MAA5 26.9.2024 (Ratkaisut)

Sisällys

Osa 1: A-osa

Vastaa kolmeen tehtävään.

1. Monivalinta 12 p.

Oikeasta vaihtoehdosta saa 2p. Vääristä vaihtoehdoista saa 0p.

1.1 Olkoon $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Paljonko on $\cos\alpha$, jos $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ eli 2. neljännekseen yksikköympyrässä? **2 p.**

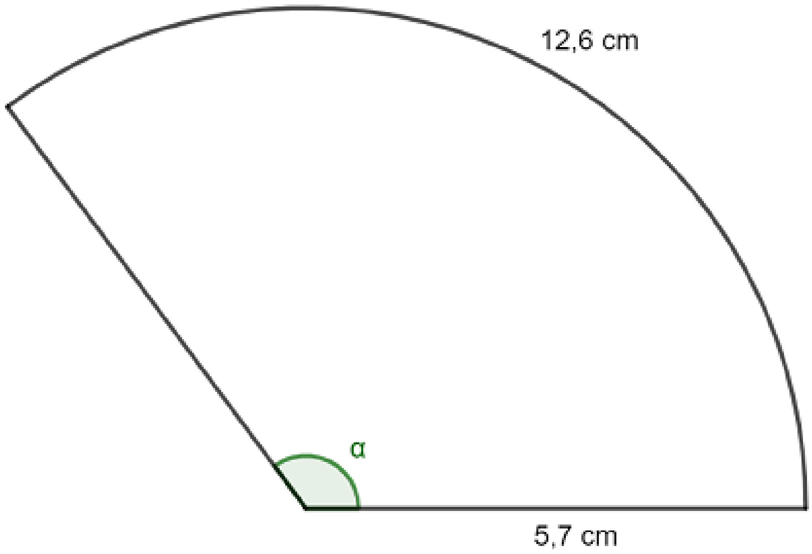
PERUSTELU
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ siis $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

- ○ $\frac{1}{2}$
- ○ $-\frac{1}{2}$
- ○ Yksikään muu vaihtoehto ei ole totta.

- ○ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ○ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ○ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.2 Kulman α suuruus radiaaneina on

2 p.



PERUSTELU

$\alpha = \frac{b}{r}$

$= \frac{12{,}6\ cm}{5{,}7\ cm} = 2{,}2105...$

- ○ $0{,}03$
- ○ $2{,}21$
- ○ $0{,}45$
- ○ $0{,}07$
- ○ $17{,}9$
- ○ $39{,}57$

1.3
Olkoon $x > 0$. Mikä on lausekkeen $\frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot x^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[5]{x^2} \cdot x}$ sievennetty muoto? **2 p.**

PERUSTELU

$\frac{\sqrt[3]{x^4} \cdot x^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[5]{x^2} \cdot x} = \frac{x^{\frac{4}{3}+\frac{2}{5}}}{x^{\frac{2}{5}+1}} = \frac{x^{\frac{26}{15}}}{x^{\frac{7}{5}}} = x^{\frac{26}{15}-\frac{21}{15}} = x^{\frac{1}{3}}$

- ○ Yksikään muu vaihtoehto ei ole totta.
- ○ $x^{\frac{4}{15}}$
- ○ $x^{\frac{2}{5}}$
- ○ $x^{\frac{2}{15}}$
- ○ $x^{\frac{1}{2}}$
- ○ $x^{\frac{1}{3}}$

1.4 Eksponenttifunktio $f(x) = (2k-1)^x$, $x \in \mathbb{R}$ on aidosti kasvava, kun **2 p.**

PERUSTELU
Jotta funktio on aidosti kasvava, on kantaluvun $2k - 1 > 1$ eli $k > 1$.

- ○ $k < 2$
- ○ $k < 0$
- ○ $k < 1$
- ○ $k > 1$
- ○ $k \neq 1$
- ○ $k > 0$

1.5 Mikä on logaritmiesityksen $\log_2 \frac{625}{10000}$ sievennetty arvo? **2 p.**

PERUSTELU
$\log_2 \frac{625}{10000} = \log_2 0{,}0625 = \log_2 2^{-4} = -4$

- ○ $0{,}625$
- ○ -4
- ○ 3
- ○ -2
- ○ Yksikään muu vaihtoehto ei ole totta.
- ○ 625

1.6 Olkoon kulman α kehäpiste $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Mikä on sitä vastaava kulma? **2 p.**

PERUSTELU
Taulukkokirjasta: $\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

- ○ $\alpha = \frac{5\pi}{3}$
- ○ $\alpha = \frac{7\pi}{6}$
- ○ $\alpha = \frac{7\pi}{4}$
- ○ $\alpha = \frac{5\pi}{6}$
- ○ $\alpha = \frac{4\pi}{3}$

2. Yhtälöitä 12 p.

Ratkaise yhtälöt välivaiheet esittäen.

2.1 $4 \cdot 3^{3x-1} = 108$ **3 p.**

RATKAISU

$$4 \cdot 3^{3x-1} = 108 \quad \|: 4$$
$$3^{3x-1} = 27$$
$$3^{3x-1} = 3^3$$
$$3x - 1 = 3$$
$$3x = 4 \quad \|: 3$$
$$x = \frac{4}{3}$$

Vastaus: $x = \frac{4}{3}$

PISTEYTYS
- jaettu puolittain neljällä (1 p.)
- esitetty yhtälön molemmat puolet kantaluvun 3 potenssina (1 p.)
- oikea vastaus (1 p.)

