

3.16 Pankkitilin vuotuinen nettokorkokanta on 3,00 %. Tilille talletetaan peräkkäisten vuosien alussa joka vuosi 5000 euroa. Olkoon  $a_n$  talletuksen arvo  $n$ :n vuoden alussa, kun tilille on lisätty edellisen vuoden korko ja tehty uusi 5000 euron talletus ( $a_1 = 5000$ ).

- a) Määritä lukujonon ( $a_n$ ) rekursiosääntö.  
 b) Kuinka suuri pääoma on kahdeksannen vuoden alussa?  
 c) Kuinka monennen vuoden alussa pääoman suuruus on ensimmäisen kerran yli 100 000 euroa?

$$a_1 = 5000$$

$$a_2 = 5000 + 5000 \cdot 1,03$$

$$a_3 = 5000 + 5000 \cdot 1,03 + 5000 \cdot 1,03^2$$

$$b) a_8 = 5000 + 5000 \cdot 1,03 + \dots + 5000 \cdot 1,03^7 = \frac{5000(1-1,03^8)}{1-1,03} = \underline{\underline{44\,461,68\text{€}}}$$

$$c) \text{Ratkaistaan yhtälö: } \frac{5000(1-1,03^m)}{1-1,03} = 100\,000$$

$$m = 15,9$$

V: 16 vuoden kuluttua

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 5000 \\ a_m = 5000 + a_{m-1} \cdot 1,03 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Geometrisen
$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$
$a_n = a_1 q^{n-1}$
$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ jos } q \neq 1$

## 3.21



Lukujono  $(a_n)$  määritellään rekursiivisesti kaavoilla  $a_1 = 1$ ,  $a_{2n} = a_n$  ja  $a_{2n+1} = 1 - a_n$ , kun  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Määritä lukujonon seitsemäs jäsen  $a_7$  ja 2021. jäsen  $a_{2021}$ .  
[yo pitkä k2021]

$$a_7 = a_{2 \cdot 3 + 1} = 1 - a_3$$

$$= 1 - a_{2 \cdot 1 + 1}$$

$$= 1 - (1 - a_1)$$

$$= 1 - (1 - 1) = \underline{\underline{1}}$$

$$= 1 - a_{\frac{31}{2 \cdot 15 + 1}}$$

$$= 1 - (1 - a_{15}) = a_{\frac{15}{2 \cdot 7 + 1}}$$

$$= 1 - a_7 = \underline{\underline{1 - 1 = 0}}$$

$$a_{2021} = a_{2 \cdot 1010 + 1} = 1 - a_{1010}$$

$$= 1 - a_{2 \cdot 505}$$

$$= 1 - a_{505}$$

$$= 1 - a_{2 \cdot 252 + 1}$$

$$= 1 - (1 - a_{252})$$

$$= 1 - 1 + a_{\frac{252}{2 \cdot 126}}$$

$$= a_{\frac{126}{2 \cdot 63}}$$

$$= a_{\frac{63}{2 \cdot 31 + 1}}$$

# Aritmeettinen lukujono

- edelliseen jäseneseen lisätään aina sama luku  $d$  (differenssi)

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, \dots, a_m = a_1 + (m-1)d$$

yleinen jäsen

Esim.  $a_1 = 12, a_2 = 7, a_3 = 2, \dots$

$a_m$   
a) Määritä jonon sadas jäsen

$a_{100}$ . b) Onko  $-1000$  jonon jäsen?

Tyypissä on aritmeettinen lukujono,  $d = -5$   
yleinen jäsen  $a_m = a_1 + (m-1)d$

$$a_{100} = 12 + (100-1) \cdot (-5) = \underline{\underline{-483}}$$

$$b) -1000 = 12 + (m-1) \cdot (-5)$$

$$-1012 = -5m + 1$$

$$-1013 = -5m \quad | : (-5)$$

$$m = 203,4 \notin \mathbb{N}$$

$\forall$  ei ole

## Aritmeettinen summa

Esim.  $S = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20$  | 7 kpl,  $d=3$

$$+ S = 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2$$

---

$$2S = 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22 + 22$$

$$2S = 7(2 + 20)$$

$$S = 7 \cdot \frac{2 + 20}{2} = 77$$

Aritmeettinen summa:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$   <sup>$n$  kpl.</sup>

$$\sum_{i=1}^n a_i = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Aritmeettinen	
jono	$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$
yleinen termi	$a_n = a_1 + (n - 1)d$
summa	$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = n \frac{a_1 + a_n}{2}$