25*0.93^t$

done

$\frac{d}{dt}(f(t))$

$-1.814267321 \cdot 0.93^t$

$\frac{d}{dt}(f(t)) | t=24$

-0.3179011092

Lääkkeen määrä vähenee n.0,32 mg/tunti

6.4 4 p.

Mikä on lääkeaineen määrän puolintumisaika eli missä ajassa elimistössä olevan lääkeaineen määrä puolittuu?

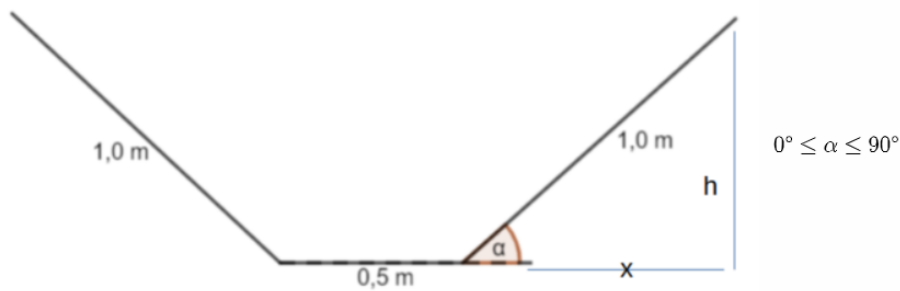
Ratkaistaan yhtälö

$$a \cdot 0,93^t = 0,5a \quad || : a \Leftrightarrow t = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,93} = 9,55$$

Lääkeaineen määrä puolittuu 9 tunnissa ja 33 minuutissa.

7. Ojankaivuuta 12 p.

Tarkoituksena on kaivaa oja minkä poikkileikkaus on symmetrisen puolisuunnikkaan muotoinen. Määritä kulma α siten, että ojan poikkileikkauksen pinta-ala on mahdollisimman suuri.



Kuvassa $h = \sin \alpha$ ja $x = \cos \alpha$

Puolisuunnikkaan pinta-ala $A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{0,5 + 0,5 + 2 \cos \alpha}{2} \cdot \sin \alpha = (0,5 + \cos \alpha) \sin \alpha = 0,5 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$

Derivoidaan lauseke, etsitään derivaatan nollakohdat ja tutkitaan ääriarvon laatu (maksimi)

```

define A(x)=0.5sin(x)+sin(x)*cos(x)
done
d(A(x))
2*(cos(x))^2*pi-2*(sin(x))^2*pi+cos(x)*pi
360
solve(d(A(x))=0
{x=360*constn(1)-147.4657734, x=360*constn(2)+147.4657734, x=360*constn(3)-53.62480773, x=360*constn(4)+53.62480773}
d(A(x))|x=50
2.57864765E-3
d(A(x))|x=60
-4.36332313E-3

```

Pinta-ala saa siis suurimman arvonsa kun $\alpha = 54^\circ$

8. Parametritehtävä 12 p.

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3 \cdot e^{a \cdot x} + b$. Tiedetään, että funktio f saa minimiarvonsa 0 kohdassa $x = -3$.

Määritä lukujen a ja b tarkat arvot.

Funktion minimikohta on sen derivaatan nollakohta eli $f'(-3) = 0$ ja toisaalta tiedetään että $f(-3) = 0$
Määritellään laskimeen $f(x)$ ja $g(x) = f'(x)$, jonka jälkeen ratkaistaan yhtälöpari

```

Define f(x)=x^3*e^a*x+b
done
Define g(x)=d(f(x))
done
g(x)
a*x^3*e^a*x+3*x^2*e^a*x
{f(-3)=0
g(-3)=0|a, b
{a=1, b=27*e^-3}

```

Vast: $a = 1, b = \frac{27}{e^3}$