2.2 $2\sin 3x = 1$ **3 p.**

RATKAISU
$2\sin 3x = 1$
$\sin 3x = \frac{1}{2}$
Tästä ratkaisut saadaan taulukkokirjan tarkoista arvoista:
$3x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \ \text{ tai } 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi \ \text{ missä } n \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3} \ \text{ tai } \ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3}$

PISTEYTYS
- Taulukkokirjan tulkinnasta saatu oikein $\frac{\pi}{6}$ 1p
- Ratkaistu kaikki äärettömän monta eri ratkaisua 2p

Jos unohtunut alussa kakkosella jakaminen mutta väärän yhtälön ratkaisu etenee: max 2p
Jos jäänyt maininta $n \in \mathbb{Z}$ pois niin -1p
(Tätä virhettä ei rokoteta uudestaan kohdassa 2.3)
Jos unohtunut jakaa kolmella niin -1p
Jos unohtunut toiset äärettömän monta ratkaisua pois (oikea puoli) niin -1p

2.3 $4\cos x - 1 = -\sqrt{5}$ **3 p.**

RATKAISU
$4\cos x - 1 = -\sqrt{5}$
$4\cos x = 1 - \sqrt{5}$
$\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$
Tästä ratkaisut saadaan taulukkokirjan tarkoista arvoista:
$x = \frac{3\pi}{5} + n2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{3\pi}{5} + n2\pi \ \text{ missä } n \in \mathbb{Z}$

PISTEYTYS
- Yhtälön sieventäminen 1p
- Vasemman puolen vastaukset 1p
- Oikean puolen vastaukset 1p

2.4 $\log_5(2x-1)=3$ **3 p.**

RATKAISU
Määrittelyehto
$2x-1>0$
$2x>1 \quad \|:2$
$x>\frac{1}{2}$

Yhtälön ratkaiseminen
$\log_5(2x-1)=3$
$2x-1=5^3$
$2x-1=125$
$2x=125+1$
$2x=126 \quad \|:2$
$x=63$

Vastaus: $x=63$

PISTEYTYS
- määrittelyehto (1 p.)
- logaritmi vaihdettu kantaluvun 5 potenssimerkinnäksi (1 p.)
- oikea vastaus (1 p.)

3. Sievennä **12 p.**

Sievennä seuraavat lausekkeet, $k>1.$ Perustele vastauksesi esimerkiksi välivaiheilla.

3.1 $\sqrt{64^k}\cdot\sqrt[3]{64^k}$ **4 p.**

RATKAISU
$\sqrt{64^k}\cdot\sqrt[3]{64^k}$
$=64^{\frac{k}{2}}\cdot 64^{\frac{k}{3}}$
$=64^{\frac{3k}{6}}\cdot 64^{\frac{2k}{6}}$
$=64^{\frac{5k}{6}}$
$=\left(\left(\sqrt[6]{64}\right)^5\right)^k$
$=32^k$

PISTEYTYS
- Juuresta murtopotenssimuotoon 1p
- Juurten/murtopotenssien muuttaminen samannimisiksi 1p
- Eksponenttien yhdistäminen 1p
- Sievennys ja vastaus 1p

3.2 $\frac{18^{4k+1}}{81^{2k-1}}$ **4 p.**

RATKAISU

$\frac{18^{4k+1}}{81^{2k-1}}$
$= \frac{18^{4k} \cdot 18}{81^{2k} \cdot 81^{-1}}$
$= 18 \cdot 81 \cdot \frac{18^{4k}}{81^{2k}}$
$= 18 \cdot 81 \cdot \frac{18^{4k}}{9^{4k}}$
$= 18 \cdot 81 \cdot 2^{4k}$
$= 1458 \cdot 16^{k}$

PISTEYTYS

- Eksponenttien sieventäminen (+1 ja -1 pois) 1p
- Muuttaminen samaan eksponenttiin 4k 1p
- Muuttaminen muotoon 16^k 1p
- Sievennys ja vastaus 1p

3.3 $\log_5 10^k - \log_{25} 100^k + \log_{125} 125$ **4 p.**

RATKAISU

$\log_5 10^k - \log_{25} 100^k + \log_{125} 125$
$= k \cdot \log_5 10 - k \cdot \log_{25} 100 + 1$
$= k \cdot \log_5 10 - k \cdot \frac{\log_5 100}{\log_5 25} + 1$
$= k \cdot \log_5 10 - k \cdot \frac{\log_5 100}{2} + 1$
$= k \cdot \log_5 10 - k \cdot \log_5 100^{\frac{1}{2}} + 1$
$= k \cdot \log_5 10 - k \cdot \log_5 10 + 1$
$= 1$

PISTEYTYS

- Viimeisen logaritmin laskeminen 1p
- Keskimmäisen logaritmin sieventely samaan muotoon kuin ensimmäinen 2p
- Vastaus 1p

Jos sievennyksen sijaan laskettu esim laskimella ilman perusteluja $\log_5 10 - \log_{25} 100 = 0$ vähentää 1p pois. Logaritmien yhteenlasku ja vähennys, jossa ei huomioitu eri kantalukuja antaa 0p koko tehtävästä.

4. Trigonometriaa **12 p.**

4.1 Laske $-3\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ käyttäen tarkkoja arvoja. **4 p.**

RATKAISU
$-3\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$
$=-3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
$=-3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

Vastaus: $\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

PISTEYTYS
- vastakulman sini ja kosini (1 p.)
- katsottu taulukosta sinin ja kosinin arvot (1 p.)
- sievennys (1 p.)
- oikea vastaus (1 p.)

4.2 Määritä $\sin 2\alpha$, kun $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ ja $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ **4 p.**

RATKAISU
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
$\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}$
$\sin^2\alpha=\frac{16}{25}\quad\|\sqrt{}$
$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}$
$\sin\alpha=\pm\frac{4}{5}$ huomioidaan $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$
Vastaus: $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$

PISTEYTYS
- trigonometrian peruskaava (1 p.)
- ratkaistu $\sin\alpha$ (1 p.)
- huomioitu sinin merkki (1 p.)
-kaksinkertainen kulma (1p.)

