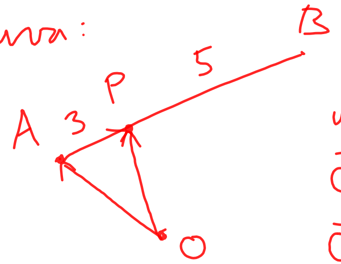
20.20 Janan AB päätepisteet ovat $A = (-3, 7)$ ja $B = (5, -9)$. Määritä piste P, joka jakaa janan AB suhteessa $3 : 5$.

Mallikuva:



Muodostetaan pisteen P paikkavektori

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$$

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \frac{3}{8}\overline{AB}$$

$$\overline{AB} = (5-(-3))\overline{i} + (-9-7)\overline{j}$$
$$= 2\overline{i} - 16\overline{j}$$

$$\overline{OP} = -3\overline{i} + 7\overline{j} + \frac{3}{8}(2\overline{i} - 16\overline{j})$$
$$= -3\overline{i} + 7\overline{j} + \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}\overline{i} - \frac{3 \cdot \overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{8}}}\overline{j}$$
$$= -2\tfrac{1}{4}\overline{i} + \overline{j}$$

V: $P = (-2\tfrac{1}{4}, 1)$

Vektoreiden pistetulo (skalaaritulo)

Vektoreiden $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}$ ja $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j}$

pistetulo $\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y}$

"$\bar{a}$ piste $\bar{b}$"

pistetulo (skalaaritulo)	$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + \cancel{a_z b_z}$

Esim. Laske vektoreiden $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j}$ ja $\bar{b} = -2\bar{i} + 4\bar{j}$ pistetulo.

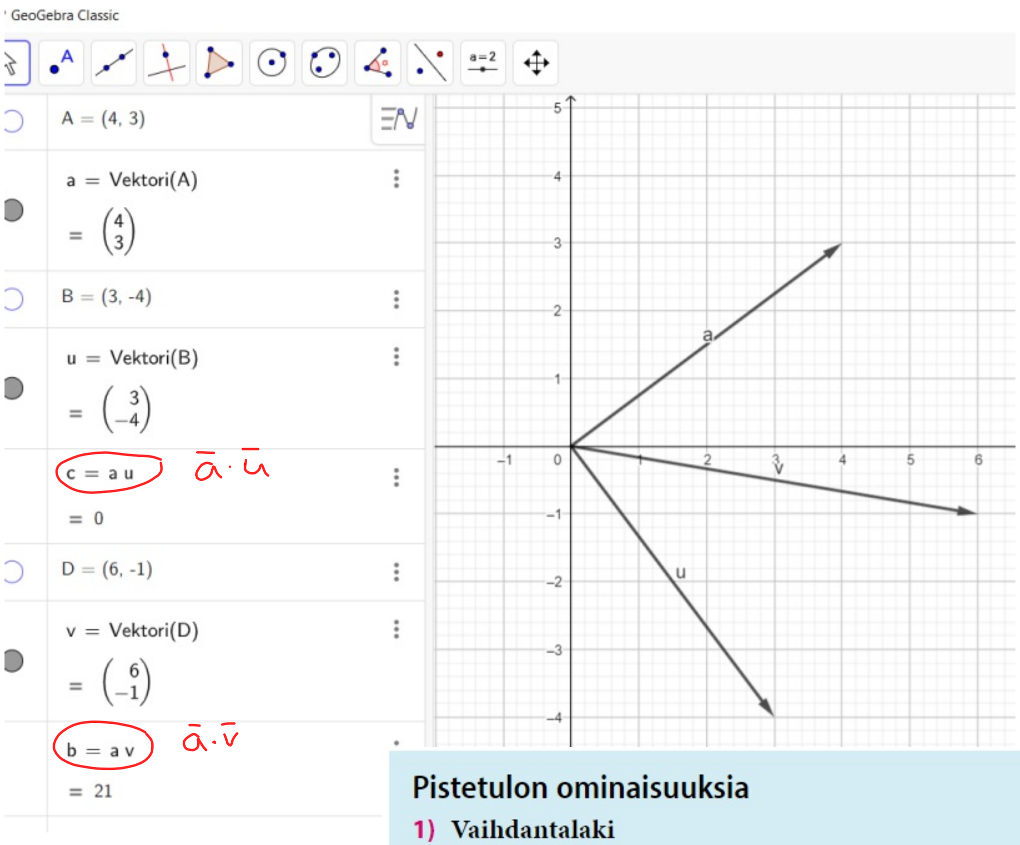
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot (-2) + (-5) \cdot 4 = -6 - 20 = \underline{\underline{-26}}$$

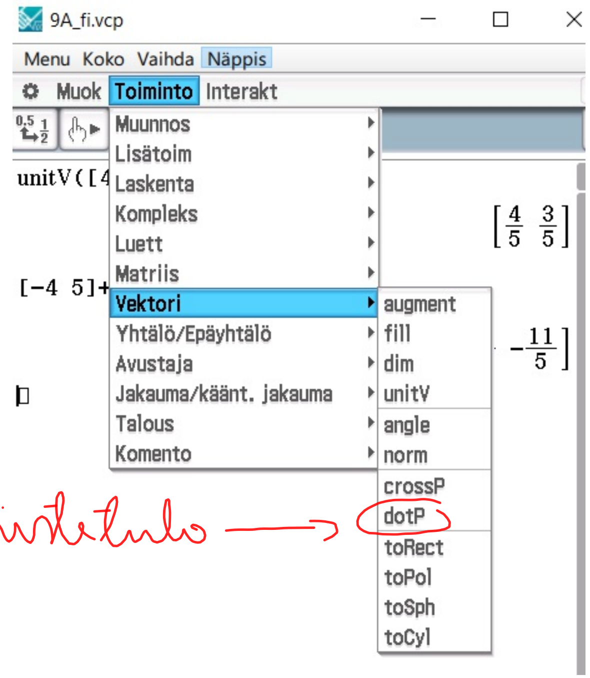
kohtisuoruus	$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, kun $\bar{a},\ \bar{b} \neq \bar{0}$

Esim. Ovatko vektorit $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$ kohtisuorassa?

Tutkitaan pistetuloa $\bar{a} \cdot \bar{b} = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$

Koska pistetulo on 0, niin vektorit ovat kohtisuorassa.





pistetulo ⟶ dotP

dotP([4 −5],[2 3]]

−7

Pistetulon ominaisuuksia

LAUSE

1) Vaihdantalaki

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$$

Pistetulon arvo ei riipu vektorien järjestyksestä.

2) Osittelulaki

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$$

Yhteenlaskettavat voidaan kertoa erikseen yhteisellä tekijällä.

3) Kertoimen siirtosääntö

$$(t\bar{a})\cdot\bar{b}=t(\bar{a}\cdot\bar{b})$$

$$\bar{a}\cdot(t\bar{b})=t(\bar{a}\cdot\bar{b})$$

Kerroin voidaan siirtää pistetulon eteen.

4) Pistetulo $\bar{a}\cdot\bar{a}$

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$$

Pistetulo $\bar{a}\cdot\bar{a}$ on vektorin $\bar{a}$ pituuden neliö.

pituus	$\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$

21.13 Määritä ne vakion t arvot, joilla vektorit $\bar{a} = -3t\bar{i} - 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = 4\bar{i} + (t-1)\bar{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{b}$ pitää olla 0.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (-3t) \cdot 4 + (-3)(t-1) = 0$$

$$-12t - 3t + 3 = 0$$

$$-15t = -3 \quad \| :(-15)$$

$$\underline{t = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}}$$