1 Diskreetti todennäköisyysjakauma

1.1 Todennäköisyyden laskusääntöjen kertaus

1.

a) $P(\text{musta}) = 40\ \% = 0{,}40$

b) Koirista mustia tai ruskeita n 40 % + 30 % = 70 %.

c) Vastatapahtuman todennäköisyys on

$P(\text{ei musta}) = 1 - P(\text{musta}) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$.

2.

a) Tapahtumalle ”hertta 10” suotuisia kortteja on yksi.

$$P(\text{hertta }10) = \frac{1}{52}$$

b) Tapahtumalle ”pistearvolta 10” suotuisia kortteja on neljä (yksi jokaista maata).

$$P(\text{pistearvolta }10) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

c) Korttipakassa on ruutuja yhteensä 13 korttia ja pistearvoltaan 7 olevia kortteja yhteensä neljä, joista yksi on ruutu 7.

Tapahtumalle ”ruutu tai pistearvoltaan 7” suotuisia kortteja on yhteensä 13 + (4 – 1) = 16.

$$P(\text{ruutu tai pistearvoltaan }7) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

d) Tapahtumalle ”pata tai pata 3” suotuisia kortteja on yhteensä 13.

$$P(\text{pata tai pata }3) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

3.

Kortti palautetaan noston jälkeen pakkaan, joten korttien nostot ovat toisistaan riippumattomia: ensimmäisen kortin arvo ei vaikuta toisen kortin arvoon.

a) Korttipakassa on rouvia eli kuningattaria (Q) yhteensä neljä. Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{Q } \textbf{ja} \text{ Q}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

b) Korttipakassa on kuninkaita (K) yhteensä neljä. Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\clubsuit\text{Q } \textbf{ja} \text{ K}) = \frac{1}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{676}$$

c) Tapahtumalle ”rouva” suotuisia kortteja on neljä, ja tapahtumalle ”jokin muu” suotuisia kortteja on 52 – 4 = 48.

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{Q } \textbf{ja} \text{ muu}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{52} = \frac{12}{169}$$

4.

P(valkoinen) = $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

P(musta) = $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Punaisia palloja on 24 – 10 – 6 = 8, joten P(punainen) = $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

a) Kertolaskusäännön mukaan

P(punainen **ja** punainen) = $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

b) Kertolaskusäännön mukaan

P(1. pallo punainen **ja** 2. pallo musta) = $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

c) Tapahtumalle ”muun värinen kuin punainen” eli ”valkoinen tai musta” suotuisia palloja on 10 + 6 = 16.

Kertolaskusäännön mukaan

P(1. pallo punainen **ja** 2. pallo muun värinen) = $\frac{1}{3} \cdot \frac{16}{24} = \frac{2}{9}$.

5.

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(1.\text{ heitolla } 6 \textbf{ ja } 2.\text{ heitolla } 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

b) Tapahtuma ”vähintään 5” tarkoittaa ”5 tai 6”, joten suotuisia silmälukuja on kaksi.

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(1.\text{ heitolla } 1 \textbf{ ja } 2.\text{ heitolla vähintään } 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18}.$$

c) Tapahtuma ”korkeintaan 3” tarkoittaa ”1 tai 2 tai 3”, joten suotuisia silmälukuja on kolme.

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(1.\text{ heitolla } 1 \textbf{ ja } 2.\text{ heitolla korkeintaan } 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}.$$

6.

a) Tapahtumalle ”saadaan ässä” suotuisia kortteja on neljä. Kortti palautetaan noston jälkeen pakkaan, joten suotuisien korttien ja kaikkien korttien lukumäärä on kummallakin nostolla sama.

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{ässä } \textbf{ja} \text{ ässä}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}.$$

b) Tapahtumalle ”saadaan ässä” suotuisia kortteja on ensimmäisessä nostossa neljä. Korttia ei palauteta noston jälkeen pakkaan, joten toisessa nostossa suotuisi kortteja on 4 – 1 = 3 ja kaikkien korttien lukumäärä on 52 – 1 = 51.

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{ässä } \textbf{ja} \text{ ässä}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}.$$

7.

$P(\text{vihreä}) = 0{,}52$

$P(\text{ei vihreä}) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$

a) Tapahtuma ”vain toinen on vihreä” sisältää tapahtumat ”1. on vihreä ja toinen ei” sekä ”1. ei ole vihreä ja toinen on”. Molempien tapahtumien todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä.

Kokonaistodennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä.

$$P(\text{vain toinen on vihreä}) = 0{,}52 \cdot 0{,}48 + 0{,}48 \cdot 0{,}52$$

$$= 0{,}4992 \approx 0{,}50$$

b) Tapahtuma ”ensimmäinen tai toinen” tarkoittaa ”vain toinen tai molemmat”.

$$P(1.\text{ tai }2.\text{ on vihreä})$$

$$= \underbrace{0{,}52 \cdot 0{,}48 + 0{,}48 \cdot 0{,}52}_{\text{vain toinen on vihreä}} + \underbrace{0{,}52 \cdot 0{,}52}_{\substack{\text{molemmat}\\ \text{vihreitä}}} = 0{,}7696 \approx 0{,}77$$

Tapa 2: Todennäköisyys voidaan laskea myös vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ensimmäinen tai toinen on vihreä” vastatapahtuma on ”kumpikaan ei ole vihreä”.

$$P(1.\text{ tai }2.\text{ on vihreä}) = 1 - P(\text{kumpikaan ei ole vihreä})$$

$$= 1 - 0{,}48 \cdot 0{,}48$$

$$= 0{,}7696 \approx 0{,}77$$

8.

a) Tapahtuma ”vain toisella 6” sisältää tapahtumat ”ensimmäisellä 6 ja toisella muu” sekä ”ensimmäisellä muu ja toisella 6”.

$$P(\text{vain toisella 6}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}.$$

b) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{ei 6 } \textbf{ja} \text{ ei 6}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

c) Tapahtuman ”ainakin toisella heitolla 6” vastatapahtuma on ”kummallakaan heitolla ei saada 6”. Komplementtisäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin toisella 6}) &= 1 - P(\text{ei 6 } \textbf{ja} \text{ ei 6}) \\ &= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \\ &= \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

9.

P(torjunta) = 82 % = 0,82

P(maali) = 1 – 0,82 = 0,18

a) Kertolaskusäännön mukaan

P(torjunta **ja** torjunta) = 0,82 · 0,82 = 0,6724 ≈ 0,67.

b) Torjunta voi onnistua ensimmäisen tai toisen laukauksen kohdalla.

P(vain yksi torjunta) = 0,82 · 0,18 + 0,18 · 0,82 = 0,2952 ≈ 0,30.

c) Tapahtuman ”ainakin toinen” vastatapahtuma on ”ei kumpikaan”. Komplementtisäännön mukaan

P(ainakin toinen torjutaan) = 1 – P(ei torjuntaa **ja** ei torjuntaa)

$= 1 - 0{,}18 \cdot 0{,}18$

$= 0{,}9676 \approx 0{,}97.$

10.

P(viallinen) = 0,50 % = 0,005

P(ehjä) = 1 – 0,005 = 0,995

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(10\text{ ehjää}) = \underbrace{0{,}995 \cdot 0{,}995 \cdot \ldots \cdot 0{,}995}_{10\text{ kappaletta}}$$

$$= 0{,}995^{10}$$

$$= 0{,}9511\ldots \approx 0{,}95.$$

b) Tapahtuman ”ainakin yksi viallinen” vastatapahtuma on ”ei yhtään viallista” eli ”kaikki ehjiä”. Komplementtisäännön mukaan

$$P(\text{ainakin yksi viallinen}) = 1 - P(10\text{ ehjää})$$

$$= 1 - 0{,}995^{10}$$

$$= 0{,}0488\ldots$$

$$\approx 0{,}049.$$

11.

P(voitto) = 0,2

P(ei voittoa) = 1 – 0,2 = 0,8

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{ei yhtään voittoa}) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8$$
$$= 0{,}8^4 = 0{,}4096 \approx 0{,}41.$$

b) Tapahtuman ”ainakin yksi voitto” vastatapahtuma on ”ei yhtään voittoa”. Komplementtisäännön mukaan

$$P(\text{ainakin yksi voitto}) = 1 - P(\text{ei yhtään voittoa})$$
$$= 1 - 0{,}8^4$$
$$= 0{,}5904\ldots$$
$$\approx 0{,}59.$$

c) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{voitto } \textbf{ja} \text{ ei voittoa } \textbf{ja} \text{ voitto } \textbf{ja} \text{ ei voittoa})$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8$$
$$= 0{,}0256\ldots$$
$$\approx 0{,}03.$$

12.

$P(\text{kymppi}) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$P(\text{ei kymppiä}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{ei yhtään kymppiä}) = \underbrace{\frac{13}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{13}{15}}_{\text{5 heittoa}} = \left(\frac{13}{15}\right)^5$$

$$= 0{,}4889 \ldots \approx 0{,}49.$$

b) Tapahtuman ”ainakin yksi kymppi” vastatapahtuma on ”ei yhtään kymppiä”. Komplementtisäännön mukaan

$$P(\text{ainakin yksi kymppi}) = 1 - P(\text{ei yhtään kymppiä})$$

$$= 1 - \left(\frac{13}{15}\right)^5$$

$$= 0{,}5110\ldots$$

$$\approx 0{,}51.$$

c) Eemeli heittää neljä heittoa ohi kympin ja viimeisen heiton kymppiin. Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{viimeisellä kymppiin}) = \frac{13}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{2}{15}$$

$$= 0{,}0752 \ldots$$

$$\approx 0{,}08.$$

13.

Ensin nostettua palloa ei palauteta koriin, joten pallojen lukumäärä vähenee ensimmäisen noston jälkeen.

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{vihreä } \textbf{ja} \text{ vihreä}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}.$$

b) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{1. punainen } \textbf{ja} \text{ 2. vihreä}) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{7}.$$

c) Muun värisiä (kuin punaisia) palloja on 15 – 6 = 9.

Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{1. punainen } \textbf{ja} \text{ 2. muun värinen}) = \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{9}{35}.$$

14.

P(poutaa) = 0,67

P(sataa) = $1 - 0{,}67 = 0{,}33$

a) Tapahtuma ”vain toisena päivänä poutaa” sisältää kaksi tilannetta:

1) ensimmäisenä päivänä poutaa ja toisena sataa

tai

2) ensimmäisenä päivänä sataa ja toisena poutaa.

Molempien tilanteiden todennäköisyydet saadaan kertolaskusäännöllä.

Yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{vain toisena päivänä poutaa}) &= 0{,}67 \cdot 0{,}33 + 0{,}33 \cdot 0{,}67 \\ &= 0{,}4422 \approx 0{,}44. \end{aligned}$$

b) Tapahtuman ”ainakin toinen on poutapäivä” vastatapahtuma on ”molempina päivinä sataa”. Komplementtisäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi poutapäivä}) &= 1 - P(\text{molempina sataa}) \\ &= 1 - 0{,}33 \cdot 0{,}33 \\ &= 0{,}8911 \\ &\approx 0{,}89. \end{aligned}$$

15.

$P(\text{itää}) = 65\ \% = 0{,}65$

$P(\text{ei idä}) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{kaikki 10 itävät}) = \underbrace{0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot \ldots \cdot 0{,}65}_{\text{5 siementä}} = 0{,}65^5$$

$$= 0{,}116\ldots \approx 0{,}12.$$

b) Tapahtuman ”ainakin yksi itää” vastatapahtuma on ”ei yksikään idä”. Komplementtisäännön mukaan

$$P(\text{ainakin yksi itää}) = 1 - P(\text{ei yksikään idä})$$

$$= 1 - 0{,}35^5$$

$$= 0{,}994\ldots$$

$$\approx 0{,}99.$$

c) Kahteen ensimmäiseen ruukkuun istutetut itävät ja loput eivät. Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{itää } \textbf{ja} \text{ itää } \textbf{ja} \text{ loput eivät idä}) = \underbrace{0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}35}_{\text{5 siementä}}$$

$$= 0{,}65^2 \cdot 0{,}35^3$$

$$= 0{,}0181\ldots \approx 0{,}018.$$

1.2 Toistokoe ja binomitodennäköisyys

16.

a) $\binom{5}{1} = 5$

b) $\binom{5}{3} = 10$

c) $\binom{6}{4} = 15$

d) $\binom{8}{5} = 56$

Huomaa: Binomikertoimen arvo lasketaan laskinohjelmiston nCr-toiminnolla.

17.

a) Kahdeksasta heitosta kolme on kuutosia. Heittosarjoja on yhteensä

$\binom{8}{3} = 56$ kappaletta.

b) Lasketaan yhden sellaisen heittosarjan, missä on kolme kuutosta ja $8 - 3 = 5$ muuta silmälukua, todennäköisyys.

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

Suotuisia heittosarjoja on yhteensä 56 kappaletta. Todennäköisyys saada kolme kuutosta ja viisi muuta silmälukua on

$$56 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}1041\ldots \approx 0{,}10.$$

18.

Pojan todennäköisyys on p = 0,512.

Tytön todennäköisyys on q = 1 – 0,512 = 0,488.

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(5 \text{ poikaa}) = 0{,}512 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}512 \cdot 0{,}512 = 0{,}512^5$$
$$= 0{,}03518 \ldots \approx 0{,}0352.$$

b) Viidestä lapsesta 3 on poikia ja loput 5 – 3 = 2 on tyttöjä.
Binomitodennäköisyys on

$$P(3 \text{ poikaa viidestä}) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}512^3 \cdot 0{,}488^2 = 0{,}3196 \ldots \approx 0{,}320.$$

Huomaa, että todennäköisyys on sama kuin

$$P(2 \text{ tyttöä viidestä}) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}488^2 \cdot 0{,}512^3 = 0{,}3196 \ldots \approx 0{,}320.$$

Huomaa: Binomitodennäköisyys voidaan laskea laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla binomPdf(n,p,X). Toimintoon syötetään

- ”toistojen” lukumäärä n = 5
- ”onnistumisen” todennäköisyys p = 0,512 (tai p = 0,488)
- ”onnistumisten” lukumäärä X = 3 (tai X = 2).

c) Ensin syntynyt lapsi on poika ja loput neljä lasta ovat tyttöjä. Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{ensin poika ja sitten 4 tyttöä}) &= 0{,}512 \cdot 0{,}488 \cdot 0{,}488 \cdot 0{,}488 \cdot 0{,}488 \\ &= 0{,}512 \cdot 0{,}488^4 \\ &= 0{,}02903\ldots \approx 0{,}0290. \end{aligned}$$

19.

Todennäköisyys, että sipuli itää on p = 0,75.

Todennäköisyys, että sipuli ei idä on q = 1 – 0,75 = 0,25.

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(1.\,\text{itää ja } 9.\,\text{muuta eivät}) = 0{,}75 \cdot 0{,}25^9$$
$$= 2{,}861 \ldots \cdot 10^{-6} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-6}.$$

b) Kymmenestä sipulista yksi itää ja loput 9 eivät.
Binomitodennäköisyys on

$$P(1 \text{ itää kymmenestä}) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25^9$$
$$= 0{,}0000286 \ldots \approx 2{,}9 \cdot 10^{-5}.$$

c) Kymmenestä sipulista 6 itää ja loput 10 – 6 = 4 eivät.