4.3 Määritä funktion $f(x)=3\cos(3x+1)+4$ arvojoukko ja perusjakso. **4 p.**

RATKAISU
Arvojoukko
$-1\leq\cos x\leq 1$
$-1\leq\cos(3x+1)\leq 1\quad\|\cdot 3$
$-3\leq 3\cos(3x+1)\leq 3\quad\|+4$
$-3+4\leq 3\cos(3x+1)+4\leq 3+4$
$1\leq 3\cos(3x+1)+4\leq 7$

Perusjakso
Funktion $\cos x$ perusjakso on 2π, funktion $f(x) = 3\cos(3x+1)+4$ perusjakso $\frac{2\pi}{3}$.
perustelua ei vaadita
$f(x) = 3\cos(3x+1)+4$
$= 3\cos(3x+1+2\pi)+4$
$= 3\cos\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+1\right)+4 = f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

Vastaus: Arvojoukko $[1,\ 7]$ ja perusjakso $\frac{2\pi}{3}$.

PISTEYTYS
- todettu $\cos(3x+1)$ arvojoukon kuuluvan välille $[-1,\ 1]$ (1 p.)
- todettu $3\cos(3x+1)$ arvojoukon kuuluvan välille $[-3,\ 3]$ (1 p.)
- todettu $3\cos(3x+1)+4$ arvojoukon kuuluvan välille $[1,\ 7]$ (1 p.)
- perusjakso oikein (1 p.)

Voit käydä tarkastelemassa A-osan vastauksiasi nyt.
Palautettuasi A-osan et voi enää muokata A-osan vastauksia.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit palata kokeeseen jatkamaan tehtäviin vastaamista.

...

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöösi palautettuasi A-osan.

Palauta A-osa

Osa 2: B1-osa

Vastaa kahteen tehtävään.

5. Tartuntamäärien mallinnus 12 p.

Ohessa on annettu taulukko (sekä libreoffice calcin tiedostona, että geogebran tiedostona), joka kuvaa koronaviruksen tautilukuja eräässä yhteisössä. Huomaa, että aineistossa ei ole päivältä 6 saatu tietoa.

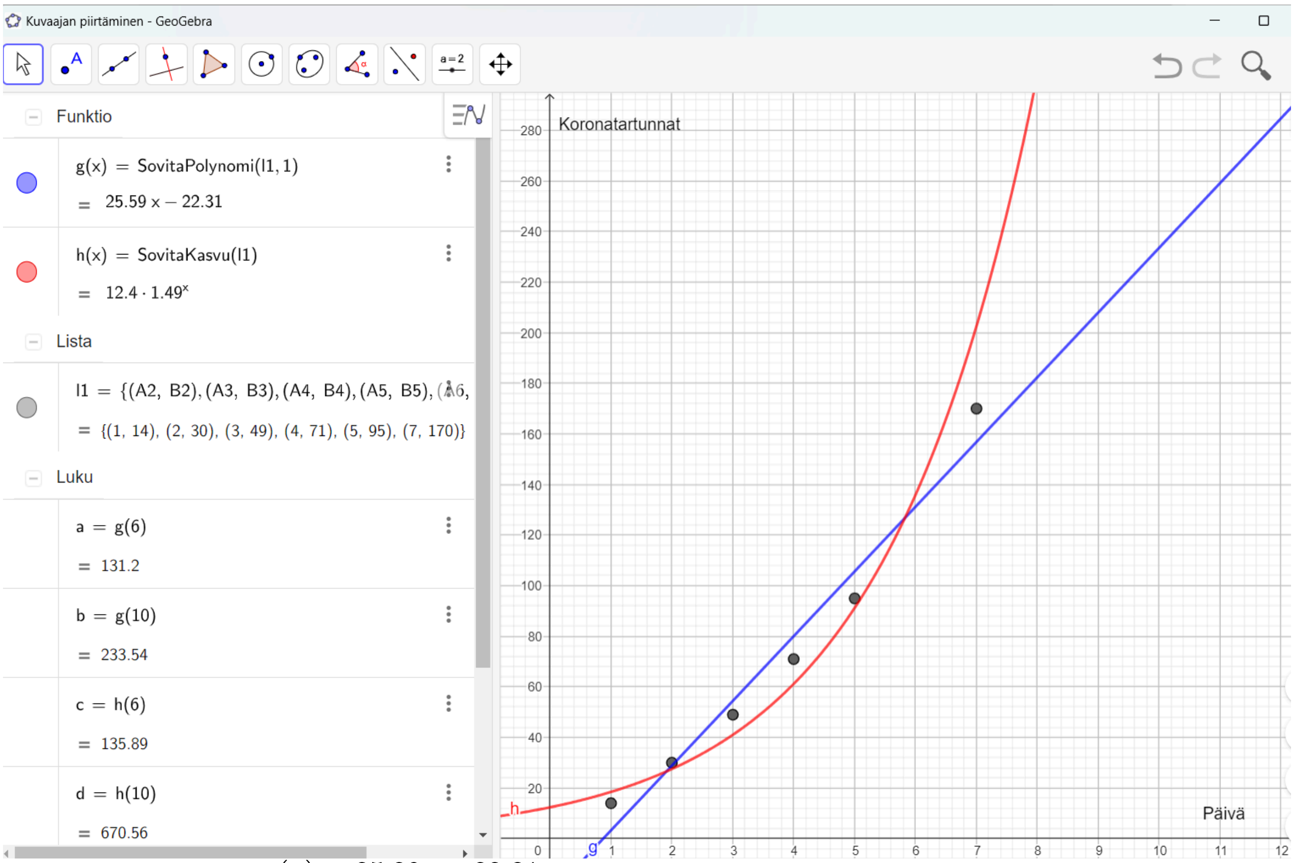
Päivä	Koronatartunnat
1	14
2	30
3	49
4	71
5	95
7	170

