

12.14 Tutki, onko suora  $2x + y - 2 = 0$  ympyrän

~~CAS~~  $x^2 + y^2 + 4x + 8y = 0$  tangentti.

Tangentti sivuaa ympyrää, eli niillä on yksi yhteinen piste.

Kirjoitetaan suora ratkaintuun muotoon

$y = -2x + 2$ , sijo. ympyrän yhtälöön

$$x^2 + (-2x + 2)^2 + 4x + 8(-2x + 2) = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 8x + 4 + 4x - 16x + 16 = 0$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0 \quad || : 5$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

Vain yksi ratkaisu  $(x - 2) = 0$

$$x = 2 \Rightarrow y = -2 \cdot 2 + 2 = -2$$

yhden yhteisen pisteen (2, -2)

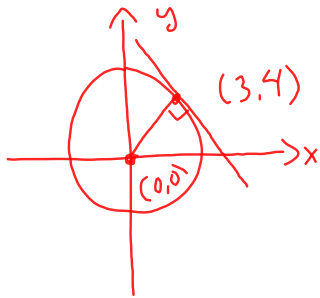
## Ympyrän tangentti

Esim. Määritä ympyrälle  $x^2 + y^2 = 25$  pisteen  
(3,4) kautta tangentin yhtälö.

$$3^2 + 4^2 = 25, \text{ piste on ympyrän kehällä.}$$

Ympyrän keskipiste on (0,0) ja  $r = \sqrt{25} = 5$

Mallikuva:



Säteenkulmakkeen sivuamispihtessä

$$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

Kohtisuorilla suorilla:  $k_1 \cdot k_2 = -1$

Oikean tangentin kulma:  $k_2$

$$\frac{4}{3} \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{3}{4}$$

Tangentin yhtälö:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

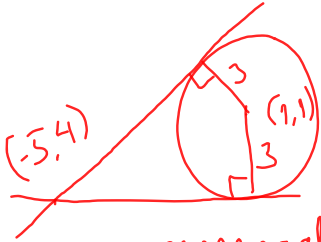
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (3x + 4y - 25 = 0)$$

- 13.4 Määritä ympyrälle  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$  pisteen  $(-5, 4)$  kautta piirrettyjen tangenttien yhtälöt laskemalla.

Ympyrän keskipiste on  $(1, 1)$  ja säde  $r = \sqrt{9} = 3$

Piste  $(-5, 4)$  ei ole ympyrällä  $(-5-1)^2 + (4-1)^2 = 36+9 \neq 9$

Mallikuva: Oikean tangentin kulmakerto on  $k$ .



$\Rightarrow$  tangentin yhtälö

$$y-4 = k(x+5)$$

$$y-4 = kx+5k$$

normaalimuoto:  $-kx + y - 5k - 4 = 0$

$(a = -k, b = 1, c = -5k - 4)$

Tangenttisuoran etäisyys keskipisteestä  $(1, 1)$  on 3

Pisteen etäisyys suorasta:  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$3 = \frac{|-k \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 5k - 4|}{\sqrt{(-k)^2 + 1^2}}$$

$$3 = \frac{|-6k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

solve  $(3 = \frac{|-6k-3|}{\sqrt{k^2+1}}, k$

Tangentit ovat siis

$$\underline{y - 4 = 0}$$

$$\frac{4}{3}x + y + \frac{20}{3} - 4 = 0$$

$$\underline{4x + 3y + 8 = 0}$$

$$\{k=0, k=-\frac{4}{3}\}$$