Binomitodennäköisyys on

$$P(6 \text{ itää kymmenestä}) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}75^6 \cdot 0{,}25^4 = 0{,}145 \ldots \approx 0{,}15.$$

Huomaa: Binomitodennäköisyys voidaan laskea laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla binomPdf(n,p,X). Toimintoon syötetään

- ”toistojen” lukumäärä n = 10
- ”onnistumisen” todennäköisyys p = 0,75
- ”onnistumisten” lukumäärä X = 6.

20.

Viallisen tuotteen todennäköisyys on p = 0,6 % = 0,006.

Todennäköisyys, että tuote ei ole viallinen on q = 1 – 0,006 = 0,994.

a) 25 lelusta 2 on viallisia ja loput 25 – 2 = 23 eivät ole.

Binomitodennäköisyys on

$$P(\text{2 viallista 25:stä}) = \binom{25}{2} \cdot 0{,}006^2 \cdot 0{,}994^{23} = 0{,}00940\ldots \approx 0{,}0094.$$

Huomaa: Binomitodennäköisyys voidaan laskea laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla binomPdf(n,p,X). Toimintoon syötetään

- ”toistojen” lukumäärä n = 25,
- ”onnistumisen” todennäköisyys p = 0,006,
- ”onnistumisten” lukumäärä X = 2.

b) Tapahtuma ”korkeintaan yksi viallinen” tarkoittaa, että viallisia on yksi tai ei yhtään.

$$P(\text{korkeintaan yksi})$$
$$= P(\text{yksi viallinen 25:stä}) + P(\text{ei yhtään viallista})$$
$$= \binom{25}{1} \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994^{24} + 0{,}994^{25}$$
$$= 0{,}129\ldots + 0{,}860\ldots$$
$$= 0{,}990\ldots$$
$$\approx 0{,}99$$

21.

a) Arpoja on pieni määrä (32 kappaletta), joten jokainen ostettu arpa muuttaa voittoarpojen suhteellista osuutta eli voittoarvan todennäköisyyttä jäljellä olevien arpojen joukossa. Todennäköisyys, että ostetaan voittoarpa, siis muuttuu jokaisen ostetun arvan myötä.

Toistokokeessa ”onnistumisen” todennäköisyys on joka toistolla sama.

Tilannetta (arpojen ostamista) ei siis voida tulkita toistokokeeksi.

b) Todennäköisyys, että ensimmäinen ostettu arpa voittaa on $\frac{6}{32}$.

Tämän jälkeen arpoja on jäljellä 31, joista 5 on voittoarpoja.

Todennäköisyys, että toinen ostettu arpa voittaa on $\frac{5}{31}$.

Tämän jälkeen arpoja on jäljellä 30, joista 4 on voittoarpoja.

Todennäköisyys, että kolmas ostettu arpa voittaa on $\frac{4}{30}$.

Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(3 \text{ voittoarpaa}) &= P(1.\text{voittaa ja } 2.\text{voittaa ja } 3.\text{voittaa}) \\ &= \frac{6}{32} \cdot \frac{5}{31} \cdot \frac{4}{30} \\ &= \frac{1}{248}. \end{aligned}$$

Huomaa: Todennäköisyys voidaan lasketa myös kombinaatioiden avulla. Valitaan kuudesta voittoarvasta kolme. Tämä voidaan tehdä $\binom{6}{3} = 20$ eri tavalla. Suotuisia alkeistapauksia on siis **20**. Valitaan 32 arvasta kolme. Tämä voidaan tehdä $\binom{32}{3} = 4960$ eri tavalla.

Alkeistapauksia on siis yhteensä **4960**.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(3 \text{ voittoarpaa}) = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{4960}} = \frac{1}{248} = 0{,}00403 \ldots \approx 0{,}004.$$

22.

a) Ässä-arpoja on oletettavasti suuri määrä, joten yhden arvan ostaminen ei käytännössä muuta voittoarpojen suhteellista osuutta eli voittoarvan todennäköisyyttä jäljellä olevien arpojen joukossa.

Sattuma määrää, minkä arvan ostaja ostaa. Voiton (eli ”onnistumisen”) todennäköisyys on jokaisen arvan kohdalla sama: $\frac{1}{50}$.

Tilanne (arpojen ostaminen) voidaan tulkita toistokokeeksi.

b) Arvoista joka 50. arpa voittaa.

Todennäköisyys, että ostettu arpa voittaa on $p = \frac{1}{50} = 0{,}02$.

Todennäköisyys, että ostettu arpa ei voita on $q = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

Urheiluseuran ostamista 32 arvasta 3 on voittoarpoja ja loput 32 – 3 = 29 eivät ole.

Binomitodennäköisyys on

$$P(3 \text{ voittoa } 32\text{:stä}) = \binom{32}{3} \cdot 0{,}02^3 \cdot 0{,}98^{29} = 0{,}0220\ldots \approx 0{,}022.$$

Huomaa: Binomitodennäköisyys voidaan laskea laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla binomPdf(n,p,X). Toimintoon syötetään

- ”toistojen” lukumäärä $n = 32$,
- ”onnistumisen” todennäköisyys $p = 0{,}02$,
- ”onnistumisten” lukumäärä $X = 3$.

23.

Kunnan asukkaista joka kolmas kannattaa uutta ostoskeskusta. Kannattajien osuus on sama 12 henkilön toimikunnassa, jos henkilöistä $\frac{12}{3} = 4$ kannattaa ostoskeskusta.

Todennäköisyys, että yksi henkilö kannattaa ostoskeskusta on $p = \frac{1}{3}$.

Todennäköisyys, että henkilö ei kannata ostoskeskusta on $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Lasketaan tapahtuman ”12 henkilön toimikunnassa 4 kannattaa ostoskeskusta”.

Binomitodennäköisyys on

$$P(4 \text{ kannattaa } 12\text{: sta}) = \binom{12}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-4} = 0{,}238\ldots \approx 0{,}24.$$

Huomaa: Binomitodennäköisyys voidaan laskea laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla binomPdf(n,p,X). Toimintoon syötetään

- ”toistojen” lukumäärä $n = 12$,
- ”onnistumisen” todennäköisyys $p = \frac{1}{3}$,
- ”onnistumisten” lukumäärä $X = 4$.

24.

a) Kolmesta vaihtoehdosta yksi on oikein, joten $p = P(\text{oikein}) = \frac{1}{3}$.

b) Kolmestatoista kohteesta 7 on oikein.

Oikeat kohteet voidaan veikata $\binom{13}{7} = 1716$ eri tavalla.

c) Veikkaaminen voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä $n = 13$. ”Onnistuminen” tarkoittaa oikein veikattua kohdetta, eli $p = \frac{1}{3}$.

”Epäonnistuminen” tarkoittaa väärin veikattua kohdetta, eli $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Veikataan 7 kohdetta kolmestatoista oikein ja loput 13 – 7 = 6 väärin.

Binomitodennäköisyys on

$$P(7 \text{ oikein } 13\text{: sta}) = \binom{13}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0{,}0688\ldots \approx 0{,}069.$$

Huomaa: Binomitodennäköisyys voidaan laskea laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla binomPdf(n,p,X). Toimintoon syötetään

- ”toistojen” lukumäärä $n = 13$,
- ”onnistumisen” todennäköisyys $p = \frac{1}{3}$,
- ”onnistumisten” lukumäärä $X = 7$.

d) Veikataan 7 kohdetta kolmestatoista oikein ja loput 13 – 7 = 6 väärin **tai** veikataan 8 kohdetta kolmestatoista oikein ja loput 13 – 8 = 5 väärin.

Yhteenlaskusäännön mukaan todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(7\ \textbf{tai}\ 8\ \text{oikein}) &= \underbrace{\binom{13}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6}_{7\ \text{oikein}} + \underbrace{\binom{13}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5}_{8\ \text{oikein}} \\ &= 0{,}0688\ldots + 0{,}0258\ldots \\ &= 0{,}0947\ldots \\ &\approx 0{,}095. \end{aligned}$$

25.

a) Sadepäivän todennäköisyys on $p = P(\text{sataa}) = 0{,}39$.

Todennäköisyys, että ei sada on $q = P(\text{ei sada}) = 1 - 0{,}39 = 0{,}61$.

b) Viikon seitsemästä päivästä kolmena sataa. Sadepäivät voivat osua viikolle $\binom{7}{3} = 35$ eri tavalla.

c) Seitsemästä päivästä 3 on sadepäiviä ja loput 7 – 3 = 4 eivät ole.

Binomitodennäköisyys on

$$P(3 \text{ sadepäivää seitsemästä}) = \binom{7}{3} \cdot 0{,}39^3 \cdot 0{,}61^4 = 0{,}287\ldots \approx 0{,}29.$$

Huomaa: Binomitodennäköisyys voidaan laskea laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla binomPdf(n,p,X). Toimintoon syötetään

- ”toistojen” lukumäärä $n = 7$,
- ”onnistumisen” todennäköisyys $p = 0{,}39$,
- ”onnistumisten” lukumäärä $X = 3$.

d) Tapahtuma ”korkeintaan yksi sadepäivä” tarkoittaa, että sadepäiviä on yksi tai ei yhtään.

$$
\begin{aligned}
P(\text{korkeintaan yksi}) &= \underbrace{\binom{7}{1} \cdot 0{,}39 \cdot 0{,}61^6}_{\text{yksi sadepäivä}} + \underbrace{0{,}61^7}_{\substack{\text{ei sade–} \\ \text{päiviä}}} \\
&= 0{,}140\ldots + 0{,}031\ldots \\
&= 0{,}172\ldots \\
&\approx 0{,}17
\end{aligned}
$$

26.

Lasien pakkaaminen laatikkoon voidaan ajatella toistokokeena, jossa $n = 10$.

”Onnistuminen” tarkoittaa viallisen lasin pakkaamista, joten $p = 2{,}5\ \% = 0{,}025$.

Todennäköisyys, että pakataan ei-viallinen lasi, on $q = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$.

a) Laatikossa on 2 viallista ja 10 – 2 = 8 ei-viallista lasia.

$$\begin{aligned} P(\text{2 viallista kymmenestä}) &= \binom{10}{2} \cdot 0{,}025^2 \cdot 0{,}975^8 \\ &= 0{,}02296\ldots \approx 2{,}30\ \% \end{aligned}$$

b) Tapahtuma ”korkeintaan kaksi viallista” tarkoittaa, että viallisia on kaksi, yksi tai ei yhtään.

$P(\text{korkeintaan kaksi})$

$$= \overbrace{\binom{10}{2} \cdot 0{,}025^2 \cdot 0{,}975^8}^{\text{2 viallista}} + \overbrace{\binom{10}{1} \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}975^9}^{\text{1 viallinen}} + \overbrace{0{,}975^{10}}^{\substack{\text{ei yhtään} \\ \text{viallista}}}$$

$$= 0{,}0229\ldots + 0{,}1990\ldots + 0{,}7763$$

$$= 0{,}9983\ldots$$

$$\approx 99{,}8\ \%$$

c) Todennäköisyys, että laatikossa ei ole yhtään viallista lasia on

$$P(10 \text{ ei} - \text{viallista}) = 0{,}975^{10} = 0{,}7763 \ldots$$

Todennäköisyys ilmaisee myös niiden laatikoiden prosenttiosuuden, joissa ei ole yhtään viallista lasia. Näitä laatikoita voidaan arvioida olevan 1650 laatikon joukossa

$$0{,}7763 \ldots \cdot 1650 = 1280{,}94 \ldots \approx 1281 \text{ (laatikkoa).}$$

27.

Binomitodennäköisyys $\binom{\mathbf{16}}{\mathbf{7}} \cdot \mathbf{0{,}60^7} \cdot 0{,}40^9$ voidaan ajatella liittyvän sellaiseen toistokokeeseen, jossa

- toistojen lukumäärä on n = **16**
- onnistumisia on k = **7**; tällöin epäonnistumisia on 16 – 7 = **9**
- onnistumisen todennäköisyys yhdessä toistossa on p = **0,60**

Esimerkiksi: Teemu harrastaa koripalloa. Hän onnistuu vapaaheitossa saamaan korin **60** % todennäköisyydellä. Harjoituksissa Teemu heittää **16** vapaaheittoa peräkkäin. Millä todennäköisyydellä hän saa heitoista **7** koriin?

28.

Virheen todennäköisyys on $p = P(\text{virhe}) = 3{,}7\ \% = 0{,}037$.
Todennäköisyys, että merkki on oikein, on
$q = P(\text{oikein}) = 1 - 0{,}037 = 0{,}963$.

a) Todennäköisyys, että kaikki 6 merkkiä ovat oikein on kertolaskusäännön mukaan

$$P(6\ \text{oikein}) = 0{,}963^6 = 0{,}797\ldots \approx 0{,}80.$$

b) Todennäköisyys, että kaikki 6 merkkiä ovat virheellisiä on kertolaskusäännön mukaan

$$P(6\ \text{virhettä}) = 0{,}037^6 = 2{,}56\ldots \cdot 10^{-9} \approx 2{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

c) Tapahtuma ”ainakin kaksi merkkiä on väärin” tarkoittaa, että kaksi tai kolme tai neljä tai viisi tai kuusi merkkiä on väärin. Todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman avulla.

Vastatapahtuma on ”1 tai 0 merkkiä on väärin”. Vastatapahtuman todennäköisyys on

$$P(1 \text{ tai } 0 \text{ väärin})$$

$$= P(1 \text{ merkki } 6\text{:sta väärin}) + P(\text{kaikki merkit oikein})$$

$$= \binom{6}{1} \cdot 0{,}037 \cdot 0{,}963^5 + 0{,}963^6$$

$$= 0{,}183 + 0{,}797\,\ldots$$

$$= 0{,}981\ldots$$

Kysytyn tapahtuman todennäköisyys on

$$P(\text{ainakin } 2 \text{ väärin}) = 1 - P(1 \text{ tai } 0 \text{ väärin})$$

$$= 1 - 0{,}981\,\ldots$$

$$= 0{,}0185\,\ldots$$

$$\approx 0{,}019.$$

29.

Todennäköisyys, että satunnainen oppilas on vasenkätinen, on
p = 5,0 % = 0,05.

Todennäköisyys, että satunnainen oppilas ei ole vasenkätinen, on
q = 1 – 0,05 = 0,95.

a) Binomitodennäköisyys on

$$P(4\text{ vasenkätistä }32\text{:sta}) = \binom{32}{4} \cdot 0{,}05^4 \cdot 0{,}95^{28} = 0{,}0534\ldots \approx 0{,}053.$$

b) Tapahtuma ”korkeintaan kaksi” tarkoittaa, että vasenkätisiä on 2 tai 1 tai ei yhtään.

$$P(\text{korkeintaan kaksi})$$

$$= \overbrace{\binom{32}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{30}}^{\text{2 vasenkätistä}} + \overbrace{\binom{32}{1} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{31}}^{\text{1 vasenkätinen}} + \overbrace{0{,}95^{32}}^{\substack{\text{ei yhtään} \\ \text{vasenkätistä}}}$$

$$= 0{,}2661\ldots + 0{,}3262\ldots + 0{,}1937\ldots$$

$$= 0{,}786\ldots$$

$$\approx 0{,}79$$

c) Tapahtuma ”vähintään yksi” tarkoittaa, että vasenkätisiä on yksi tai kaksi tai kolme tai… tai 32. Todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman avulla.