Aineisto

5.A Korona-aineisto

5.1 Tee aineistosta sekä lineaarinen että eksponentiaalinen malli, missä muuttujana x toimii päivien lukumäärä. Anna molemmista malleista kuvat, sekä funktiot jotka kuvaavat tartuntamäärää. **6 p.**

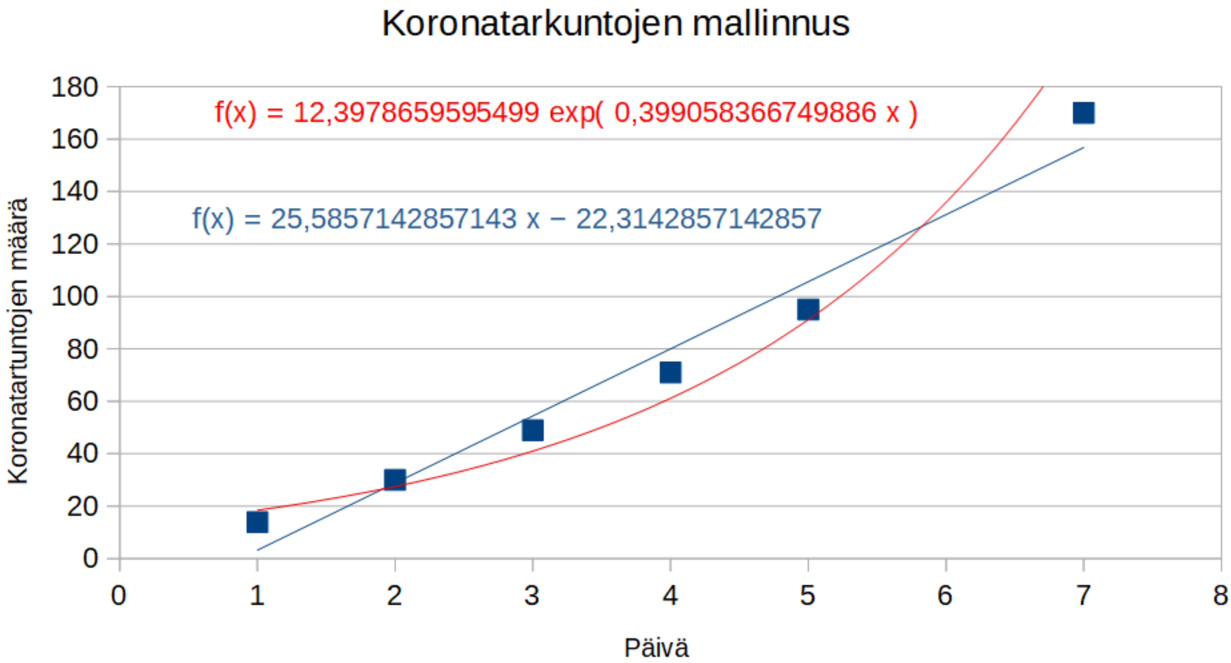
RATKAISU



Lineaarinen mallinnus: $g\left(x\right)=25{,}29x-22{,}31$

Eksponentiaalinen mallinnus: $h\left(x\right)=12{,}4\cdot1{,}49^{x}$

(Kokeenlaatijan malliratkaisu:



Lineaarinen mallinnus: $f(x) = 25{,}5857x - 22{,}3142$
Eksponentiaalinen mallinnus: $f(x) = 12{,}3979 \cdot e^{0{,}3991x}$)

PISTEYTYS
- Oikeat pisteet oikeanlaisessa kaaviossa 2p
- Oikein muotoiltu, siisti ja otsikoitu kaavio 1p
- Oikein muodostetut mallit/kuvaajat 2p
- Oikein annetut funktiot 1p

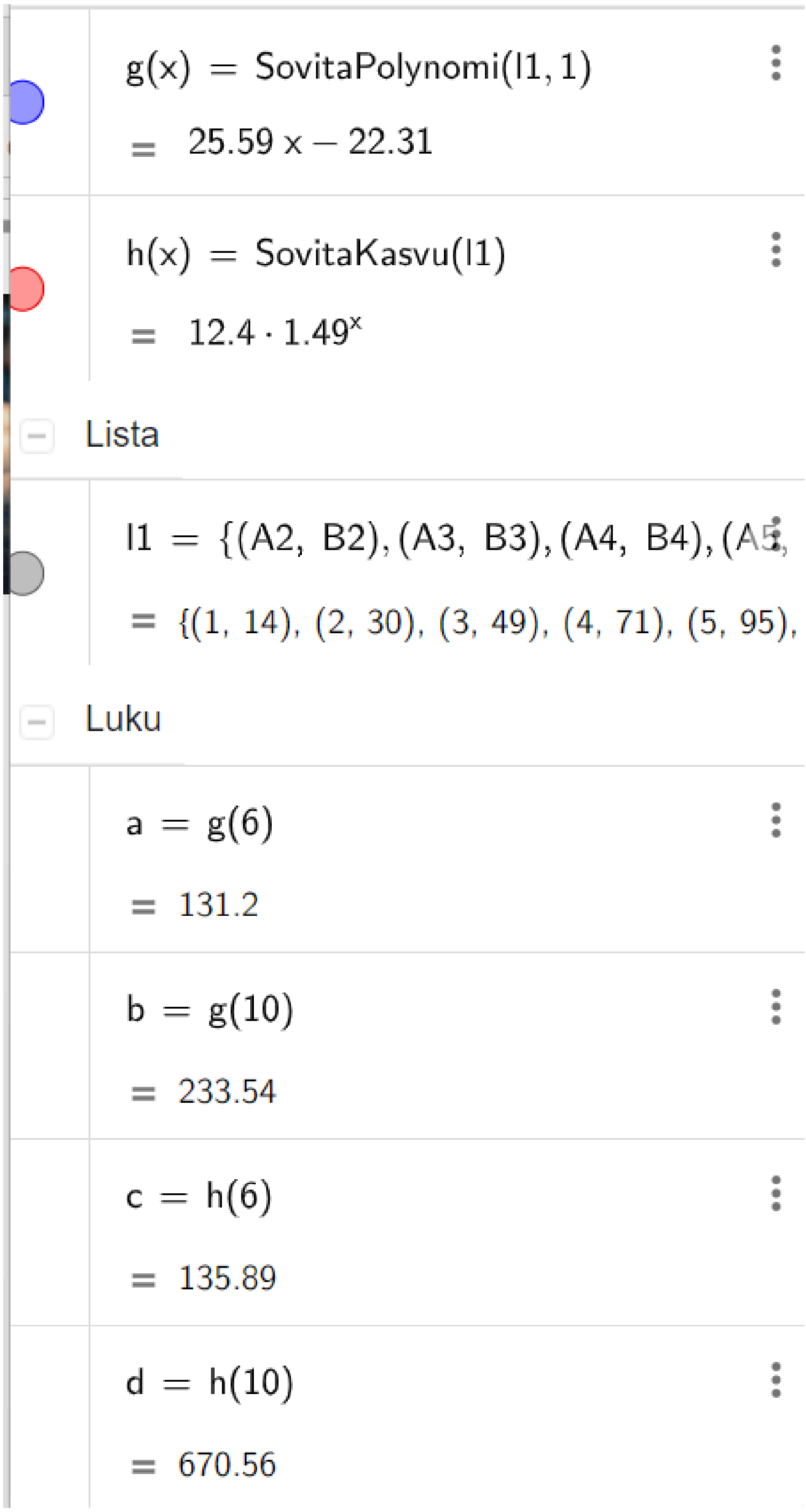
Funktiot voi olla kuvassa suoraan ilman erillistä kirjoittamista, jos ne näkyvät selvästi. Mallinnuksen likiarvoja voi pyöristää, kunhan tarkkuus ei liikaa kärsi.

