15.21 Määritä derivaattaa käyttäen funktion $f(x) = x^2(x-7)^5$ suurin ja pienin arvo välillä $[0, 10]$.

Tutkitaan derivaatan avulla

$$\frac{d}{dx}\left(x^2(x-7)^5\right)$$

$$7 \cdot x^6 - 210 \cdot x^5 + 2450 \cdot x^4 - 13720 \cdot x^3 + 36015 \cdot x^2 - 33614 \cdot x \quad = f'(x)$$

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(x^2(x-7)^5\right)=0\right)$$

Derivaatan nollakohdat

$$\{x=0, x=2, x=7\}$$

f'(x):n merkki

$$7 \cdot x^6 - 210 \cdot x^5 + 2450 \cdot x^4 - 13720 \cdot x^3 + 36015 \cdot x^2 - 33614 \cdot x \,|\, x=-1$$

$$86016$$

$$7 \cdot x^6 - 210 \cdot x^5 + 2450 \cdot x^4 - 13720 \cdot x^3 + 36015 \cdot x^2 - 33614 \cdot x \,|\, x=1$$

$$-9072$$

$$7 \cdot x^6 - 210 \cdot x^5 + 2450 \cdot x^4 - 13720 \cdot x^3 + 36015 \cdot x^2 - 33614 \cdot x \,|\, x=4$$

$$4536$$

$$7 \cdot x^6 - 210 \cdot x^5 + 2450 \cdot x^4 - 13720 \cdot x^3 + 36015 \cdot x^2 - 33614 \cdot x \,|\, x=8$$

$$336$$

$$x^2(x-7)^5 \,|\, x=0$$

$$0$$

$$x^2(x-7)^5 \,|\, x=2$$

$$-12500 \quad \leftarrow \text{pienin arvo } f(2)$$

$$x^2(x-7)^5 \,|\, x=10$$

$$24300 \quad \leftarrow \text{suurin arvo } f(10)$$

Kulkukaavio:

		0		2		7		10	
$f'(x)$	+		−		+		+		
$f(x)$			↘		↗		↗		
				min kohta		terassi kohta			

Jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

$$9.\ D(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

Juurifunktion derivaatta

- Juuri $\sqrt[n]{x}$ tulkitaan potenssiksi $x^{\frac{1}{n}}$

Esim. $D\sqrt[3]{x} = Dx^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0$

Esim. $D\sqrt[6]{4x-3} = D\underbrace{(4x-3)^{\frac{1}{6}}}_{\text{yhd. funktio}} = \frac{1}{6}(4x-3)^{-\frac{5}{6}} \cdot 4 = \frac{4}{6}(4x-3)^{-\frac{5}{6}} = \frac{2}{3(\sqrt[6]{4x-3})^5}$

Mj. $4x-3 \geq 0$

$4x \geq 3$

$x \geq \frac{3}{4}$

$g(x) = x^{\frac{1}{6}}, \quad f(x) = 4x-3$

$g'(x) = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}, \quad f'(x) = 4$

$g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$x > \frac{3}{4}$

(*) $\frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$

16.4 Derivoi funktio.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$, kun $x > 0$

b) $g(x) = \dfrac{4x+8}{\sqrt{4x+8}}$, kun $x > -2$

b) $\dfrac{4x+8}{\sqrt{4x+8}} = \dfrac{(\sqrt{4x+8})^2}{\cancel{\sqrt{4x+8}}} = \sqrt{4x+8}$