MAA2 kokeen vastaukset

## 2. Yhtälöitä ja epäyhtälöitä 12 p.

### 2.1 4 p.

Ratkaise epäyhtälö
$2\,(x-4)-5x \leq x-6\,.$

$2x-8-5x \leq x-6$

$-4x \leq 2 \;\|:(-4)$ , erisuuruusmerkki kääntyy

$x \geq -\frac{1}{2}$

### 2.2 4 p.

Ratkaise yhtälö
$-x^2-3x+4=0\,.$

Sijoitetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan $a=-1,\, b=-3 \; ja \; c=4$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot(-1)\cdot 4}}{2\cdot(-1)}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{-2}=\frac{3\pm 5}{-2}$$

$$x=\frac{8}{-2}=-4 \;\vee\; x=\frac{-2}{-2}=1$$

### 2.3 4 p.

Ratkaise yhtälö
$\sqrt{x^2-9}=4\,.$

Korotetaan yhtälö puolittain potenssiin 2

$x^2-9=16$

$x^2=25 \;\| \sqrt{}$

$x=\pm 5$

## 3. Korkeamman asteen yhtälö ja epäyhtälö 12 p.

### 3.1 6 p.

Ratkaise yhtälö
$2x^3 + 6x^2 - 20x = 0\,.$

Otetaan yhteinen tekijä $2x$

$2x\left(x^2+3x-10\right)=0$ , käytetään tulon nollasääntöä

$2x=0\ \vee x^2+3x-10=0$

$$x=0\ \vee x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-10)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm7}{2},\ x=2\ \vee x=-5$$

### 3.2 6 p.

Ratkaise epäyhtälö
$2x^3 + 6x^2 - 20x \leq 0\,.$
Voit hyödyntää ratkaisussasi edellisen kohdan tulosta.

Tehdään erikseen molemmista tulon tekijöistä merkkikaavio

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & -5 & & 0 & & 2 & & \\
2x & - & & - & | & + & & + & nouseva\ suora \\
x^2+3x-10 & + & | & - & & - & | & + & ylösp.\ auk.\ paraab. \\
Tulo & - & | & + & | & - & | & + &
\end{array}$$

Tulon pitää olla $\leq 0$ , mikä toteutuu, kun

$x \leq -5\ \vee\ 0 \leq x \leq 2$

## 4. Rationaaliyhtälöitä 12 p.

### 4.1 6 p.

Ratkaise yhtälö

$$\frac{3x^2+x}{3}-\frac{5x^2+2x+9}{6}=0\,.$$

Lavennetaan ensimmäinen yhteenlaskettava 2:lla ja kirjoitetaan samalle murtoviivalle

$\frac{6x^2+2x-(5x^2+2x+9)}{6}=0$ , kerrotaan 6:lla ja poistetaan sulkeet

$6x^2+2x-5x^2-2x-9=0$

$x^2-9=0\ \Leftrightarrow x^2=9\ \|\sqrt{}\Leftrightarrow\ x=\pm3$

### 4.2 6 p.

Ratkaise yhtälö

$$\frac{x}{x-1}-\frac{3}{-2x+2}=0\,.$$

Huomataan että jälkimmäinen nimittäjä voidaan kirjoittaa muotoon $-2(x-1)$ , lavennetaan ensimmäinen yhteenlaskettava -2:lla

$\frac{-2x-3}{-2(x-1)}=0,\ kun\ -2x-3=0\ \Leftrightarrow\ -2x=3\ \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ , hyväksytään vastaukseksi sillä MJ.

$x-1\neq0\ \Leftrightarrow x\neq1$

## 5. Tasan yksi ratkaisu 12 p.

Määritä kaikki sellaiset vakion $k$ arvot, joilla yhtälöllä $kx^2-6x+3k=0$ on tasan yksi ratkaisu.