5.2 Vertaile ja arvioi, kumpi mallinnuksista on parempi pelkän mittausdatan perusteella.
Minkälaisen määrän tartuntoja molemmat mallit ennustavat päivälle 6 ja päivälle 10?
Arvioi, mitä vaikutuksia kyseisten mallien valinnalla on epidemiatilanteessa, kun pyritään miettimään sopivia toimenpiteitä väestön suojaamiseen virukselta. **6 p.**

RATKAISU
Mallinnukset ovat molemmat melko hyviä, sillä ne menevät läheltä annettuja pisteitä. Jos viimeisen pisteen (pv 7) jättää huomioimatta, niin havaintopisteet näyttäisivät menevän lähempänä lineaarista mallia. Vaikkei pistettä jättäisi huomioimatta, ovat pisteet lähempänä lineaarisen mallin suoraa kuin eksponentiaalisen mallin käyrää.

Toisaalta jos lasketaan molempien mallien selitysasteet, on eksponentiaalisen mallin selitysaste suurempi, joten data näyttäisi tukevan enemmän tätä.

Lasketaan molempien mallien antamat tartunamäärät päiville 6 ja 10. Lineaarinen malli:
$g(6) = 131{,}2 \approx 131$
$g(10) = 233{,}54 \approx 234$
Eksponentiaalinen malli:
$h(6) = 135{,}89 \approx 136$
$h(10) = 670{,}56 \approx 671$



(Kokeenlaatijan ratkaisut:
$f\left(6\right)=25{,}5857x-22{,}3142=131{,}2\approx131$
$f\left(10\right)=25{,}5857x-22{,}3142=233{,}5428\approx234$
Eksponentiaalinen malli:
$f\left(x\right)=12{,}3979\cdot e^{0{,}3991x}=135{,}9282405\approx136$
$f\left(x\right)=12{,}3979\cdot e^{0{,}3991x}=670{,}8376151\approx671$)

Molemmat mallit antavat suurinpiirtein saman lukeman päivälle 6, mutta päivässä 10 tulee jo suuri ero. Tämä johtuu eksponentiaalisen mallin suuresta kasvunopeudesta. Jos toimenpiteet suhteutetaan lineaariseen malliin, voivat ne olla liian hitaita tai tehottomia, jos tartuntamäärät kasvavat huomattavasti nopeampaa. Tämä voi aiheuttaa liian paljon tartuntojen kasvua, jos torjuntatoimet eivät ole riittävän nopeita. Jos taas mennään eksponentiaalisella mallilla, voi tartuntojen leviäminen olla huomattavasti odotettua hitaampaa, jolloin toimet saattavat olla liian rajuja ja kalliita tarpeeseen nähden.

PISTEYTYS
- Perusteltu, miksi toinen mallinnus on parempi kuin toinen 2p

Yksi selitys ja vastaus riittää.
(HUOM: yksiselitteistä oikeaa vastausta ei ole, mutta mikä tahansa dataan perustuva perustelu kelpaa tähän.)

- Lineaarisen mallin ja eksponentiaalsien mallin arviot päiville 6 ja 10 antaa 1p/malli (tai 1p/päivä).

Käsitelty, mitä lineaarisen mallin valinta voi aiheuttaa 1p
Käsitelty, mitä eksponentiaalisen mallin valinta voi aiheuttaa 1p
Selitysten on oltava riittävän pitkiä, lyhyet vastaukset eivät riitä.

6. Las Palmas helmikuussa 12 p.

Sääharrastaja tutki Las Palmasin (mediaani)lämpötilaa eri vuorokauden aikoina helmikuussa. Hän mallinsi vuorokauden lämpötilaa celsiusasteina sinifunktiolla $f(t) = a\sin(bt + c) + d$, missä muuttuja t kuvastaa vuorokauden kellonaikaa keskiyöstä alkaen.

