18.12 Derivoi.

a) $\sin 2x \cos x$ **b)** $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

18.13 Määritä funktion $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{2} + \cos x$ derivaattafunktion nollakohdat.

12 a) $(fg)' = f'g + fg'$

$D(\sin 2x \cos x) = 2\cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot (-\sin x)$

$= 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

$D\dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{-\overbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}^{=1}}{\sin^2 x}$

$= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

13 $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\cos(2x) \cdot 2 - \sin x$

$= \cos(2x) - \sin x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x - \sin x$

$-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$ | Ratk. kaava

$a = -2$, $b = -1$, $c = 1$

$\sin x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{1 \pm 3}{-4}$

$\sin x = -1 \quad \vee \quad \sin x = \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \dfrac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) + n \cdot 2\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

$= \dfrac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

18.17 Funktion $f(x) = 2\sin x + \cos^2 x$ kuvaajalle piirretään tangentti kuvaajan ja y-akselin leikkauspisteeseen. Määritä tangentin yhtälö.

y-akselilla $x = 0$

y-koord. $f(0) = 2\underbrace{\sin 0}_{=0} + (\underbrace{\cos 0}_{=1})^2 = 1$ } piste $(0, 1)$

Tangentin kulmakerroin $k = f'(0)$

$f'(x) = 2\cos x + 2(\cos x)\cdot(-\sin x)$

$f'(0) = 2\underbrace{\cos 0}_{1} + 2(\underbrace{\cos 0}_{1})\cdot(-\underbrace{\sin 0}_{=0}) = 2 = k$

Tangentin yhtälö:

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$y - 1 = 2(x - 0)$

$y - 1 = 2x$

$\underline{y = 2x + 1}$

19.9 Määritä funktion $f(x) = 6\sin\frac{x}{2} - 3\cos x$ suurin ja pienin arvo.

$\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\sin\frac{1}{2}x}$:n jakso on $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Tarkastellaan ääriarvoja välillä $[0, 4\pi]$

$f'(x) = 6\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot(-\sin x)$

$= 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3\sin x$

$\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) \to 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$= 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) (= 0)$, kun

$3\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \vee \quad 1 + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \;\|\cdot 2 \quad \vee \quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \;\|\cdot 2 \quad \vee \quad \frac{x}{2} = \underbrace{\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{5\pi}{6}} + n\cdot 2\pi \;\|\cdot 2, \; n \in \mathbb{Z}$

$x = \pm\pi + n\cdot 4\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + n\cdot 4\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{3} + n\cdot 4\pi \quad \Rightarrow$ kulmat välillä $[0, 4\pi]$: $\pi, 3\pi, \frac{11\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$f(0) =$

$f(\pi) =$

$f(3\pi) =$

$f\left(\frac{11\pi}{3}\right) =$

$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

$f(4\pi) =$