Kyseessä on toisen asteen yhtälö, jolla on tasan yksi ratkaisu kun Diskriminantti on 0. Poimitaan yhtälöstä kertoimet $a=k,\ b=-6\ ja\ c=3k$ , jolloin diskriminantti $D=b^2-4ac$ on

$(-6)^2-4\cdot k\cdot3k\ =0$

$36-12k^2=0\ \Leftrightarrow\ -12k^2=-36\ \Leftrightarrow\ k^2=\frac{36}{12}$

$k^2=3\ \|\sqrt{}\Leftrightarrow\ k=\pm\sqrt{3}$

Myös k:n arvolla 0 (ensimmäisen asteen yhtälö) yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, tällöin -6x = 0, eli x = 0.

## 6. Polynomin määrittäminen 12 p.

Kolmannen asteen polynomifunktion $h(x)$ nollakohdat ovat $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 2$. Lisäksi tiedetään, että funktion arvo kohdassa $x = 3$ on neljä yksikköä suurempi kuin funktion arvo kohdassa $x = -2$. Määritä funktion $h(x)$ lauseke muodossa $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Nollakohtien avulla saadaan ensimmäisen asteen tekijät $(x-0),\ \ (x-(-1))\ \ ja\ \ (x-2)$ , korkeimman asteen termin kerroin on a, eli

$h(x) = ax(x+1)(x-2)$ , lisäksi tiedetään että

$h(3) - 4\ = h(-2)$ , ratkaistaan a laskimella: (muodostetaan ensin funktion lauseke ja sitten ratkaistaan yhtälö a:n suhteen)

```
Define h(x)=a*x*(x+1)*(x-2)
                                        done
solve(h(3)-4=h(-2),a
                                     {a=1/5}
expand(h(x)
                            a·x^3-a·x^2-2·a·x
```

Sievennetään h, jolloin voidaan siis kirjoittaa funktio h muotoon

$h(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x$

## 7. Neliöitä ja suorakulmio 12 p.

Tarkastellaan erästä neliötä $N_1$. Kun neliön $N_1$ pinta-alaa kerrotaan kahdella ja vastauksesta vähennetään yksi, saadaan neliön $N_2$ pinta-ala. Kun neliön $N_2$ yhtä sivua kasvatetaan kahdella ja toista sivua pienennetään kahdella, saadaan suorakulmio, jonka pinta-ala on 15. Määritä alkuperäisen neliön $N_1$ pinta-alan tarkka arvo.

Olkoon neliön $N_1$ sivun pituus $x$ , silloin sen pinta-ala on $x^2$ , kun tämä kerrotaan kahdella ja tuloksesta vähennetään yksi saadaan $2x^2 - 1$ , mikä on neliön $N_2$ pinta-ala. Tällöin sen sivun pituus on $\sqrt{2x^2-1}$ , minkä avulla saadaan suorakulmion sivujen pituudet $\sqrt{2x^2-1} + 2\ ja\ \sqrt{2x^2-1} - 2$ , koska suorakulmion pinta-ala on 15, niin saadaan yhtälö $\left(\sqrt{2x^2-1}+2\right)\left(\sqrt{2x^2-1}-2\right) = 15$ , ratkaistaan yhtälö laskimella