Hän kuitenkin sattui hukkaamaan vakioiden $a,\ b,\ c \text{ ja } d$ lukuarvot, ja hänelle jäi ainoastaan kuva valmiista funktiosta, joka on annettu ohessa. Kuvaajaan oli merkitty päivän kylmintä ja lämpimintä hetkeä kuvaavat pisteet.

1) Auta sääharrastajaa ja määritä kyseiset lukuarvot $a,\ b,\ c \text{ ja } d$ viisidesimaalisina likiarvoina. Perustele päätelmäsi. (9 p.)

2) Määritä funktion avulla minuutin tarkkuudella se kellonaika, jolloin lämpötila nousi yli 19 asteen. (3 p.)

RATKAISU
1) Kuvaan on merkitty sinifunktion matalin piste $(3\ ;\ 17{,}1)$ ja korkein piste $(15\ ;\ 19{,}9)$ joista voidaan päätellä kertoimet $a,\ b,\ c \text{ ja } d$. Pisteiden koordinaateista x vastaa tunteja ja y vastaa lämpötilaa. Koska matalimman ja korkeimman kohdan erotus x-arvoissa on 12 (tuntia), on funktion jakso oltava 24 (tuntia) ja näin ollen $b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \approx 0{,}26180$.

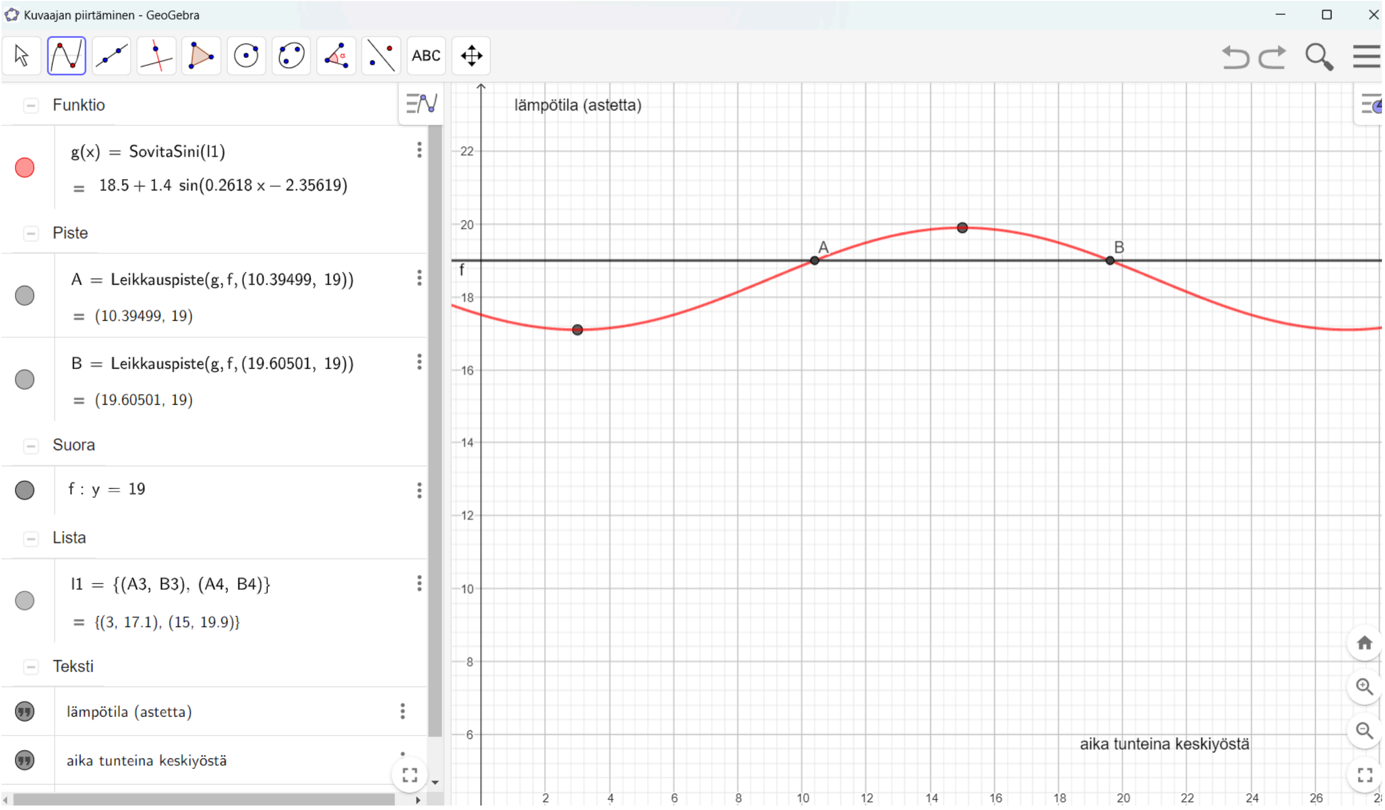
Koska suurimman ja pienimmän kohdan y-arvojen erotus on 2,8, on kerroin $a = 1{,}4$.

Suurimman ja pienimmän kohdan y-arvojen puoliväli on $d = 17{,}1 + 1{,}4 = 18{,}5$.

Koska sinifunktio lähtee normaalisti origosta (minimin ja maksimin puoliväli), on vakiolla c siirrettävä funktion aloituskohtaa vasen-oikeasuunnassa. Vastaava kohta kuvassa on x-arvolla 9, eli $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ koko jakson pituudesta. Koska alkuperäinen jakso on 2π, vastaa tämä arvoa $\frac{3}{8} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{4}$. Tämän vuoksi $c = -\frac{3\pi}{4} \approx -2{,}35619$.

Funktio on siis $f(t) = 1{,}4 \cdot \sin(0{,}26180t - 2{,}35619) + 18{,}5$.