Vastatapahtuma on ”ei yhtään vasenkätistä” (eli kaikki 32 ovat oikeakätisiä).

Kysytty todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
P(\text{vähintään yksi}) &= 1 - P(\text{ei yhtään}) \\
&= 1 - P(32 \text{ oikeakätistä}) \\
&= 1 - 0{,}95^{32} \\
&= 0{,}8062 \ldots \\
&\approx 0{,}81.
\end{aligned}
$$

30.

Todennäköisyys, että Pekka onnistuu heittämään kympin, on
$p = P(\text{kymppi}) = 8\ \% = 0{,}08$.

Todennäköisyys, että Pekka ei onnistu heittämään kymppiä, on
$q = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$.

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(1.\,\text{onnistuu ja 2. ja 3. ja 4. ja 5. ei onnistu}) &= 0{,}08 \cdot 0{,}92^4 \\ &= 0{,}057\ldots \approx 0{,}1. \end{aligned}$$

b) Binomitodennäköisyys on

$$P(1\ \text{onnistuu viidestä}) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92^4 = 0{,}286\ldots \approx 0{,}3$$

c) Kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{kaikki 5 onnistuu}) = 0{,}08^5 = 3{,}27\ldots \cdot 10^{-6} \approx 3 \cdot 10^{-6}.$$

d) Tapahtuma ”ainakin yhdellä tikalla” tarkoittaa, että onnistuneita heittoja on yksi tai kaksi tai kolme tai neljä tai viisi. Todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman avulla.

Vastatapahtuma on ”kaikki heitot epäonnistuvat”.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yksi}) &= 1 - P(\text{ei yhtään}) \\ &= 1 - 0{,}92^5 \\ &= 0{,}340\ \ldots \\ &\approx 0{,}3. \end{aligned}$$

Huomaa, että vastaus annetaan samalla tarkkuudella kuin lähtöarvo (8 %), siis yhden merkitsevän numeron tarkkuudella.

31.

Kysytään todennäköisyyttä tapahtumalle ”paikat riittävät ja lentoa ei peruta”. Tapahtuma sisältää kaksi riippumatonta tapahtumaa:

A = ”paikat riittävät”
B = ”lentoa ei peruta”

Lasketaan ensin todennäköisyys tapahtumalle *A.*

Lennolle saapuminen voidaan ajatella toistokokeena, jossa $n = 62$.

Keskimäärin 95 % saapuu lennolle, joten

$p = P$(saapuu) = 0,95 ja

$q = P$(ei saavu) = 1 – 0,95 = 0,05.

Paikat riittävät, jos korkeintaan 60 ihmistä saapuu. Tapahtuman A todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman kautta.

Vastatapahtuma on ”61 tai 62 ihmistä saapuu”.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(61 \text{ saapuu } 62\text{: sta}) - P(62 \text{ saapuu } 62\text{: sta}) \\ &= 1 - \binom{62}{61} \cdot 0{,}95^{61} \cdot 0{,}05 + 0{,}95^{62} \\ &= 1 - 0{,}1356 \ldots - 0{,}0415 \ldots \\ &= 0{,}8227 \ldots \end{aligned}$$

Lento perutaan todennäköisyydellä 1,3 % = 0,013. Tapahtuman B todennäköisyys on

$$P(B) = 1 - 0{,}013 = 0{,}987.$$

Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön nojalla

$$
\begin{aligned}
P(\text{paikat riittävät } \textbf{ja} \text{ lentoa ei peruta}) &= P(A) \cdot P(B) \\
&= 0{,}8227\ldots \cdot\ 0{,}987 \\
&= 0{,}812\ldots \approx 0{,}81.
\end{aligned}
$$

32.

Kysytään todennäköisyyttä tapahtumalle ”autoille löytyy paikat ja pääesiintyjä ei peruuta”. Tapahtuma sisältää kaksi riippumatonta tapahtumaa:

A = ”autoille löytyy paikat”
B = ”pääesiintyjä ei peruuta”

Lasketaan ensin todennäköisyys tapahtumalle A.

Parkkipaikan etsiminen voidaan ajatella toistokokeena, jossa $n = 210$.

Jokaisen paikan kohdalla siis kysytään, onko paikka vapaa.

”Onnistumistodennäköisyys” on

$p = P$(paikka on vapaa) = 0,015 ja
$q = P$(paikka on varattu) = 1 – 0,015 = 0,985.

Molemmille autoille löytyy paikka, jos vapaita paikkoja on vähintään 2. Tapahtuman A todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman kautta. Vastatapahtuma on ”1 tai 0 vapaata paikkaa”.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(1\text{ vapaa }210\text{: sta}) - P(\text{kaikki }210\text{ varattuja}) \\ &= 1 - \binom{210}{1} \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}985^{209} - 0{,}985^{210} \\ &= 1 - 0{,}1338\ldots - 0{,}0418\ldots \\ &= 0{,}8243\ldots \end{aligned}$$

Pääesiintyjä peruu tulonsa todennäköisyydellä 0,040. Tapahtuman B todennäköisyys on

$$P(B) = 1 - 0{,}040 = 0{,}96.$$

Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön nojalla

$$
\begin{aligned}
P(\text{autoille paikat } \textbf{ja} \text{ pääesiintyjä ei peruuta}) &= P(A) \cdot P(B) \\
&= 0{,}8243\ldots \cdot 0{,}96 \\
&= 0{,}7913\ldots \\
&\approx 0{,}79.
\end{aligned}
$$

33.

Kysytään todennäköisyyttä tapahtumalle ”kerho järjestetään ja kerho saa elokuvaliput”. Tapahtuma sisältää kaksi riippumatonta tapahtumaa:

A = ”kerho järjestetään”
B = ”kerho saa elokuvaliput”

Lasketaan ensin todennäköisyys tapahtumalle A.

Iltapäiväkerhoon osallistuminen voidaan ajatella toistokokeena, jossa $n = 20$.

Keskimäärin 4,5 % peruu osallistumisen, joten

$p = P$(peruuttaa) = 0,045 ja
$q = P$(ei peruuta) = 1 – 0,045 = 0,955.

Kerho järjestetään, jos osallistujia on vähintään 18 eli peruuttajia on korkeintaan 2.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\text{korkeintaan 2 peruuttaa}) \\ &= P(\text{2 peruuttaa 20: sta}) + P(\text{1 peruuttaa 20: sta}) \\ &\qquad + P(\text{kukaan ei peruuta}) \\ &= \binom{20}{2} \cdot 0{,}045^2 \cdot 0{,}955^{18} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}955^{19} + 0{,}955^{20} \\ &= 0{,}1679 \ldots + 0{,}3752 \ldots + 0{,}3981 \ldots \\ &= 0{,}9413 \ldots \end{aligned}$$

Kerho saa elokuvaliput todennäköisyydellä 0,10 eli tapahtuman B todennäköisyys on

$$P(B) = 0{,}10.$$

Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön nojalla

$$\begin{aligned} P(\text{kerho järjestetään } \textbf{ja} \text{ kerho saa liput}) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= 0{,}9413\ldots \cdot 0{,}10 = 0{,}0941\ldots \\ &\approx 0{,}094. \end{aligned}$$

34.

Tapahtuma ”kolme tikkaa tauluun ja neljä kuulaa aukkoon” sisältää kaksi riippumatonta tapahtumaa:

A = ”kolme tikkaa tauluun”
B = ”neljä kuulaa aukkoon”

Lasketaan ensin todennäköisyys tapahtumalle *A.*

Tikanheitto voidaan ajatella toistokokeena, jossa $n = 5$,
$p = P$(tikka osuu tauluun) = 0,45 ja
$q = P$(tikka ei osu tauluun) = 1 – 0,45 = 0,55.

$$P(A) = P(3 \text{ tikkaa viidestä tauluun}) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}45^3 \cdot 0{,}55^2 = 0{,}275\ldots$$

Lasketaan sitten todennäköisyys tapahtumalle *B.*

Kuulanheitto voidaan ajatella toistokokeena, jossa $n = 12$,
$p = P$(kuula osuu aukkoon) = 0,17 ja
$q = P$(kuula ei osu aukkoon) = 1 – 0,17 = 0,83.

$$P(B) = P(4 \text{ kuulaa 12: sta aukkoon}) = \binom{12}{4} \cdot 0{,}17^4 \cdot 0{,}83^8 = 0{,}093\ldots$$

Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön nojalla

$$P(\text{A } \textbf{ja} \text{ B}) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}275\ldots \cdot 0{,}093\ldots = 0{,}0256\ldots \approx 0{,}026.$$

35.

a) Kolikon heitto on toistokoe, jossa $n = 18$. Todennäköisyys, että onnistutaan, on

$p = P(\text{kruuna}) = 1 – 0,57 = 0,43$ ja
$q = P(\text{klaava}) = 0,57$.

Todennäköisyys, että saadaan 18 heitolla 7 kruunaa ja loput
18 – 7 = 11 ovat klaavoja, on

$$P(7\text{ kruunaa }18\text{: sta}) = \binom{18}{7} \cdot 0{,}43^{7} \cdot 0{,}57^{11} = 0{,}178\,\ldots \approx 0{,}18.$$

b) Merkitään heittojen lukumäärää kirjaimella *n.* Muodostetaan lauseke tapahtuman ”7 heittoa *n* heitosta on kruunia” todennäköisyydelle.

$$P(7\text{ kruunaa }n\text{: sta}) = \binom{n}{7} \cdot 0{,}43^{7} \cdot 0{,}57^{n-7}.$$

Tämän tapahtuman todennäköisyys on yli 10 % = 0,10 eli

$$\binom{n}{7} \cdot 0{,}43^{7} \cdot 0{,}57^{n-7} > 0{,}10.$$

Etsitään kokeilemalla pienin toistojen lukumäärä *n,* jolla epäyhtälö toteutuu. Heitoista 7 on kruunia, joten heittoja on vähintään 7. Siis $n \geq 7$. Taulukoidaan todennäköisyyden arvoja alkaen arvosta $n = 7$.

n	**Todennäköisyys**
7	$\binom{7}{7} \cdot 0{,}43^7 \cdot 0{,}57^0 = 0{,}43^7 = 0{,}0027\ldots < 0{,}10$
8	$\binom{8}{7} \cdot 0{,}43^7 \cdot 0{,}57^1 = 0{,}0123\ldots < 0{,}10$
9	$0{,}0317\ldots < 0{,}10$
10	$0{,}0604\ldots < 0{,}10$
11	$0{,}0946\ldots < 0{,}10$
12	$\mathbf{0{,}1295\ldots > 0{,}10}$

Todennäköisyyden arvot lasketaan esimerkiksi laskinohjelmistolla.

- toistojen lukumäärä n vaihtelee
- $p = 0{,}43$
- onnistumisia on $X = 7$

Pienin tarvittava määrä heittoja, joka tarvitaan ehdon toteutumiseen, on 12.

Huomaa, että ratkaisussa on oltava näkyvillä kaikkien aikaisempien heittojen todennäköisyydet. Muuten jää perustelematta, että lukumäärä 12 on pienin ehdon toteutumiseen.

36.

a) Pesien tarkastus on toistokoe, jossa n = 50. Todennäköisyys, että onnistutaan, on

$p = P(\text{asuttu}) = 53\ \% = 0{,}53$ ja

$q = P(\text{ei-asuttu}) = 1 - 0{,}53 = 0{,}47$.

Tarkastetuista 50 pesästä puolet on asuttuja silloin, kun $\frac{50}{2} = 25$ pesää on asuttuja ja 25 pesää ei ole asuttuja.

$$P(25 \text{ pesää } 50\text{: sta}) = \binom{50}{25} \cdot 0{,}53^{25} \cdot 0{,}47^{25} = 0{,}1025 \ldots \approx 0{,}10.$$

b) Merkitään tarkastettavien pesien lukumäärää kirjaimella *n.* Muodostetaan lauseke tapahtuman ”20 pesää *n* pesästä on asuttuja” todennäköisyydelle.

$$P(20 \text{ pesää } n\text{: sta}) = \binom{n}{20} \cdot 0{,}53^{20} \cdot 0{,}47^{n-20}.$$

Tämän tapahtuman todennäköisyys on yli 1 % = 0,01 eli

$$\binom{n}{20} \cdot 0{,}53^{20} \cdot 0{,}47^{n-20} > 0{,}01.$$

Etsitään kokeilemalla pienin lukumäärä *n,* jolla epäyhtälö toteutuu. Pesistä 20 on asuttuja, joten pesiä on vähintään 20. Siis $n \geq 20$. Taulukoidaan todennäköisyyden arvoja alkaen arvosta $n = 20$.

n	**Todennäköisyys**
20	$\binom{20}{20} \cdot 0{,}53^{20} \cdot 0{,}47^{0} = 0{,}0000030 \ldots < 0{,}01$
21	$\binom{21}{20} \cdot 0{,}53^{20} \cdot 0{,}47^{1} = 0{,}000030 \ldots < 0{,}01$
22	0,000156… < 0,01
23	0,000562… < 0,01
24	0,00158… < 0,01
25	0,00372… < 0,01
26	0,00759… < 0,01
27	**0,0137… > 0,01**

Todennäköisyyden arvot lasketaan esimerkiksi laskinohjelmistolla.

- toistojen lukumäärä n vaihtelee
- $p = 0{,}53$
- onnistumisia on $X = 20$

Pienin tarvittava määrä tarkistettavia pesiä, joka tarvitaan ehdon toteutumiseen, on 27.

Huomaa, että ratkaisussa on oltava näkyvillä kaikkien aikaisempien tilanteiden todennäköisyydet. Muuten jää perustelematta, että lukumäärä 27 on pienin ehdon toteutumiseen.

37.

a) $p = P(\text{sairastuu}) = 0{,}1\ \% = 0{,}001$

$q = P(\text{ei sairastu}) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$

Binomitodennäköisyys on

$$P(2 \text{ sairastuu } 45\text{: sta}) = \binom{45}{2} \cdot 0{,}001^2 \cdot 0{,}999^{43}$$
$$= 0{,}000948 \ldots \approx 0{,}0009.$$

b) Merkitään henkilöiden lukumäärää kirjaimella *n.* Muodostetaan lauseke tapahtuman ”2 sairastunutta *n* henkilön joukossa” todennäköisyydelle.

$$P(2 \text{ sairastunutta } n\text{: sta}) = \binom{n}{2} \cdot 0{,}001^2 \cdot 0{,}999^{n-2}.$$

Tämän tapahtuman todennäköisyys on yli 2 % = 0,02 eli

$$\binom{n}{2} \cdot 0{,}001^2 \cdot 0{,}999^{n-2} > 0{,}02.$$

Etsitään kokeilemalla pienin lukumäärä *n,* jolla epäyhtälö toteutuu. Henkilöistä 2 on sairastunut, joten henkilöitä on vähintään 2. Siis $n \geq 2$. Taulukoidaan todennäköisyyden arvoja alkaen arvosta $n = 2$ taulukkolaskentaohjelmassa.