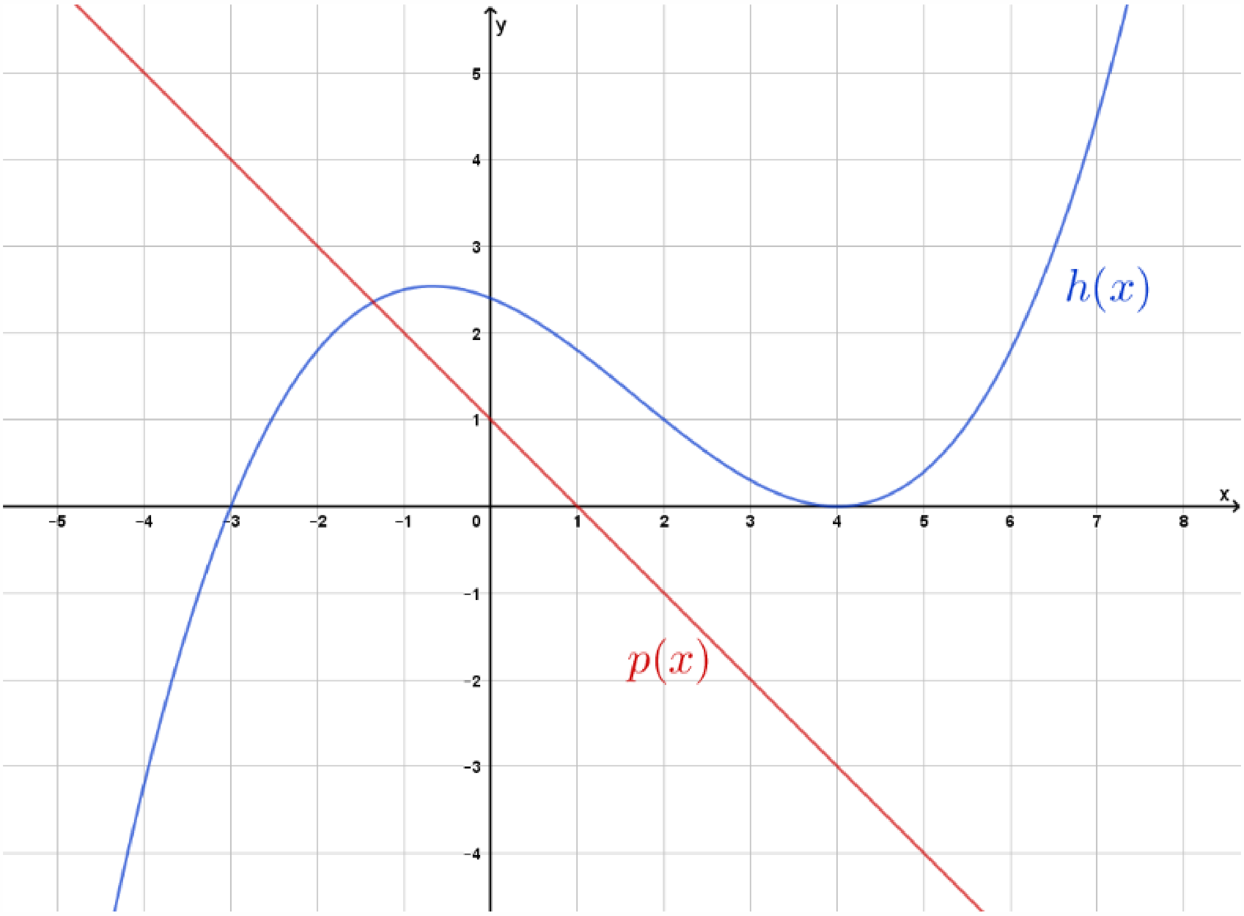
```
solve((√(2x^2-1)+2)(√(2x^2-1)-2)=15
                              {x=-√10,x=√10}
```

Koska sivun pituus ei voi olla negatiivinen valitaan vain positiivinen ratkaisu $x = \sqrt{10}$ , alkuperäisen neliön pinta-ala on siis $\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$

## 8. Polynomien tulo graafisesti 12 p.

Alla olevassa kuvassa on esitetty kolmannen asteen polynomifunktion $h(x)$ ja ensimmäisen asteen polynomifunktion $p(x)$ kuvaajat.

Funktion $f(x)$ lauseke saadaan polynomien $h(x)$ ja $p(x)$ tulona. Eli $f(x) = h(x)\,p(x)$ .
Perustele tehtävien vastaukset alla olevien kuvaajien avulla.




### 8.1 4 p.

Millä muuttujan arvoilla $f(x) = 0$ ?

Tulo on 0, jos jompi kumpi tulon tekijöistä on 0. Katsotaan kuvaajista funktioiden nollakohdat eli kohdat joissa ne koskettavat x-akselia.

$p(x) = 0\ ,\ kun\ x = 1,\ ja\ h(x) = 0,\ kun\ x = -3\ \vee x = 4$ , koska $f(x) = p(x) \cdot h(x)$ , niin

$f(x) = 0,\ kun\ x = -3\ \vee x = 1\ \vee x = 4$

### 8.2 4 p.

Millä muuttujan arvoilla $f(x) > 0$ ?

Kahden funktion tulo saa positiivisia arvoja jos molemmat saavat samanaikaisesti positiivisia arvoja tai molemmat saavat samanaikaisesti negatiivisia arvoja. Katsotaan kuvaajista alue missä molempien funktioiden kuvaajat ovat x-akselin yläpuolella.