2) Tutkitaan nyt, milloin $f(t) = 19$:
Laskimen solve antaa kaksi ratkaisua välillä $0 < t < 24$, joista ensimmäinen vastaa tehtävänannon kysymystä (lämpötila nousee). Eli $t \approx 10{,}39494\ldots$ josta $0{,}39494\ldots \cdot 60 = 23{,}696\ldots$.
Tämä vastaa minuutin tarkkuudella kellonaikaa 10:24.



PISTEYTYS

1)

- Löydetty kuvan pisteet ja ymmärretty niiden merkitys lukuarvojen laskemisessa 1p
- Kunkin vakion laskemisesta 2p/vakio

2)

- Ymmärretty, että etsitään t arvoa, jolla $f(t) = 19.$ 1p
- Laskettu oikea likiarvo 1p
- Laskettu oikea kellonaika 1p

> **Aineisto**
>
> 6.A Las Palmas kuvaaja

7. Kaksi ratkaisua 12 p.

Tarkastellaan funktiota $g(x) = \frac{1}{1-2^{(x^2+x-2)}}$.

7.1 6 p.

Määritä funktion $g(x)$ määrittelyjoukko

Ratkaisu

Funktio $g\left(x\right)$ on määritelty, kun $1-2^{\left(x^2+x-2\right)}\neq 0$.

Nyt $1-2^{\left(x^2+x-2\right)}=0$, kun $2^{x^2+x-2}=1\rightarrow x^2+x-2=0$

$\rightarrow\ x=-2\ tai\ x=1$

Eli funktio $g\left(x\right)$ on määritelty, kun

$x\in R\setminus\ \{-2{,}1\}$

Pisteytys:

Todettu $g\left(x\right)$ on määritelty kun $1-2^{\left(x^2+x-2\right)}\neq 0$: 2p

Laskettu nimittäjän nollakohdat: 2p

Oikea määrittelyjoukko: 2p

7.2 4 p.

Marko ja Pekka ratkaisivat yhtälön

$g\left(x\right)=-1$

alla olevien kuvien mukaisilla tavoilla.

Pekka

$$\frac{1}{1-2^{\left(x^2+x-2\right)}}=-1$$

$$\rightarrow 1=-1\left(1-2^{\left(x^2+x-2\right)}\right)$$

$$\rightarrow 1=-1+2^{x^2+x-2}$$

$$\rightarrow 2=2^{x^2+x-2}$$

$$\rightarrow \log_2 2=\log_2 2^{x^2+x-2}$$

$$\rightarrow 1=\frac{\left(\log_2 2^{x^2}\cdot\log_2 2^{x}\right)}{\log_2 2}$$

$$\rightarrow 1=\log_2 2^{x^2}\cdot\log_2 2^{x}$$

$$\rightarrow 1=x^2\cdot x$$

$$\rightarrow x=\sqrt[3]{1}$$

$$\rightarrow x=1$$

Marko

$$\frac{1}{1-2^{(x^2+x-2)}} = -1$$

$$\rightarrow 1 = -1\left(1 - 2^{(x^2+x-2)}\right)$$

$$\rightarrow 1 = -1\left(1 - \frac{2^{x^2}2^x}{-2^2}\right)$$

$$\rightarrow 1 = -1 + \frac{2^{x^2}2^x}{-4}$$

$$\rightarrow 2 = \frac{2^{x^2}2^x}{-4}$$

$$\rightarrow -8 = 2^{x^2}2^x$$

$$\log_2 -8 = \log_2 2^{x^2}2^x$$

Koska $\log_2 x$ on määritelty kun $x > 0$ ei yhtälöllä

$\frac{1}{1-2^{(x^2+x-2)}} = -1$ ole ratkaisua

Markon mukaan yhtälöllä ei ole olemassa ratkaisuja, kun taas Pekan mukaan yhtälön ratkaisu on 1.
CAS-laskin antaa yhtälölle ratkaisuiksi

$x = \frac{-(\sqrt{13}+1)}{2}$ tai $x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$

Etsi Markon ja Pekan ratkaisuista virheet, korjaa virheelliset kohdat.

Ratkaisu
Markolla virhe potenssien laskusäännöissä 3:nessa vaiheessa
Korjattuna:

$$2^{x^2+x-2} = \frac{2^{x^2}2^x}{2^2} = \frac{2^{x^2}2^x}{4}$$

Pekalla virhe
Kuudennessa vaiheessa. Tallaista laskusääntöä ei ole olemassa
Korjattuna:

$$\log_2 2^{x^2+x-2} = x^2 + 2 - 2$$

Pisteytys:
1p/oikein tunnistettu virhe
1p/oikein korjattu vaihe

7.3 2 p.

Ratkaise yhtälö $g(x) = -1$ Markon tavalla virheellisestä kohdasta loppuun. Esitä välivaiheet.

Ratkaisu

$1 = -1 + \frac{2^{x^2\ +x-2}}{4}$

$\rightarrow 8 = 2^{x^2} 2^x$

$\rightarrow \log_2 8 = \log_2 2^{x^2} 2^x$

$\rightarrow 3 = \log_2 2^{x^2} + \log_2 2^x$

$\rightarrow 3 = x^2 + x$

$\rightarrow x = \frac{-(\sqrt{13}+1)}{2}$ tai $x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$

Pisteytys:
Logaritmien laskusääntöjen avulla perusteltu$3 = x^2 + x$;1p
Ratkaistu x oikein: 1p

Osa 3: B2-osa

Vastaa joko tehtävään 8 tai 9.

8. Annan hiilihappojuoma 12 p.

Tutkimusten mukaan hiilihappo on puhtaana melko vakaa yhdiste - vedettömänä se säilyy jopa 180000 vuotta. Yksikin vesimolekyyli riittää kuitenkin käynnistämään sen hajoamisen. Anna tutki valmistamaansa hiilihappojuomaa. Hän havaitsi, että pullosta loristetun juoman kupliminen rauhoittuu neljäsosaan 20 minuutissa. Annan mielestä hiilihappojuoma on pahasti väljähtänyt, jos hiilihappo on hajonnut viideskymmenesosaan alkuperäisestä. Missä ajassa pullosta loristettu hiilihappojuoma on pahasti väljähtänyt?