Sarakkeeseen A on kirjoitettu toistojen lukumäärät n eli juokseva numerointi alkaen luvusta 2.

	A	B
1	2	0,00000100
2	3	0,00000300
3	4	0,00000599
4	5	0,00000997
5	6	0,00001494
6	7	0,00002090
7	8	0,00002783
8	9	0,00003575
9	10	0,00004464
10	11	0,00005451
11	12	0,00006534
12	13	0,00007715
13	14	0,00008991
14	15	0,00010364

- Soluun B1 on kirjoitettu binomitodennäköisyyden laskukaava $\binom{A1}{2} \cdot 0{,}001^2 \cdot 0{,}999^{A1-2}$
  Toistojen lukumäärä n siis viittaa solussa A1 olevaan lukuun.
- Laskukaava on kopioitu sarakkeessa B alaspäin.

Binomikerroin syötetään taulukkolaskentasovelluksesta riippuen eri muodoissa, esimerkiksi Kombinaatio(A1;2) tai Binomikerroin(A1,2).
Huomaa: Esimerkiksi GeoGebra-ohjelmiston taulukkolaskentasovelluksessa on komento binomitodennäköisyyden laskemiselle suoraan: Binomijakauma(n,p,k,false)

- n =toistojen lukumäärä eli n = A1
- $p = 0{,}001$
- k = ”onnistumisten” lukumäärä eli $k = 2$
- viimeinen kohta ”false” tarkoittaa pistetodennäköisyyttä

Siis, jos käytät GeoGebran laskentataulukkoa, kirjoita soluun B1 kaava:
=Binomijakauma(A1,0.001,2,false)

222	223	0,01984270
223	224	**0,02000144**
224	225	0,02016064

Todennäköisyys sarakkeessa B ylittää ensimmäisen kerran 2 %, kun henkilöiden lukumäärä on $n = 224$.

Työyhteisessä pitäisi olla minimissään 224 henkilöä, jotta todennäköisyys, että joukossa on kaksi sairastunutta olisi vähintään 2 %.

38.

a) Toistojen lukumäärä on $n = 7$.

$p = P(\text{silmäluku 6}) = \frac{1}{6}$

$q = P(\text{muu silmäluku}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

$$P(4\text{ onnistumista }7\text{: stä}) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}0156\ldots \approx 0{,}016.$$

b) Merkitään heittojen lukumäärää kirjaimella *n.* Muodostetaan lauseke tapahtuman ”silmäluku 6 esiintyy neljä kertaa *n* heiton sarjassa” todennäköisyydelle.

$$P(4\text{ onnistumista }n\text{: sta}) = \binom{n}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-4}.$$

Tämän tapahtuman todennäköisyys on yli 20 % = 0,2 eli

$$\binom{n}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-4} > 0{,}2.$$

Etsitään kokeilemalla pienin lukumäärä *n,* jolla epäyhtälö toteutuu. Heitosta neljällä tulee silmäluku 6, joten heittoja on vähintään 4. Siis $n \geq 4$. Taulukoidaan todennäköisyyden arvoja alkaen arvosta $n = 4$. Taulukointi voidaan tehdä esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmassa.

Sarakkeeseen A on kirjoitettu heittojen lukumäärät n eli juokseva numerointi alkaen luvusta 4.

	A	B
1	4	0.00077
2	5	0.00322
3	6	0.00804
4	7	0.01563
5	8	0.02605
6	9	0.03907
7	10	0.05427
8	11	0.07106
9	12	0.08883
10	13	0.10692
11	14	0.12474
12	15	0.14175
13	16	0.1575
14	17	0.17164
15	18	0.1839
16	19	0.19412
17	20	**0.2022**

- Soluun B1 on kirjoitettu binomitodennäköisyyden laskukaava $\binom{A1}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{A1-4}$.
  Toistojen lukumäärä n siis viittaa soluun A1.
- Laskukaava on kopioitu sarakkeessa B alaspäin.

Binomikerroin syötetään taulukkolaskenta-sovelluksesta riippuen eri muodoissa, esimerkiksi Kombinaatio(A1;4) tai Binomikerroin(A1,4).

Esimerkiksi GeoGebra-ohjelmiston taulukkolaskentasovelluksessa on komento binomitodennäköisyyden laskemiselle suoraan: Binomijakauma(n,p,k,false)

- n =toistojen lukumäärä eli n = A1
- $p = 1/6$
- k = ”onnistumisten” lukumäärä eli $k = 4$
- viimeinen kohta ”false” tarkoittaa pistetodennäköisyyttä

Siis, jos käytät GeoGebran laskentataulukkoa, kirjoita soluun B1 kaava =Binomijakauma(A1,1/6,4,false)

Pienin tarvittava määrä heittoja, jotka tarvitaan ehdon toteutumiseen, on 20.

Huomaa, että ratkaisussa on oltava näkyvillä kaikkien aikaisempien tilanteiden todennäköisyydet. Muuten jää perustelematta, että lukumäärä 20 on pienin ehdon toteutumiseen.

c) Tapahtuma *A* = ”alle 5 heittoa riittää” tarkoittaa, että neljän heiton aikana tulee ”toinen kuutonen” eli yhteensä kaksi kuutosta.

Tapa 1:

Taulukoidaan tapahtumalle *A* suotuisat tilanteet ja niiden todennäköisyydet. Merkitään:

O = ”saadaan silmäluku 6”

E = ”saadaan muu silmäluku, eli 1,2,3,4 tai 5”

	Tilanne	Todennäköisyys
Kaksi heittoa riittää	OO	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$
Tarvitaan kolme heittoa	EOO OEO 2 eri tapausta	$2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{108}$
Tarvitaan neljä heittoa	EEOO EOEO OEEO 3 eri tapausta	$3\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{432}$

Tapahtuman *A* todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön mukaan laskemalla eri tapausten todennäköisyydet yhteen.

$$P(\text{alle 5 heittoa riittää})=\frac{1}{36}+\frac{5}{108}+\frac{25}{432}=\frac{19}{144}=0{,}1319\ldots\approx 0{,}13.$$

Tapa 2:

Lasketaan tapahtuman A todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

Vastatapahtuma on ”neljä heittoa ei riitä” eli ”neljän heiton aikana tulee korkeintaan yksi kuutonen”.

Vastatapahtuman todennäköisyys on

$$
\begin{aligned}
P(\text{korkeintaan 1 kuutonen}) &= P(\text{1 kuutonen}) + P(\text{ei yhtään kuutosta}) \\
&= \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\
&= 0{,}3858\ldots + 0{,}4822 \\
&= 0{,}8680\ldots
\end{aligned}
$$

Tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = 1 - 0{,}8680\ldots = 0{,}1319\ldots \approx 0{,}13.$$

39.

Binomitodennäköisyyden ilmaiseva lauseke on muotoa

$$\binom{\boldsymbol{n}}{k} \cdot \boldsymbol{p}^k \cdot \boldsymbol{q}^{n-k}.$$

- binomikertoimessa $\binom{n}{k}$ luvut n ja k ovat luonnollisia lukuja ja $\boldsymbol{n} \geq k$
- luvut p ja q ilmaisevat todennäköisyyttä ja $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p}$ eli $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = 1$
- lausekkeessa esiintyvien potenssien eksponenttien summa on $k + (n - k) = \boldsymbol{n}$

Lausekkeet a, b ja c eivät ilmaise binomitodennäköisyyttä.

Lauseke a: Kerroin $\binom{2}{7}$ ei ole binomikerroin koska 2 < 7.

Lauseke b: Lausekkeessa esiintyvien potenssien eksponenttien 7 ja 2 summa on 7 + 2 = 9 ≠ 7.

Lauseke c: Lukujen 0,30 ja 0,40 summa on 0,30 + 0,40 = 0,70 ≠ 1.

40.

Salli tekee virheen laskiessaan tapahtuman ”viestissä tasan yksi virhe” todennäköisyyttä. Salli on laskenut todennäköisyyden yhdelle suotuisalle tilanteelle: ”ensimmäinen merkki väärin ja loput 5 merkkiä oikein”, mutta jättänyt muut suotuisat tilanteet huomioimatta.

Väärä merkki voi 8-kirjaimisessa viestissä olla kahdeksan eri merkin kohdalla. Tapahtumalle ”viestissä tasan yksi virhe” suotuisia tilanteita on siis 8. Jokaisen suotuisan tilanteen todennäköisyys on $0{,}12 \cdot 0{,}88^7$. Kokonaistodennäköisyys saadaan laskemalla suotuisien tilanteiden todennäköisyydet yhteen. Korjattu ratkaisu on:

$$8 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88^7 = 0{,}3923\ldots \approx 0{,}39.$$

Todennäköisyys voidaan laskea myös binomitodennäköisyytenä.

$$P(\text{yksi kahdeksasta väärin}) = \binom{8}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^7 = 0{,}3923\ldots \approx 0{,}39.$$

41.

Sairastumiset voidaan ajatella toistokokeena, jossa $n = 8$.

”Onnistuminen” vastaa tilannetta, että henkilö ei sairastu.

$p = P(\text{ei sairastu}) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$

$q = P(\text{sairastuu}) = 0{,}72$

Sairastuneiden lukumäärä k on 0 – 8. Taulukoidaan binomitodennäköisyydet.

Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään $n = 8$, $p = 0{,}28$ ja ”onnistumisten” lukumäärä k.

k	$P(A)$
0	$\binom{8}{0} \cdot 0{,}28^0 \cdot 0{,}72^8 = 0{,}72^8 = 0{,}07222\ldots \approx 0{,}072$
1	$\binom{8}{1} \cdot 0{,}28^1 \cdot 0{,}72^7 = 0{,}2246\ldots \approx 0{,}22$
2	$0{,}3058\ldots \approx 0{,}31$
3	$0{,}2378\ldots \approx 0{,}24$
4	$0{,}1156\ldots \approx 0{,}12$
5	$0{,}0359\ldots \approx 0{,}036$
6	$0{,}00699\ldots \approx 0{,}0070$
7	$0{,}000777\ldots \approx 0{,}00078$
8	$0{,}0000377\ldots \approx 0{,}000038$

a) Tapahtuman ”8 pelaajasta 2 ei sairastu” todennäköisyys on suurin, 0,31. Todennäköisimmin siis 2 pelaajaa välttää sairastumisen.

b) Altistuneista 72 % sairastuu ja voidaan olettaa, että kaikki pelaajat altistuvat.

$$0{,}72 \cdot 8 = 5{,}76 \approx 6$$

On siis oletettavissa, että kahdeksasta pelaajasta 6 sairastuu (ja kaksi välttää sairastumisen).

42.

a) n = 15

p = P(myöhästyy) = 0,15

q = P(ei myöhästy) = 1 – 0,15 = 0,85

$$\begin{aligned} P(5 \text{ myöhästymistä } 15\text{: sta}) &= \binom{15}{5} \cdot 0{,}15^5 \cdot 0{,}85^{10} \\ &= 0{,}0448 \ldots \approx 0{,}045 \end{aligned}$$

b) n = 15

p = P(myöhästyy) = 0,15

q = P(ei myöhästy) = 1 – 0,15 = 0,85

Tapahtuma ”on ajoissa ainakin 13 kertaa” tarkoittaa, että ”myöhästyy korkeintaan 2 kertaa” eli ”myöhästyy 0 tai 1 tai 2 kertaa”.

$$\begin{aligned} &P(\text{korkeintaan } 2) \\ &= P(2 \text{ myöhästymistä}) + P(1 \text{ myöhästyminen}) \\ &\qquad + P(\text{ei myöhästymisiä}) \\ &= \binom{15}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{13} + \binom{15}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{13} + 0{,}85^{13} \\ &= 0{,}2856 \ldots + 0{,}2312 \ldots + 0{,}0873 \ldots \\ &= 0{,}6042 \ldots \\ &\approx 0{,}60 \end{aligned}$$

c) $n = 15$

”Onnistuminen” kannattaa nyt ajatella tapahtumana ”professori on ajoissa”.

$p = P(\text{ajoissa}) = 0{,}85$

$q = P(\text{myöhästyy}) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

Yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned}
&P(\text{ajoissa 5 tai 8 kertaa})\\
&= P(\text{ajoissa 5 kertaa}) + P(\text{ajoissa 8 kertaa})\\
&= \binom{15}{5} \cdot 0{,}85^5 \cdot 0{,}15^{10} + \binom{15}{8} \cdot 0{,}85^8 \cdot 0{,}15^7\\
&= 7{,}683\ldots \cdot 10^{-6} + 0{,}00299\ldots\\
&= 0{,}00300\ldots\\
&\approx 0{,}0030
\end{aligned}$$

43.

Tapahtuma ”islanninponeista puolet ja suomenhevosista puolet sairastuu” sisältää kaksi riippumatonta tapahtumaa:

A = ”islanninponeista puolet sairastuu”
B = ”suomenhevosista puolet sairastuu”

Lasketaan ensin todennäköisyys tapahtumalle *A.*

Islanninponien sairastuminen ihottumaan voidaan ajatella toistokokeena, jossa *n* = 14, *p* = *P*(poni sairastuu) = 16,2 % = 0,162 ja *q* = *P*(poni ei sairastu) = 1 – 0,162 = 0,838.

Poneista puolet sairastuu, kun $\frac{14}{2} = 7$ ponia sairastuu.

$$P(A) = P(7 \text{ ponia } 14\text{: sta}) = \binom{14}{7} \cdot 0{,}162^7 \cdot 0{,}838^7 = 0{,}00291 \ldots$$

Lasketaan sitten todennäköisyys tapahtumalle *B.*

Suomenhevosten sairastuminen ihottumaan voidaan ajatella toistokokeena, jossa *n* = 6, *p* = *P*(hevonen sairastuu) = 14,3 % = 0,143 ja *q* = *P*(hevonen ei sairastu) = 1 – 0,143 = 0,857.

Hevosista puolet sairastuu, kun $\frac{6}{2} = 3$ hevosta sairastuu.

$$P(B) = P(3 \text{ hevosta kuudesta}) = \binom{6}{3} \cdot 0{,}143^3 \cdot 0{,}857^3 = 0{,}0368 \ldots$$

Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön nojalla

$$\begin{aligned} P(\text{A } \textbf{ja} \text{ B}) = P(A) \cdot P(B) &= 0{,}00291 \ldots \cdot 0{,}0368 \ldots \\ &= 0{,}0001073 \ldots \approx 1{,}1 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

44.

a) Mansikoiden pakkaaminen rasioihin on toistokoe, jossa $n = 20$.

$p = P(\text{pilaantunut}) = 0{,}09$ ja

$q = P(\text{ei-pilaantunut}) = 1 – 0{,}09 = 0{,}91$.