$f(x) > 0,\ kun\ \ -3 < x < 1$

8.3 4 p.

Millä muuttujan arvoilla $f(x) < 0$ ?

Kahden funktion tulo saa negatiivisia arvoja, jos ne saavat samanaikaisesti vastakkaismerkkisiä arvoja. Katsotaan kuvaajista alueet missä toinen kuvaaja on x-akselin yläpuolella ja toinen alapuolella.

$f(x) < 0, \, kun \; x < -3 \; \vee 1 < x < 4 \; \vee x > 4$

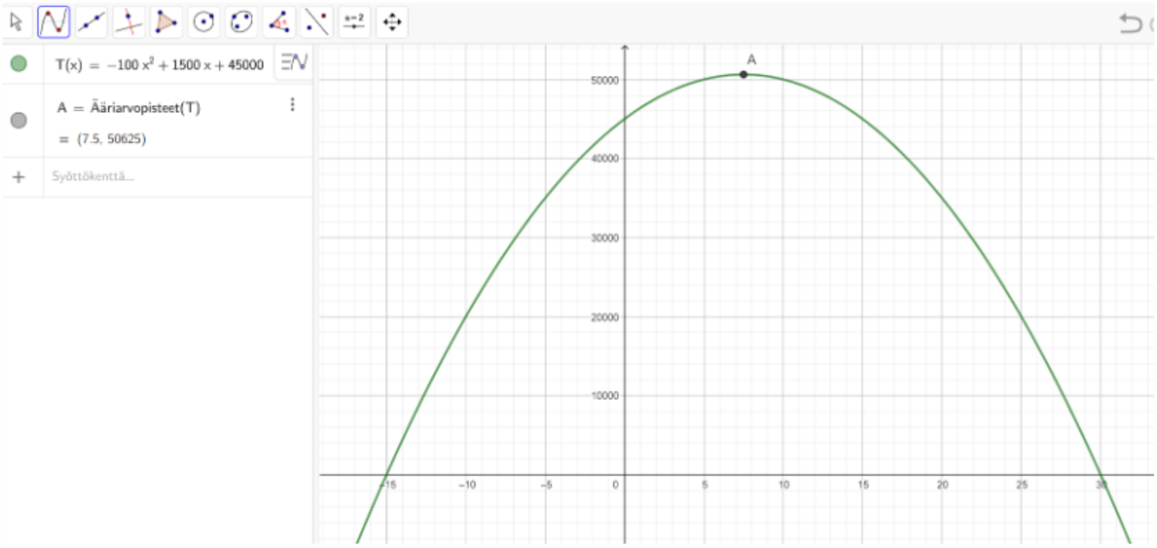
## 9. Polynomifunktion sovelluksia 12 p.

Konsertin pääsylipun hinta on 30 euroa. Järjestäjät arvioivat, että konserttiin saapuu n. 1500 kävijää. Heidän arvionsa mukaan lipun hinnan alentaminen eurolla lisää yleisön määrää aina sadalla.

1. Muodosta funktio, joka ilmoittaa miten pääsylipputulot riippuvat lipun hinnan alennuksesta. (6 p.)
2. Piirrä funktion kuvaaja ja arvioi millä lipun hinnalla saadaan suurimmat pääsylipputulot. Kuinka paljon yleisöä on tällöin ja mitkä ovat lipputulot? (6 p.)

1. Olkoon lipun hinnan alennus $x$ € ja lipputulot $T(x)$ . Tulo saadaan kun kerrotaan lipun hinta kävijöiden määrällä. Uusi hinta alennuksen jälkeen on $(30-x)$ € ja kävijöiden määrä on $1500+100x$ , tällöin pääsylipputulot ovat $T(x) = (30-x)(1500+100x)$ € $= \left(-100x^2+1500x+45000\right)$ €

2.




Piirretään kuvaaja ja haetaan kuvaajan ääriarvopiste. Nähdään että 7,5 €:n alennuksella saadaan suurimmat lipputulot 50625 €. Yleisöä on tuolloin 1500+7,5*100=2250.