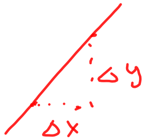
Analyyttinen geometria ja vektorit

Suora

$y = kx + b$



$k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

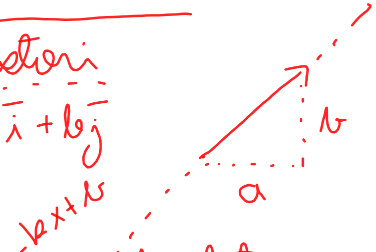
$ax + by + c = 0$

Kohtisuoruus:

$k_1 \cdot k_2 = -1$

Vektori

$\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$



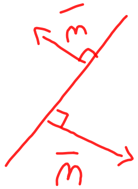
$k = \dfrac{b}{a}$

Suoran suuntavektori

$\bar{v} = \bar{i} + k\bar{j}$

Suoran $ax + by + c = 0$ normaalivektori

$\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j}$



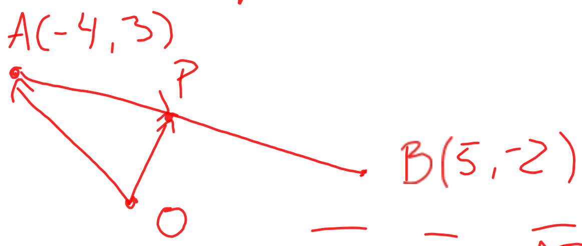
Perustelu:

$k_n = \dfrac{b}{a}$, $by = -ax - c \quad || :b$

$y = \underbrace{-\dfrac{a}{b}}_{k_s} x - \dfrac{c}{b}$

$k_s \cdot k_n = -\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{a} = -1 \quad \square$

Esim. Janan keskipiste vektoreilla



Suoraan:

$$P = \left(\frac{-4+5}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Pisteen P paikkavektori $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$

$$= \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$\overline{AB} = (5+4)\bar{i} + (-2-3)\bar{j} = 9\bar{i} - 5\bar{j}$$

$$= -4\bar{i} + 3\bar{j} + \frac{1}{2}(9\bar{i} - 5\bar{j})$$

$$= \frac{1}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Kokeesta (aihio)

A-osa: 4 teht 3 vast.

- monivalinta
- itseisarvoyhtälöt
- ympyrä ja tangentti
- vektorien väliset kulmat

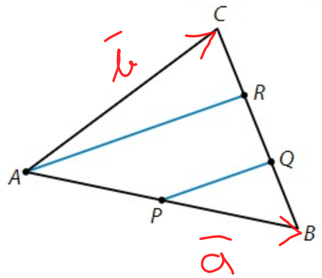
B1-osa: 3 teht. 2 vast.

- Suoratehtävä
- Paraabeli
- Vektoritehtävä

B2-osa: 2 teht. 1 vast.

- Käyräpari
- Pisteen koordinaatit

24.2 Kolmion ABC sivun AB keskipiste on P, pisteet Q ja R jakavat sivun BC kolmeen yhtä suureen osaan. Osoita, että jana AR on janan PQ suuntainen ja että sen pituus on kaksinkertainen janan PQ pituuteen verrattuna.



Merkitään:

$\overline{AB} = \bar{a}$

$\overline{AC} = \bar{b}$

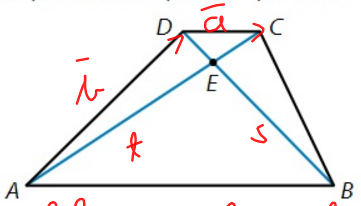
Muodostetaan vektorit

$$\overline{AR} = \overline{AC} + \overline{CR}$$
$$= \overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{CB}$$
$$= \bar{b} + \frac{1}{3}(-\bar{b} + \bar{a}) = \frac{2}{3}\bar{b} + \frac{1}{3}\bar{a}$$
$$= \frac{1}{3}\bar{a} + \frac{2}{3}\bar{b}$$

$$\overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BQ}$$
$$= \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{BC}$$
$$= \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{3}(-\bar{a} + \bar{b})$$
$$= \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{3}\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b} = \frac{1}{6}\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b}$$

$$2\overline{PQ} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}}\bar{a} + \frac{2}{3}\bar{b} = \overline{AR}$$

24.7 Puolisuunnikkaan $ABCD$ sivu AB on neljä kertaa niin pitkä kuin sen kanssa yhdensuuntainen sivu DC. Piste E on puolisuunnikkaan lävistäjien leikkauspiste. Missä suhteessa piste E jakaa lävistäjät AC ja BD?



Merkitään:

$\overline{DC} = \bar{a}$

$\overline{AD} = \bar{b}$

Muodostetaan lävistäjät:

$\overline{AC} = \bar{b} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{b}$

$\overline{BD} = -4\bar{a} + \bar{b}$

Mennään pisteeseen E kahta reittiä A -> E

$$\overline{AE} = t\overline{AC} = 4\bar{a} + s\overline{BD}$$

$$t(\bar{a} + \bar{b}) = 4\bar{a} + s(-4\bar{a} + \bar{b})$$

$$t\bar{a} + t\bar{b} = 4\bar{a} - 4s\bar{a} + s\bar{b}$$

Molemmilla puolilla pitää olla yhtä monta $\bar{a}$:ta ja $\bar{b}$:tä

$$\begin{array}{l} \bar{a}:t \\ \bar{b}:t \end{array} \begin{cases} t = 4 - 4s \\ t = s \end{cases} \quad \text{sij} \qquad \Leftrightarrow \quad s = 4 - 4s$$

$$5s = 4$$

$$s = \frac{4}{5} \quad (= t)$$

Vast: Piste E jakaa lävistäjät suhteessa $\underline{\underline{4:1}}$