Tapahtuma ”rasia palautuu” tarkoittaa tapahtumaa ”enemmän kuin 4 pilaantunutta”. Pilaantuneita on enemmän kuin 4 silloin, kun niitä on 5 tai 6 tai 7 tai … tai 20.

Tapahtuman ”rasia palautuu” todennäköisyys kannattaa laskea vastatapahtuman avulla.

$$P(\text{enemmän kuin 4 pilaantunutta 20: sta})$$

$$= 1 - P(\text{korkeintaan 4 pilaantunutta})$$

$$= 1 - \underbrace{\binom{20}{4} \cdot 0{,}09^4 \cdot 0{,}81^{16}}_{\text{4 pilaantunutta}} - \underbrace{\binom{20}{3} \cdot 0{,}09^3 \cdot 0{,}81^{17}}_{\text{3 pilaantunutta}} - \underbrace{\binom{20}{2} \cdot 0{,}09^2 \cdot 0{,}81^{18}}_{\text{2 pilaantunutta}}$$
$$- \underbrace{\binom{20}{1} \cdot 0{,}09^1 \cdot 0{,}81^{19}}_{\text{1 pilaantunut}} - \underbrace{0{,}91^{20}}_{\substack{\text{ei} \\ \text{pilaantuneita}}}$$

$$= 1 - 0{,}970$$

$$= 0{,}0290$$

$$\approx 0{,}03 = 3\ \%$$

Rasioista voidaan odottaa palautuvan 3 %.

b) Merkitään mansikoiden lukumäärää kirjaimella *n.* Muodostetaan lauseke tapahtuman ”4 pilaantunutta *n* mansikan rasiassa” todennäköisyydelle.

$$P(4 \text{ pilaantunutta } n\text{: sta}) = \binom{n}{4} \cdot 0{,}09^4 \cdot 0{,}91^{n-4}.$$

Tämän tapahtuman todennäköisyys on korkeintaan 4 % = 0,04 eli

$$\binom{n}{4} \cdot 0{,}09^4 \cdot 0{,}91^{n-4} \leq 0{,}04.$$

Etsitään kokeilemalla suurin mansikkamäärä *n,* jolla epäyhtälö toteutuu. Mansikoita on alle 20 eli $n < 20$. Niistä pilaantuneita on neljä, joten mansikoita on vähintään 4. Siis $4 \leq n < 20$. Taulukoidaan todennäköisyyden arvoja alkaen arvosta $n = 4$ arvoon $n = 19$ saakka.

n	**Todennäköisyys tapahtumalle ”4 pilaantunutta”**
4	$\binom{4}{4} \cdot 0{,}09^4 \cdot 0{,}91^0 = 0{,}09^4$ $= 0{,}000065 \ldots \leq 0{,}04$
5	$\binom{5}{4} \cdot 0{,}09^5 \cdot 0{,}91^1 = 0{,}00029 \ldots \leq 0{,}04$
6	$0{,}0081 \ldots \leq 0{,}04$
7	$0{,}0017 \ldots \leq 0{,}04$
8	$0{,}0031 \ldots \leq 0{,}04$
9	$0{,}0051 \ldots \leq 0{,}04$
10	$0{,}0078 \ldots \leq 0{,}04$
11	$0{,}0111 \ldots \leq 0{,}04$
12	$0{,}0152 \ldots \leq 0{,}04$
13	$0{,}0200 \ldots \leq 0{,}04$
14	$0{,}0255 \ldots \leq 0{,}04$
15	$0{,}0317 \ldots \leq 0{,}04$
16	$\mathbf{0{,}0385 \ldots} \leq 0{,}04$
17	$0{,}0458 \ldots > 0{,}04$
18	$0{,}0536 \ldots > 0{,}04$
19	$0{,}0617 \ldots > 0{,}04$

Todennäköisyyden arvot lasketaan esimerkiksi laskinohjelmistolla.

- toistojen lukumäärä n vaihtelee
- $p = 0{,}09$
- ”onnistumisia” on $X = 4$

Suurin määrä mansikoita, joka rasiaan voidaan pakata niin, että ehto toteutuu, on 16.

Huomaa, että ratkaisussa on oltava näkyvillä kaikkien mansikkamäärien todennäköisyydet. Muuten jää perustelematta, että lukumäärä 16 on suurin ehdon toteuttava määrä.

45.

Koriin heitot voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä $n = 4$.

Merkitään ”onnistumisen” todennäköisyyttä kirjaimella *p.* Siis

$p = P$(Lauri heittää korin)

$q = P$(heitto menee ohi) $= 1 - p$

Tapahtuman ”neljästä heitosta kolme koriin” todennäköisyys on

$$P(\text{neljästä 3 koriin}) = \binom{4}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^1$$
$$= 4 \cdot p^3 \cdot (1-p)$$

Tiedetään, että tämän tapahtuman todennäköisyys on 0,09. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *p.*

$$4 \cdot p^3 \cdot (1-p) = 0{,}09$$

Laskinohjelmistolla ratkaisuksi saadaan $p = 0{,}3212\ldots \approx 0{,}32$ tai $p = 0{,}9757\ldots \approx 0{,}98$.

Lauri saa yksittäisen vapaaheiton koriin todennäköisyydellä **0,32** tai **0,98**.

Annetuilla tiedoilla tehtävällä on siis kaksi ratkaisua.

Ratkaisu $p =$ **0,32** tarkoittaa, että Lauri heittää vapaaheiton koriin todennäköisyydellä **0,32** eli **32** % Laurin heitoista (noin joka kolmas heitto) menee koriin.

Toinen ratkaisu $p =$ **0,98** tarkoittaa, että Lauri heittää vapaaheiton koriin todennäköisyydellä **0,98** eli **98** % Laurin heitoista (melkein kaikki heitot) menevät koriin.

1.3 Binomijakauma

46.

Satunnaismuuttuja X = ”silmäluvun 4 esiintymiskerrat 10 heiton sarjassa”.

Toistokoe, jossa $n = 10$ ja onnistumisen todennäköisyys on $p = P(\text{silmäluku } 4) = \frac{1}{6}$.

Muuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{6})$.

a) Lasketaan tapahtuman ”$X = 3$” todennäköisyys.

$$P(X = 3) = 0{,}155... \approx 0{,}16$$

Laskinohjelmiston binomijakauma-toimintoon syötetään: $n = 10$, $p = \frac{1}{6}$ ja muuttujan arvo $X = 3$.

b) Lasketaan tapahtuman ”$X = 3$ tai $X = 4$” eli tapahtuman ” $3 \leq X \leq 4$” todennäköisyys.

$$P(3 \leq X \leq 4) = 0{,}209... \approx 0{,}21$$

Laskinohjelmiston binomijakauma-toimintoon syötetään: $n = 10$, $p = \frac{1}{6}$ alaraja 3 ja yläraja 4.

c) Lasketaan tapahtuman ”$X \geq 5$” eli tapahtuman ” $5 \leq X \leq 7$” todennäköisyys.

$$P(5 \leq X \leq 7) = 0{,}0154\ldots \approx 0{,}015$$

Laskinohjelmiston binomijakauma-toimintoon syötetään: $n = 10$, $p = \frac{1}{6}$ alaraja 5 ja yläraja 7.

Todennäköisyydet voidaan määrittää myös esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyyslaskuri-sovelluksella. Laskurissa valitaan vaihtoehto ”Binomijakauma” ja syötetään n = 10 ja p = 1/6. Pyöristystarkkuus kannattaa valita riittävän tarkaksi, esimerkiksi viiteen desimaaliin, ettei b- ja c-kohtien yhdistettyjen tapahtumien todennäköisyyksiin tule pyöristysvirhettä.

47.

Satunnaismuuttuja X = ”borrelioosia kantavien punkkien lukumäärä 8 punkin joukossa”.

Toistokoe, jossa $n = 8$ ja onnistumisen todennäköisyys on $p = P$(kantaa borrelioosia) = 0,25.

Muuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(8, 0{,}25)$.

a) Lasketaan tapahtuman ”$X = 3$” todennäköisyys.

$$P(X = 3) = 0{,}207... \approx 0{,}21$$

Laskinohjelmiston binomijakauma-toimintoon: syötetään $n = 8$, $p = 0{,}25$ ja muuttujan arvo $X = 3$.

b) Lasketaan tapahtuman ”$X \leq 3$” eli tapahtuman ”$0 \leq X \leq 3$” todennäköisyys.

$$P(0 \leq X \leq 3) = 0{,}886... \approx 0{,}89$$

Laskinohjelmiston binomijakauma-toimintoon syötetään: $n = 8$, $p = 0{,}25$, alaraja 0 ja yläraja 3.

c) ”Vähintään puolet” vastaa tapahtumaa ”$X \geq 4$” eli tapahtumaa ”$4 \leq X \leq 8$”. Lasketaan tapahtuman ”$4 \leq X \leq 8$” todennäköisyys.

$$P(4 \leq X \leq 8) = 0{,}113... \approx 0{,}11$$

Laskinohjelmiston binomijakauma-toimintoon syötetään: $n = 8$, $p = 0{,}25$, alaraja 4 ja yläraja 8.

Todennäköisyydet voidaan määrittää myös esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella. Laskurissa valitaan vaihtoehto ”Binomijakauma” ja syötetään $n = 8$ ja $p = 0.25$.

48.

Satunnaismuuttuja X = ”onnistuneiden heittojen lukumäärä 12 heiton sarjassa”.

a) Samaa satunnaisilmiötä (koriin heittoa) toistetaan useita kertoja: n = 12. Onnistumisen, eli korin, todennäköisyys on joka heitolla sama: p = 0,71. Kyseessä on siis toistokoe.

Huomautus: tässä siis oletetaan, että heitot ovat toisistaan riippumattomia eli että korin todennäköisyys on joka heitolla sama.

Satunnaismuuttuja X ilmaisee onnistumisten lukumäärä 12 heiton sarjassa.

Muuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(12;\ 0{,}71)$.

b) Kun palloa heitetään koriin 12 kertaa, niin saadaan kori 0–12 kertaa. Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat siis k = 0, 1, 2, … 10, 11 tai 12. Määritetään pistetodennäköisyydet $P(X = k)$ esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella.

Satunnaismuuttujan X jakauma:

k	P(X = k)
0	0.0000003538
1	0.0000103948
2	0.0001399718
3	0.0011422988
4	0.0062924906
5	0.0246492046
6	0.0704060615
7	0.1477486809
8	0.2260809556
9	0.2460037985
10	0.1806855485
11	0.0804305577
12	0.0164096827

Kuva: Kuvakaappaus GeoGebra-ohjelmiston todennäköisyyslaskurista.

c) Tapahtumalla $X = 9$ on suurin pistetodennäköisyys.

$$P(X = 9) = 0{,}246\ldots \approx 0{,}25$$

Onnistuneiden korien lukumäärän todennäköisin arvo 12 heiton sarjassa on siis 9.

49.

X = ”kruunien lukumäärä viiden kolikonheiton sarjassa”

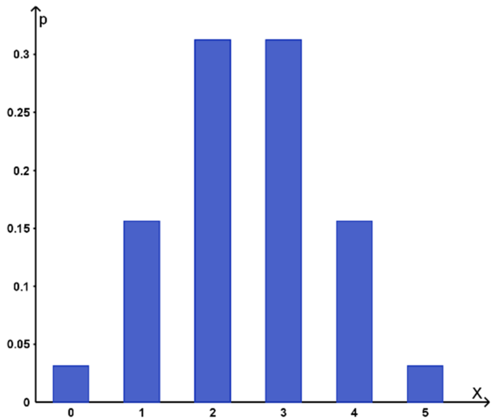
Heittojen lukumäärä on n = **5** ja ”onnistumisen” todennäköisyys on $p = P(\text{”kruuna”}) = \frac{1}{2}$.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \mathrm{Bin}(5, \frac{1}{2})$.

a) Muuttujan X mahdolliset arvot ovat x = 0, 1, 2, 3, 4 tai 5.

Määritetään pistetodennäköisyydet $p(x)$ esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella. Esitetään todennäköisyydet taulukossa.

Satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma	
Muuttujan X arvo $\boldsymbol{x}$	Pistetodennäköisyys $\boldsymbol{p(x)}$
0	0,03125
1	0,15625
2	0,3125
3	0,3125
4	0,15625
5	0,03125



b) Matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovellus piirtää pylväsdiagrammin tunnuslukujen $n = 5$ ja $p = \frac{1}{2}$ perusteella. Diagrammi voidaan kopioida piirtoalueelle muokkausta varten. Pylväiden leveys säädetään niin, että pylväät ovat erillään toisistaan.

c) Lasketaan tapahtuman ”$X = 4$ tai $X = 5$” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(4 \text{ tai } 5) &= p(4) + p(5) \\ &= 0{,}15625 + 0{,}03125 \\ &= 0{,}1875 \\ &\approx 0{,}19 \end{aligned}$$

d) Tapahtumilla ”$X = 2$” ja ”$X = 3$” on suurimmat pistetodennäköisyydet 0,3125 eli pylväsdiagrammissa näiden arvojen kohdalla on korkein pylväs. Todennäköisin kruunien lukumäärä on 2 tai 3.

e) Binomijakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E(X) = np = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5 \text{ (kruunaa).}$$

Jos kolikon heittoa 5 kertaa toistettaisi monta kertaa, kruunien lukumäärän keskiarvo heittosarjassa lähestyisi lukua 2,5. Siis, kun kolikkoa heitetään 5 kertaa, kruunia on keskimäärin 2,5 yhdessä heittosarjassa.

Huomaa: Odotusarvo (2,5) voi olla arvo, jota satunnaismuuttuja ei voi käytännössä saada. Odotusarvo ei välttämättä ole sama kuin todennäköisin arvo (2 tai 3).

50.

X = ”yksilapsiseen perheeseen kuuluvien lukumäärä 8 opiskelijan ryhmässä”

Toistojen lukumäärä on n = **8** ja ”onnistumisen” todennäköisyys on p = P(”ainoa lapsi”) = 24 % = $\mathbf{0,24}$.

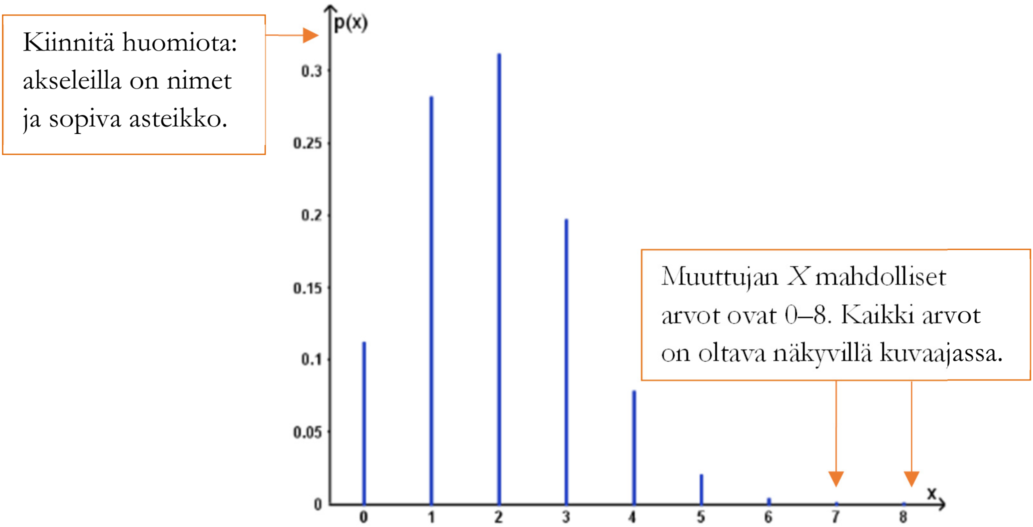
Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(\mathbf{8}; \mathbf{0,24})$.

a) Muuttujan X mahdolliset arvot ovat x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tai 8.