RATKAISU

Tehdään malli: $f(x) = a \cdot k^x$, jossa a on alkuperäinen kuplien määrä, k on kuplien muutoskerroin ja x aika minuutteina hajoamisen alusta.

Havainnon mukaan

$a \cdot k^{20} = \frac{1}{4}a$

$k^{20} = \frac{1}{4}$

$k = \sqrt[20]{\frac{1}{4}} = 0{,}93303\ldots$

Pahasti väljähtänyt juoma:

$a \cdot k^x = \frac{1}{50}a$

$k^x = \frac{1}{50}$

$x = \log_k\left(\frac{1}{50}\right) =$ 56,438...

$\sqrt[20]{0.25}$

0.9330329915

$\log_{0.9330329915}\left(\frac{1}{50}\right)$

56.43856187

Vast: Pullosta loristettu vesi väljähtää pahasti 57 minuutissa

PISTEYTYS
Malli 2p
Turkimusasetelma 6p
Ratkaisu 4p
vaihtoehtoisesti

$\text{solve}(0.25^{\frac{t}{20}}=0.02,t)$

$\{t=56.4385619\}$

Vähäinen laskuvirhe max 10 p

Lähde: PIXABAY (CC0)

9. Ääriarvot 12 p.

Tarkastellaan funktioita $f(x) = \frac{1}{2+\cos(x)}$ ja $g(x) = -\cos(x) + 1$

9.1 3 p.

Millä muuttujan x arvoilla funktio $g(x)$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa? Mitkä nämä arvot ovat?

Ratkaisu
Funktio $g(x) = -\cos(x) + 1$ saa suurimman arvonsa, kun $-\cos(x) = -1$.
$-\cos(x) = -1$, kun $\cos(x) = 1$ saa pienimmän arvonsa, eli
$g(x)$ saa suurimman arvonsa, kun $x = \pi + n \cdot 2\pi; n \in Z$

Vastaavasti $g(x)$ saa pienimmän arvonsa, kun $\cos(x) = 1$, eli
$g(x)$ saa pienimmän arvonsa, kun $x = n \cdot 2\pi;\ n \in Z$

Nyt funktion $g(x)$:
suurin arvo on $g(\pi) = 2$
pienin arvo on $g(0) = 0$

Pisteytys:
Perusteltu ja oikein:
Suurin arvo kun $x = \pi + n \cdot 2\pi; n \in Z$ 1p, jos jakso puuttuu 0p
Pienin arvo kun $x = n \cdot 2\pi; n \in Z$ 1p, jos jakso puuttuu 0p
Suurin ja pienin arvo laskettu oikein $1p$

9.2 2 p.

Osoita, että funktio $f(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla

Ratkaisu
Funktio $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$.
Nyt $f(x) > 0 \quad jos \quad 2 + \cos x > 0$ ja osoittaja $1 > 0$
Selvästi $1 > 0$
Nyt $2 + \cos x \geq 2 - 1 = 1 > 0$, koska $\cos x \geq -1$
Joten
$f(x) > 0$

Pisteytys:
Todettu ja perusteltu: $f(x) > 0$ kun $2 + \cos x > 0$: 1p
Perustelut $2 + \cos x > 0$:1p

9.3 3 p.

Määritä funktio $f(x)$ suurin arvo. Millä muuttujan arvoilla funktio $f(x)$ saa suurimman arvonsa?

Ratkaisu
$f(x)$ saa suurimman arvonsa, kun nimittäjä $2+\cos x$ saa pienimmän arvonsa, nyt
$2+\cos(x)$ saa pienimmän arvonsa, kun $\cos(x)=-1$, eli kun
$x=\pi+n\cdot 2\pi; n\in Z$
Nyt funktion $f(x)$ suurin arvo on
$f(\pi)=\frac{1}{2+\cos(\pi)}=\frac{1}{2-1}=\frac{1}{1}=1$

Pisteytys:
Perusteltu ja ratkaistu suurin arvo: 2p, jos ei jaksoa/jakso väärin 0p
Laskettu suurin arvo: 1p

9.4 4 p.

Määritä funktion $h(x)=g(x)\cdot f(x)$ suurin arvo. Millä muuttujan arvoilla funktio $h(x)$ saa suurimman arvonsa?

Ratkaisu
Kohdissa 1-3 osoitettiin, että funktiot $f(x)\ \ ja\ g(x)$ saavuttavat suurimmat arvonsa samoilla muuttujan arvoilla.
$f(x)$ saa suurimman arvonsa kun $x=\pi+n\cdot 2\pi; n\in Z$ ja $g(x)$ saa suurimman arvonsa kun
$x=\pi+n\cdot 2\pi : n\in Z$, joten myös tulofunktio $h(x)$ saa suurimman arvonsa samoilla arvoilla.

Koska $f(x)>0$ ja $g(x)\geq 0$ kaikilla x ja funktiot saavat suurimman arvonsa samoilla muuttujan arvoilla, tulofunktion $h(x)=f(x)\,g(x)$ suurin arvo saadaan suurimpien arvojen tulona, eli funktion
$h(x)$ suurin arvo on $2\cdot 1=2$

PISTEYTYS:
Funktio $h(x)$ saa suurimman arvonsa
Perusteltu funktion h suurin arvo:3p
- Todettu: $f(x)>0\ ja\ g(0)\geq 0$: 1p
- Tehty toteamus suurimpien arvojen tulosta: 1p
- Oikea vastaus: 1p

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit vielä palata muokkaamaan vastauksia, tai päättää kokeen.

EE v.22.0.0