Määritetään pistetodennäköisyydet $p(x)$ esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella. Esitetään todennäköisyydet taulukossa.

Satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma	
Muuttujan X arvo $\boldsymbol{x}$	Pistetodennäköisyys $\boldsymbol{p(x)}$
0	0,1113…
1	0,2811…
2	0,3107…
3	0,1962…
4	0,0774…
5	0,0195…
6	0,0030…
7	0,0002…
8	0,00001…

b) Valitaan matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksessa kuvaajatyyppi ”viivakaavio”. Sovellus piirtää janadiagrammin tunnuslukujen n = 8 ja p = 0,24 perusteella. Diagrammi voidaan kopioida piirtoalueelle muokkausta varten.



c) Lasketaan tapahtuman ”X = 3 tai X = 4” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(3 \text{ tai } 4\,) &= p(3) + p(4) \\ &= 0{,}1962\ldots + 0{,}0774\ldots \\ &= 0{,}2737\ldots \\ &\approx 0{,}27 \end{aligned}$$

Matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovellukseen syötetään
$n = 8$ ja $p = 0.24$.
Valitaan vaihtoehto ”väli” ja syötetään alaraja 3 ja yläraja 4.

d) Tapahtumalla ”X = 2” on suurin pistetodennäköisyys: $p(2)$ = 0,310…
eli janadiagrammissa tämän arvon kohdalla on korkein jana.
Muuttujan X todennäköisin arvo on 2.

e) Binomijakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E(X) = np = 8 \cdot 0{,}24 = 1{,}92 \text{ (opiskelijaa).}$$

Jos poimittaisiin satunnaisesti useita 8 opiskelijan ryhmiä ja laskettaisiin jokaisessa ryhmässä olevien yksilapsisesta perheestä tulevien opiskelijoiden lukumäärä, eri ryhmistä laskettujen lukumäärien keskiarvo lähestyisi lukua 1,92. Siis, 8 opiskelijan ryhmässä on keskimäärin 1,92 yksilapsisesta perheestä tulevaa opiskelijaa.

Huomaa: Odotusarvo (1,92) voi olla arvo, jota satunnaismuuttuja ei voi käytännössä saada. Odotusarvo ei välttämättä ole sama kuin todennäköisin arvo (2).

51.

Merkitään satunnaismuuttuja X = ”vihreiden pastillien lukumäärä 6 pastillin joukossa”

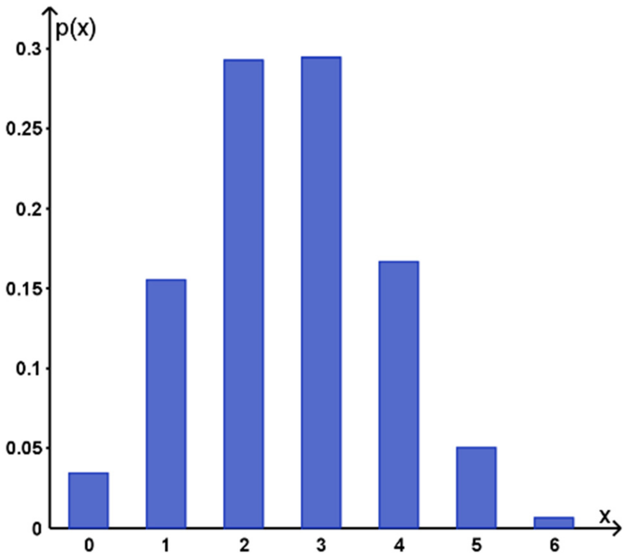
Pastilleja on suuri määrä, joten vihreiden pastillien prosenttiosuus 43 % ei oleellisesti muutu, kun pastilleja poimitaan kulhosta pieni määrä. Todennäköisyys, että poimitaan vihreä pastilli, on jokaisen pastillin kohdalla sama: P(”vihreä”) = 43 % = 0,43.

Pastillien poimiminen voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä on n = **6** ja ”onnistumisen” todennäköisyys on p = $\mathbf{0,43}$.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \mathrm{Bin}(\mathbf{6}; \mathbf{0,43})$.

a) Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 tai 6.

Muodostetaan muuttujan X todennäköisyysjakauma.



Satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma	
Muuttujan X arvo **x**	Pistetodennäköisyys **$p(x)$**
0	0,0342…
1	0,1552…
2	0,2927…
3	0,2944…
4	0,1666…
5	0,0502…
6	0,0063…

Jakaumataulukosta nähdään, että arvolla $X = 3$ on suurin pistetodennäköisyys.

$$p(3) = 0{,}2944\ldots$$

Arvo $X = 3$ on siis todennäköisin, eli Pekka saa todennäköisimmin kolme vihreää pastillia.

b) Lasketaan tapahtuman ”vähintään 2 vihreää pastillia” todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{vähintään 2}) &= P(X \geq 2) \\ &= 0{,}8104\ldots \\ &\approx 0{,}81 \end{aligned}$$

Matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovellukseen syötetään $n = 6$ ja $p = 0.43$. Valitaan vaihtoehto ”oikeanpuoleinen” ja syötetään alaraja 2.

c) Binomijakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E(X) = np = 6 \cdot 0{,}43 = 2{,}58 \text{ (pastillia).}$$

52.

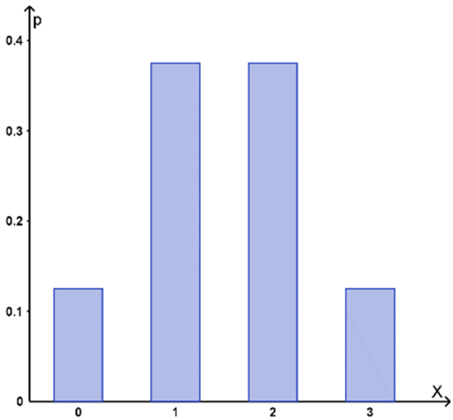
a) Satunnaismuuttuja X = ”klaavojen lukumäärä kolmen heiton sarjassa”

Kolikon heitto on toistokoe. Toistojen lukumäärä on n = **3** ja ”onnistumisen” todennäköisyys on $p = P(\text{”klaava”}) = \frac{1}{2}$.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2})$.

Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat x = 0, 1, 2 tai 3.

Määritetään pistetodennäköisyydet $p(x)$ esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella. Esitetään todennäköisyydet taulukossa ja havainnollisuuden vuoksi myös graafisesti.



Satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma	
Muuttujan X arvo **x**	Pistetodennäköisyys **$p(x)$**
0	0,125
1	0,375
2	0,375
3	0,125

b) Satunnaismuuttujan Y = ”voitto (€)” mahdolliset arvot ovat

- 7 tapauksessa $X = 3$
- 2 tapauksessa $X = 1$ tai $X = 2$
- –13 tapauksessa ”kolme kruunaa” eli $X = 0$.

Huomaa, että tilanne ”pelaaja menettää 13 €” vastaa tapahtumaa $Y = -13$ (€).

Muodostetaan muuttujan Y todennäköisyysjakauma.

Satunnaismuuttujan Y todennäköisyysjakauma	
Muuttujan Y arvo **k (€)**	Pistetodennäköisyys **$p(k)$**
7	**0,125**
2	0,375 + 0,375 = **0,75**
–13	**0,125**
summa:	0,125 + 0,75 + 0,125 = 1

Tapahtuma ”$X = 3$”.

Tapahtuma ”$X = 1$ tai $X = 2$”.

Tarkistetaan, että piste-todennäköisyyksien summa on 1.

Diskreetin satunnaismuuttujan Y odotusarvo lasketaan kertomalla kukin arvoista sitä vastaavalla todennäköisyydellä ja laskemalla näin saadut tulot yhteen.

Satunnaismuuttujan Y odotusarvo on

$$E(Y) = \mathbf{7} \cdot 0{,}125 + \mathbf{2} \cdot 0{,}75 + (\mathbf{-\,13}) \cdot 0{,}125 = 0{,}75\ (€).$$

Voiton odotusarvo on positiivinen: 0,75 euroa. Siis, jos peliä pelataan monta kierrosta, voitto on keskimäärin 0,75 euroa jokaisella kierroksella. Tämän perusteella Hannun kannattaa osallistua peliin.

53.

Satunnaismuuttuja $Y \sim \text{Bin}(5, \frac{2}{3})$ noudattaa binomijakaumaa, jossa $n = 5$ ja $p = \frac{2}{3}$.

Koska $n = 5$, muuttujan Y mahdolliset arvot ovat: 0, 1, 2, 3, 4 tai 5.

a) Todennäköisyysjakaumat muodostetaan esimerkiksi taulukkolaskentasovelluksessa. Selvitä, miten tämä tapahtuu käyttämälläsi ohjelmistolla.

Satunnaismuuttujan Y mahdolliset arvot on kirjoitettu sarakkeeseen A.

	A	B	C
1	x	pistetoden	kertymä
2	0	0.00412	0.00412
3	1	0.04115	0.04527
4	2	0.16461	0.20988
5	3	0.32922	0.53909
6	4	0.32922	0.86831
7	5	0.13169	1

Pistetodennäköisyydet on määritetty sarakkeeseen B. Esimerkiksi matematiikkaohjelmiston taulukkosovelluksessa soluun B2 kirjoitetaan laskukaava, jossa viitataan muuttujan Y solussa A2 olevaan arvoon. Kaava on

=Binomijakauma(5, $\frac{2}{3}$, A2, false)

Kaava kopioidaan sarakkeessa B alaspäin.

Kertymätodennäköisyydet eli kertymät on määritetty sarakkeeseen C. Matematiikkaohjelmiston taulukkosovelluksessa soluun C2 kirjoitetaan laskukaava, jossa viitataan muuttujan Y solussa A2 olevaan arvoon. Kaava on

=Binomijakauma(5, $\frac{2}{3}$, A2, true)

Kaava kopioidaan sarakkeessa C alaspäin.

b) Arvo $Y = 6$ on mahdoton, joten $P(Y = 6) = 0$.

c) Muuttujan Y kaikki arvot 0–5 ovat pienempiä kuin 6. Tapahtuma ”$Y \leq 6$” on siis varma tapaus.

Kertymätodennäköisyys kohtaan $Y = 6$ on $P(Y \leq 6) = 1$.

d) Pistetodennäköisyys $P(Y = 3)$ luetaan jakaumataulukosta.

$$P(Y = 3) = 0{,}329\ldots \approx 0{,}33$$

e) Merkintä $P(\mathrm{Y} > 3)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että muuttujan Y arvo on suurempi kuin 3 eli $Y = 4$ tai $Y = 5$. Pistetodennäköisyyksien summa on

$$P(X > 3) = 0{,}460\ldots \approx 0{,}46.$$

Esimerkiksi laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 5$, $p = \frac{2}{3}$, alaraja 4 ja yläraja 5.

54.

Satunnaismuuttuja X ~Bin(4; 0,67) noudattaa binomijakaumaa, jossa $n = 4$ ja $p = 0{,}67$.

a) Koska $n = 4$, muuttujan X mahdolliset arvot ovat: 0, 1, 2, 3 tai 4.

b) Todennäköisyysjakauma muodostetaan esimerkiksi taulukkolaskentasovelluksessa tai matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksesssa. Selvitä, miten tämä tapahtuu käyttämälläsi ohjelmistolla.

Todennäköisyysjakauma esitetään taulukkona, jossa ilmoitetaan joko pistetodennäköisyydet tai kertymätodennäköisyydet. Tavallisinta on esittää jakauma ilmoittamalla pistetodennäköisyydet $p(x)$.

Satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma

x	p(x)
0	0.01186
1	0.09631
2	0.29331
3	0.39701
4	0.20151

c) Merkintä $P(0 < X < 2)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että muuttujan X arvo on suurempi kuin 0 mutta pienempi kuin 2 eli $X = 1$. Pistetodennäköisyys luetaan jakaumataulukosta.

$$\begin{aligned} P(0 < X < 2) &= p(1) \\ &= 0{,}0963\ldots \\ &\approx 0{,}096 \end{aligned}$$

e) Merkintä $P(X \geq 3)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että muuttujan X arvo on vähintään 3 eli $X = 3$ tai $X = 4$. Pistetodennäköisyyksien summa on

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= p(3) + p(4) \\ &= 0{,}3970\ldots + 0{,}2015\ldots \\ &= 0{,}598\ldots \\ &\approx 0{,}60. \end{aligned}$$

Todennäköisyys saadaan myös esimerkiksi laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla, johon syötetään: $n = 4$, $p = 0{,}67$, alaraja 3 ja yläraja 4.

Huomaa, että vastaukset annetaan samalla tarkkuudella kuin lähtöarvo 0,67 eli kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

55.

Pylväsdiagrammissa on esitetty muuttujan Y pistetodennäköisyydet. Pylväiden korkeudet ilmaisevat muuttujan Y arvojen pistetodennäköisyydet.

a) Muuttujan Y arvot luetaan vaaka-akselilta. Mahdolliset arvot ovat: 0, 1, 2, 3, 4 tai 5.

b) Arvon $Y = 2$ pistetodennäköisyys luetaan sitä vastaavan pylvään korkeudesta.

$$P(Y = 2) \approx 0{,}23$$

c) Arvo $Y = 6$ on mahdoton, joten $P(Y = 6) = 0$.

d) Merkintä $P(0 \leq Y \leq 2)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että muuttujan Y arvo on 0 tai 1 tai 2. Pistetodennäköisyydet luetaan arvoja vastaavien pylväiden korkeudesta. Pistetodennäköisyyksien summa on

$$\begin{aligned} P(0 \leq Y \leq 2) &= p(0) + p(1) + p(2) \\ &\approx 0{,}01 + 0{,}08 + 0{,}23 \\ &= 0{,}32. \end{aligned}$$

e) Todennäköisin on se arvo, jota vastaavan pylvään korkeus on suurin. Arvon $Y = 3$ todennäköisyys on suurin.

$$P(Y = 3) \approx 0{,}34$$

Arvo $Y = 3$ on siis todennäköisin arvo.

56.

a) Komplementtisäännön mukaan

$$
\begin{aligned}
P(Z > 1) &= 1 - P(Z \leq 1) \\
&= 1 - 0{,}03 \\
&= 0{,}97.
\end{aligned}
$$

b) Merkintä $P(5 < Z \leq 7)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että muuttujan Z arvo on suurempi kuin 5 mutta korkeintaan 7 eli $6 \leq Z \leq 7$. Arvojen väliin liittyvä todennäköisyys saadaan kahden kertymän erotuksena.

$$
\begin{aligned}
P(5 < Z \leq 7) &= P(Z \leq 7) - P(Z \leq 5) \\
&= 1 - 0{,}88 \\
&= 0{,}12
\end{aligned}
$$

c) Merkintä $P(1 < Z < 4)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että muuttujan Z arvo on suurempi kuin 1 ja pienempi kuin 4 eli $2 \leq Z \leq 3$. Arvojen väliin liittyvä todennäköisyys saadaan kahden kertymän erotuksena.

$$
\begin{aligned}
P(1 < Z < 4) &= P(Z \leq 3) - P(Z \leq 1) \\
&= 0{,}35 - 0{,}03 \\
&= 0{,}32
\end{aligned}
$$

57.

Arpoja on suuri määrä, joten yksittäisen arvan ostaminen ei merkittävästi muuta voittoarvan todennäköisyyttä seuraavan arvan ostossa. Arpojen ostaminen voidaan siis tulkita toistokokeeksi. Toistojen lukumäärä on n = **7** ja onnistumisen eli voittoarvan todennäköisyys $p = P(\text{"voitto"}) = \frac{1}{4} = \mathbf{0{,}25}$.

Olkoon satunnaismuuttuja X = "voittoarpojen lukumäärä 7 arvan joukossa".

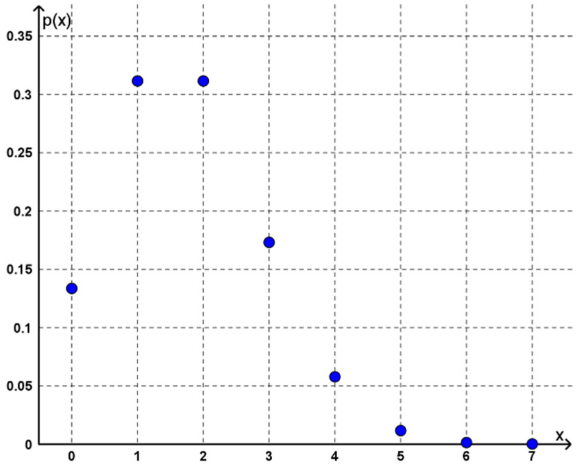
Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(\mathbf{7}; \mathbf{0{,}25})$.

a) Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 tai 7. Määritetään pistetodennäköisyydet esimerkiksi matematiikkaohjelmiston taulukkolaskentasovelluksessa ja piirretään jakauman avulla pistekuvaaja.

	A	B
1	x	p(x)
2	0	0.13348
3	1	0.31146
4	2	0.31146
5	3	0.17303
6	4	0.05768
7	5	0.01154
8	6	0.00128
9	7	0.00006

Ensimmäinen rivi on otsikkorivi.

Pistetodennäköisyydet on määritetty sarakkeeseen B.
Esimerkiksi matematiikkaohjelmiston taulukkosovelluksessa soluun B2 kirjoitetaan laskukaava, jossa viitataan muuttujan X solussa A2 olevaan arvoon. Kaava on =Binomijakauma(7, 0.25, A2, false)
Kaava kopioidaan sarakkeessa B alaspäin.



b) Lasketaan tapahtuman ”$X \leq 3$” todennäköisyys.

$$P(X \leq 3) = 0{,}929\ldots \approx 0{,}93$$

Esimerkiksi laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 7$, $p = 0{,}25$, alaraja 0 ja yläraja 3.

58.

Lilli lyö ottelun aikana yhteensä $3 \cdot 3 = 9$ kertaa. Toistojen lukumäärä on siis $n = \mathbf{9}$.

Lilli osuu palloon todennäköisyydellä $p = P(\text{”osuu”}) = \mathbf{0,57}$.

Olkoon satunnaismuuttuja X = ”osumien lukumäärä 9 lyönnin sarjassa”.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(\mathbf{9}; \mathbf{0,57})$.

a) Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ tai 9. Määritetään pistetodennäköisyydet $p(x)$ esimerkiksi taulukkolaskentasovelluksessa.

x	p(x)
0	0.0005
1	0.006
2	0.03179
3	0.09834
4	0.19553
5	0.25919
6	0.22905
7	0.13013
8	0.04312
9	0.00635

Suurin pistetodennäköisyys.

Suurin pistetodennäköisyys on arvolla $X = 5$.

$$p(5) = 0{,}259\ldots$$

Lillin lyömien osumien todennäköisin arvo on siis viisi.

b) Lasketaan tapahtuman "$X \geq 6$" eli tapahtuman "$6 \leq X \leq 9$" todennäköisyys.

$$P(6 \leq X \leq 9) = 0{,}408\ldots \approx 0{,}41$$

Esimerkiksi laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 9$, $p = 0{,}57$, alaraja 6 ja yläraja 9.

c) Binomijakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E(X) = n \cdot p = 9 \cdot 0{,}57 = 5{,}13 \text{ (osumaa)}.$$

Huomaa: Odotusarvo (5,13) voi olla arvo, jota satunnaismuuttuja ei voi käytännössä saada. Odotusarvo ei välttämättä ole sama kuin todennäköisin arvo (5).

59.

Satunnaismuuttuja X = ”poutapäivien lukumäärä juhannusviikolla”.

Säätila voidaan tulkita toistokokeeksi, jossa toistoja on viikon aikana $n = 7$.

Sateen todennäköisyys on P(”sataa”) = 35 % = 0,35.

”Onnistuminen” tarkoittaa poutapäivää, joten
$p = P$(”poutaa”) = 1 – 0,35 = 0,65.

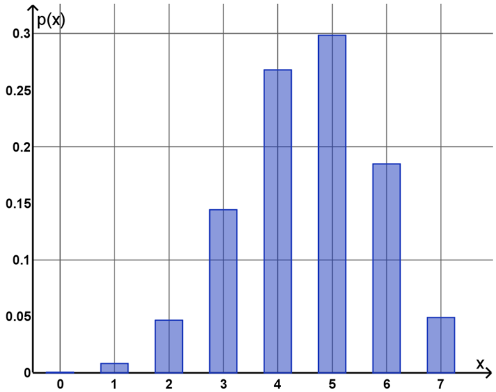
Muuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(7;\ 0{,}65)$.

Muodostetaan todennäköisyysjakaumat esimerkiksi taulukkolaskentasovelluksessa. Muuttujan X mahdolliset arvot ovat: x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 tai 7. Määritetään pistetodennäköisyydet $p(x)$ sekä kertymätodennäköisyydet eli kertymät.

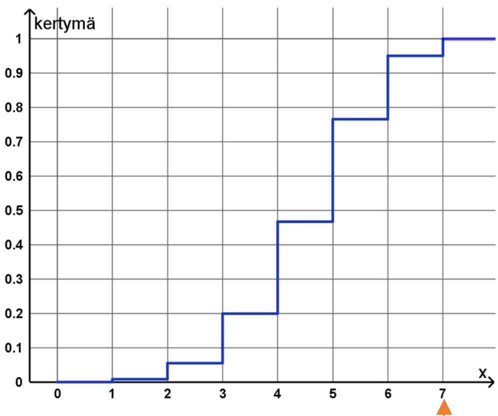
x	p(x)	kertymä
0	0.00064	0.00064
1	0.00836	0.00901
2	0.0466	0.05561
3	0.14424	0.19985
4	0.26787	0.46772
5	0.29848	0.7662
6	0.18478	0.95098
7	0.04902	1

Havainnollistetaan pistetodennäköisyyksiä esimerkiksi pylväsdiagrammilla ja kertymätodennäköisyyksiä esimerkiksi porraskaaviolla. Molemmat saadaan matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella.

Pylväsdiagrammi



Porraskaavio



Muuttujan X suurin arvo on 7.
Kun $X \geq 7$,
kertymätodennäköisyys on 1.

b) Lasketaan todennäköisyys tapahtumalle $X \leq 5$.

Kertymätodennäköisyys voidaan lukea jakaumataulukosta.

$$P(X \leq 5) = 0{,}766\ldots \approx 0{,}77$$

Todennäköisyys saadaan myös laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla johon syötetään: $n = 7$, $p = 0{,}65$, alaraja 0 ja yläraja 5.

c) Tapahtuma ”korkeintaan kaksi sadepäivää” tarkoittaa, että poutapäiviä on vähintään viisi eli $X = 5$ tai $X = 6$ tai $X = 7$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= p(5) + p(6) + p(7) \\ &= 0{,}298\ldots + 0{,}184\ldots + 0{,}049\ldots \\ &= 0{,}532\ldots \\ &\approx 0{,}53 \end{aligned}$$

Todennäköisyys saadaan myös laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnolla johon syötetään: $n = 7$, $p = 0{,}65$, alaraja 5 ja yläraja 7.

60.

a) Tilanteeseen liittyviä satunnaismuuttujia on useita. Esimerkiksi:

X = ”silmäluvun 1 esiintymiskerrat”

X = ”parillisen silmäluvun esiintymiskerrat”

X = ”kirjaimella K alkavien silmälukujen lukumäärä”

X = ”silmälukujen summa”

X = ”suurin silmäluku”

b) Vastauksissa on esitetty satunnaismuuttujan X = ”silmäluvun 1 esiintymiskerrat” todennäköisyysjakaumat.

Muodostetaan tässä esimerkiksi satunnaismuuttujan X = ”parillisen silmäluvun esiintymiskerrat” todennäköisyysjakaumat.

Nopanheitto on toistokoe, jossa $n = 6$ ja onnistumisen eli parillisen silmäluvun todennäköisyys on

$$p = P(\text{”parillinen silmäluku”}) = P(\text{silmäluku 2 tai 4 tai 6})$$
$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Siis, $X \sim \text{Bin}(6; \frac{1}{2})$.

Muodostetaan todennäköisyysjakaumat taulukkolaskentasovelluksessa. Muuttujan X mahdolliset arvot: 0, 1, 2, 3, 4, 5 tai 6 on kirjoitettu sarakkeeseen A. Pistetodennäköisyydet on määritetty sarakkeeseen B ja kertymätodennäköisyydet sarakkeeseen C.

	A	B	C
1	x	p(x)	kertymä
2	0	0.01563	0.01563
3	1	0.09375	0.10937
4	2	0.23437	0.34375
5	3	0.3125	0.65625
6	4	0.23438	0.89062
7	5	0.09375	0.98438
8	6	0.01563	1

c) Merkintä $P(X = 3)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että muuttujan X arvo on 3 eli että parillinen silmäluku esiintyy kuuden heiton sarjassa tasan kolme kertaa.

Pistetodennäköisyys voidaan lukea jakaumataulukosta:

$$P(X = 3) = p(3) = 0{,}3125 \approx 0{,}31.$$

d) Merkintä $P(X \leq 3)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että muuttujan X arvo on korkeintaan 3 eli arvo on 0 tai 1 tai 2 tai 3. Merkintä ilmaisee siis todennäköisyyden, että parillinen silmäluku esiintyy kuuden heiton sarjassa korkeintaan kolme kertaa.

Kertymätodennäköisyys voidaan lukea jakaumataulukosta.

$$P(X \leq 3) = 0{,}6562\ldots \approx 0{,}66.$$

61.

Merkitään satunnaismuuttuja X = ”pidettyjen luentojen lukumäärä viikossa”.

Viikon aikana on viisi arkipäivää, eli $n = 5$, ja onnistuminen tarkoittaa, että luento tulee pidetyksi, eli $p = 80\ \% = 0{,}8$.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(5;\ 0{,}8)$

a) Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{ehtii pitää kaikki luennot}) &= 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \\ &= 0{,}8^5 \\ &= 0{,}32768 \\ &\approx 0{,}33 \end{aligned}$$

b) Tapahtuma ”vain yksi viidestä jää pitämättä” tarkoittaa, että pidettyjä luentoja on neljä eli $X = 4$.

$$P(X = 4) = 0{,}4096 \approx 0{,}41$$

c) Binomijakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}8 = 4{,}0 \text{ (luentoa).}$$

62.

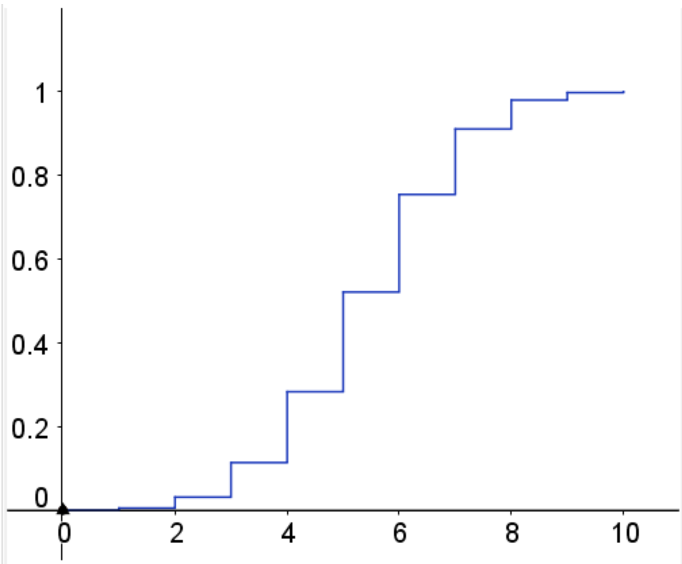
Olkoon satunnaismuuttuja X = ”oikeintunnistettujen kuvien lukumäärä 10 kuvan testissä”.

Kuvia on yhteensä $n = 10$. Muuttujan X mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tai 10.

Aurora tunnistaa yhden kuvan oikein todennäköisyydellä
$p = 54\ \% = 0{,}54$.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(10;\ 0{,}54)$.

a) Muodostetaan muuttujan X kertymätodennäköisyydet esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksessa ja kuvataan niitä porraskaaviolla.



k	P(X ≤ k)
0	0.00042
1	0.0054
2	0.03171
3	0.11406
4	0.28324
5	0.52156
6	0.7547
7	0.91109
8	0.97993
9	0.99789
10	1

Kuva: Kuvakaappaus GeoGebra-ohjelmiston todennäköisyyslaskurista

b) Binomijakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E(X) = \mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}54 = 5{,}4 \text{ (kuvaa).}$$

Onnistumistodennäköisyys on $p = 0{,}54$, joten
$q = 1 - p = 1 - 0{,}54 = 0{,}46$.

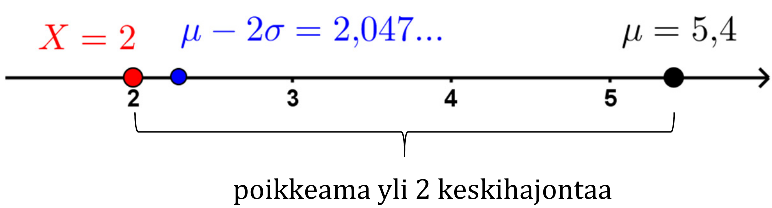
Keskihajonta on

$$D(X) = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}46} = 1{,}576\ldots \approx 1{,}58$$
(kuvaa)

c) Tulos poikkeaa merkitsevästi odotusarvosta, jos se on yli kahden keskihajonnan päässä odotusarvosta. Arvo $X = 2$ on odotusarvoa $\mu = 5{,}4$ pienempi, joten lasketaan tasan kaksi keskihajontaa odotusarvosta vasemmalle poikkeava arvo.

$$\mu - 2\sigma = 5{,}4 - 2 \cdot 1{,}576\ldots = 2{,}047\ldots$$

Arvo $X = 2 < 2{,}047\ldots$ on yli kahden keskihajonnan päässä odotusarvosta, joten se poikkeaa merkitsevästi odotusarvosta.



Tapa 2: Poikkeaman suuruus voidaan arvioida myös normitetun arvon avulla.

Normitetaan arvo $X = 2$.

$$\frac{2-\mu}{\sigma} = \frac{2-5{,}4}{1{,}576\ldots} = \frac{-3{,}4}{1{,}576\ldots} = -2{,}157\ldots$$

Normitetun arvon itseisarvo on $|-2{,}157\ldots| = 2{,}157\ldots > \mathbf{2}$, joten arvo poikkeaa merkitsevästi odotusarvosta.

d) Merkitään kuvien kokonaismäärää testissä kirjaimella *n.* Tapahtuman ”tunnistaa kuvista vähintään 9” todennäköisyys on yli 0,90 eli

$$P(X \geq 9) > 090.$$

Vastatapahtuman ”tunnistaa korkeintaan 8 kuvaa” todennäköisyys on tällöin alle 0,10 eli

$$P(X \leq 8) < 0{,}1.$$

Testataan kertymäehdon toteutumista taulukkolaskentasovelluksessa. Oikeintunnistettuja kuvia on vähintään 9, joten kuvien kokonaismäärä n on vähintään 9.

Sarakkeeseen A on kirjoitettu kuvien kokonaismäärä testissä alkaen arvosta $n = 9$.

	A	B
1	n	$P(X \leq 8)$
2	9	0.9961
3	10	0.97993
4	11	0.94276
5	12	0.88005
6	13	0.79352
7	14	0.69002
8	15	0.57894
9	16	0.46945
10	17	0.36871
11	18	0.28118
12	19	0.20871
13	20	0.15112
14	21	0.10698
15	22	0.07417
16	23	0.05046

Ensimmäinen rivi on otsikkorivi.

Kertymätodennäköisyydet arvoon $X = 8$ on määritetty sarakkeeseen B kirjoittamalla soluun B2 laskukaava, jossa viitataan solussa A2 olevaan toistojen lukumäärään. Kaava vaihtelee eri ohjelmistoissa. Kaava voi olla esimerkiksi
=Binomijakauma(A2, 0.54, 8, true)
Kaava kopioidaan sarakkeessa B alaspäin.

Ehto $P(X \leq 8) < 0{,}1$ toteutuu ensimmäisen kerran, kun $n = 22$.

Testissä on oltava vähintään 22 kuvaa.

63.

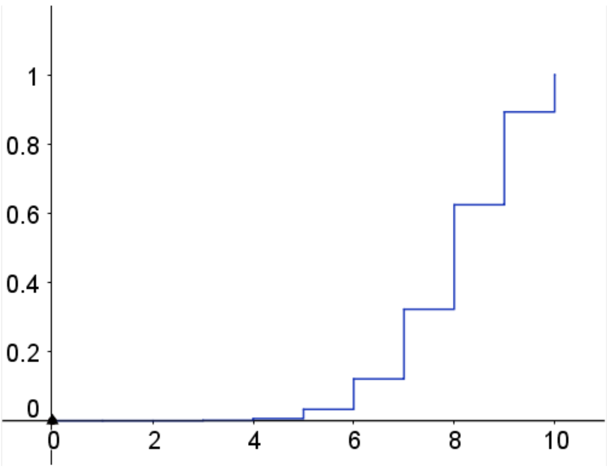
Olkoon satunnaismuuttuja X = ”malariaa kantavien hyttysten lukumäärä 10 hyttysen joukossa”.

Hyttysiä on yhteensä 10 eli n = 10. Muuttujan X mahdolliset arvot ovat 0–10.

Hyttynen kantaa malariaa todennäköisyydellä p = 80 % = 0,80.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(10;\ 0{,}80)$.

a) Määritetään muuttujan X kertymätodennäköisyydet esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksessa ja kuvataan niitä porraskaaviolla.



k	P(X ≤ k)
0	0.000000102
1	0.00000420
2	0.0000779
3	0.000864
4	0.00637
5	0.0328
6	0.121
7	0.322
8	0.624
9	0.893
10	1.00

b) Binomijakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$E(X) = \mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}80 = 8{,}0 \text{ (hyttystä).}$$

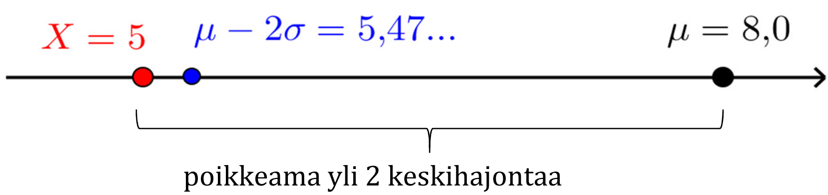
Onnistumistodennäköisyys on $p = 0{,}8$, joten $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
Keskihajonta on

$$D(X) = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 1{,}264\ldots \approx 1{,}26 \text{ (hyttystä).}$$

c) Tulos poikkeaa merkitsevästi odotusarvosta, jos se oli yli kahden keskihajonnan päässä odotusarvosta. Arvo $X = 5$ on odotusarvoa $\mu = 8{,}0$ pienempi, joten lasketaan tasan kaksi keskihajontaa odotusarvosta vasemmalle poikkeava arvo.

$$\mu - 2\sigma = 8{,}0 - 2 \cdot 1{,}264\ldots = 5{,}470\ldots$$

Arvo $X = 5 < 5{,}470\ldots$ on yli kahden keskihajonnan päässä odotusarvosta, joten lukumäärä poikkeaa merkitsevästi odotusarvosta.



Tapa 2: Poikkeaman suuruus voidaan arvioida myös normitetun arvon avulla.

Normitetaan arvo $X = 5$.

$$\frac{5-\mu}{\sigma} = \frac{5-8{,}0}{1{,}264\ldots} = \frac{-3}{1{,}264\ldots} = -2{,}371\ldots$$

Normitetun arvon itseisarvo on $|-2{,}371\ldots| = 2{,}371\ldots > \mathbf{2}$, joten arvo poikkeaa merkitsevästi odotusarvosta.

64.

Olkoon satunnaismuuttuja X = ”oikeinarvattujen kysymysten lukumäärä 15 kysymyksen kokeessa”.

Kysymyksiä on yhteensä $n = 15$. Muuttujan X mahdolliset arvot ovat 0–15.

Yksi kolmesta vaihtoehdosta on oikein, joten onnistumistodennäköisyys on $p = \frac{1}{3}$.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \mathrm{Bin}(15; \frac{1}{3})$.

a) Muodostetaan muuttujan X todennäköisyysjakaumat esimerkiksi taulukkolaskentasovelluksessa.

k	P(X = k)	P(X≤k)
0	0.00228365...	0.00228365...
1	0.017127437	0.01941109...
2	0.05994602...	0.07935712...
3	0.12988306...	0.20924018...
4	0.19482459...	0.40406478...
5	0.21430705...	0.61837183...
6	0.17858921...	0.79696105...
7	0.11480735...	0.91176840...
8	0.05740367...	0.969172077
9	0.02232365...	0.99149572...
10	0.00669709...	0.998192824
11	0.00152206...	0.99971489...
12	0.00025367...	0.999968569
13	0.00002927...	0.99999783...
14	0.00000209...	0.99999993...
15	0.00000006...	1

Jakaumataulukosta nähdään, että suurin pistetodennäköisyys on arvolla $X = 5$.

Todennäköisin oikeiden arvausten lukumäärä yhdessä kokeessa on siis 5.

Mediaani on se muuttujan arvo, jonka kertymätodennäköisyys ensimmäisen kerran ylittää arvon 50 % = 0,50. Jakaumataulukosta nähdään, että arvon $X = 5$ kertymätodennäköisyys on ensimmäisen kerran yli 0,50.

Oikeiden arvausten mediaani on siis 5 (arvausta).

b) Piia läpäisee kokeen, jos oikeita vastauksia on vähintään 7 eli kun $X \geq 7$. Lasketaan tapahtuman $X \geq 7$ todennäköisyys.

$$P(X \geq 7) = 0{,}203\ldots \approx 0{,}20$$

Esimerkiksi laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 15$, $p = \frac{1}{3}$, alaraja 7 ja yläraja 15.

c) Binomijakautuneen satunnaismuuttujan odotusarvo on

$$E(X) = \mu = n \cdot p = 15 \cdot \frac{1}{3} = 5{,}0 \text{ (oikeaa vastausta).}$$

Piia saa siis keskimäärin viisi oikeaa arvausta yhdessä yrityksessä.

d) Merkitään kysyttyä koekysymysten kokonaismäärää kirjaimella *n.* Piia vastaa vähintään 10 kysymykseen oikein yli 50 % todennäköisyydellä eli

$$P(X \geq 10) > 0{,}50.$$

Vastatapahtuman ”vastaa korkeintaan 9 kysymykseen oikein” todennäköisyys on tällöin

$$P(X \leq 9) < 0{,}5.$$

Testataan kertymäehdon toteutumista taulukkolaskentasovelluksessa. Oikeinarvattuja kysymyksiä on vähintään 10, joten kuvien kokonaismäärä n on vähintään 10.

Sarakkeeseen A on kirjoitettu koekysymysten kokonaismäärä alkaen arvosta $n = 10$.

	A	B
1	n	$P(X \leq 9)$
2	10	0.99998
3	11	0.99987
4	12	0.99946
5	13	0.99835
6	14	0.99596
7	15	0.9915
8	16	0.98405
9	17	0.97272
10	18	0.95665
11	19	0.93523
12	20	0.9081
13	21	0.87522
14	22	0.83685
15	23	0.79357
16	24	0.74617
17	25	0.6956
18	26	0.64293
19	27	0.58922
20	28	0.53551
21	29	0.48275

Ensimmäinen rivi on otsikkorivi.

Kertymätodennäköisyydet arvoon $X = 9$ on määritetty sarakkeeseen B kirjoittamalla soluun B2 laskukaava, jossa viitataan solussa A2 olevaan toistojen lukumäärään n. Kaava vaihtelee eri ohjelmistoissa. Kaava voi olla esimerkiksi
=Binomijakauma(A2, 1/3, 9, true)
Kaava kopioidaan sarakkeessa B alaspäin.

Ehto $P(X \leq 9) < 0{,}5$ toteutuu ensimmäisen kerran, kun $n = 29$.

Testissä on siis oltava vähintään 29 kysymystä.

65.

Satunnaismuuttuja X = ”korien lukumäärä 7 heiton sarjassa”.

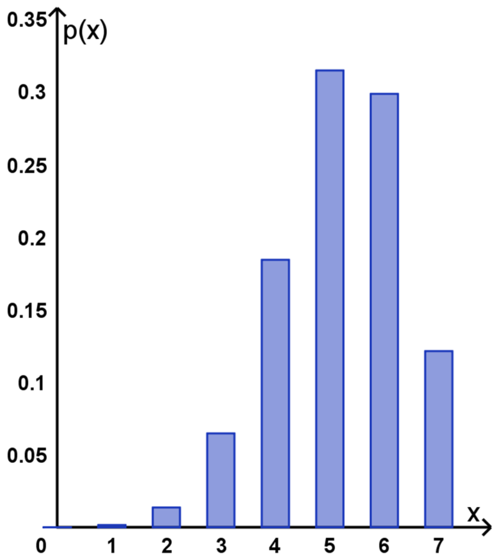
Elias heittää korin todennäköisyydellä $p = P$(”kori”) = 74 % = 0,74.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(7; 0{,}74)$.

$n = 7$, $p = 0{,}74$

a) Määritetään pistetodennäköisyydet esimerkiksi matematiikkaohjelmiston todennäköisyys-sovelluksella ja esitetään ne taulukossa. Havainnollistetaan jakaumaa graafisesti pylväsdiagrammilla.

k	P(X = k)
0	0.00008
1	0.0016
2	0.01366
3	0.06481
4	0.18447
5	0.31501
6	0.29886
7	0.12151



b) Todennäköisyysjakauman graafisesta esityksestä nähdään välittömästi, että muuttujan arvolla $X = 5$ on suurin todennäköisyys. Jakaumataulukon perusteella todennäköisyys on
$P(X = 5) = 0{,}315\ldots$

Siis arvo $X = 5$ on todennäköisin eli Elias saa todennäköisimmin 5 koria seitsemän heiton sarjassa.

c) Lasketaan tapahtuman $X > 4$ eli tapahtuman $X \geq 5$ todennäköisyys.

$$P(X \geq 5) = 0{,}735\ldots \approx 0{,}74$$

Esimerkiksi laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 7$, $p = 0{,}74$, alaraja 5 ja yläraja 7.

Elias saa enemmän kuin neljä koria todennäköisyydellä 0,74.

d) Binomijakautuneen satunnaismuuttujan odotusarvo on

$$E(X) = \mu = n \cdot p = 7 \cdot 0{,}74 = 5{,}18 \text{ (koria).}$$

Korin todennäköisyys on $p = 0{,}74$, joten $q = 1 - 0{,}74 = 0{,}26$.

Keskihajonta on

$$D(X) = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{7 \cdot 0{,}74 \cdot 0{,}26} = 1{,}160\ldots \approx 1{,}16$$
(koria).

Odotusarvo μ = 5,18 ilmaisee, että 7 heiton sarjassa on keskimäärin 5,18 koria. Tarkemmin ilmaistuna: jos 7 heiton sarjoja toistettaisi monta kertaa, ja jokaisessa sarjassa laskettaisi korien lukumäärä, niin lukumäärien keskiarvo lähestyisi odotusarvoa 5,18.

Keskihajonta σ = 1,16 ilmaisee kuinka paljon yksittäisessä 7 heiton sarjassa tulevien korien lukumäärä keskimäärin poikkeaa odotusarvosta 5,18.

Huomaa: Odotusarvo (5,18) voi olla arvo, jota satunnaismuuttuja ei voi käytännössä saada. Odotusarvo ei välttämättä ole sama kuin todennäköisin arvo (5).

e) Korien lukumäärän jakaumassa μ = 5,18 ja σ = 1,160... Lasketaan muuttujan arvon X = 4 normitettu arvo.

$$\frac{4-\mu}{\sigma} = \frac{4-5{,}18}{1{,}16\ldots} = \frac{-1{,}18}{1{,}16\ldots} = -1{,}017\ldots$$

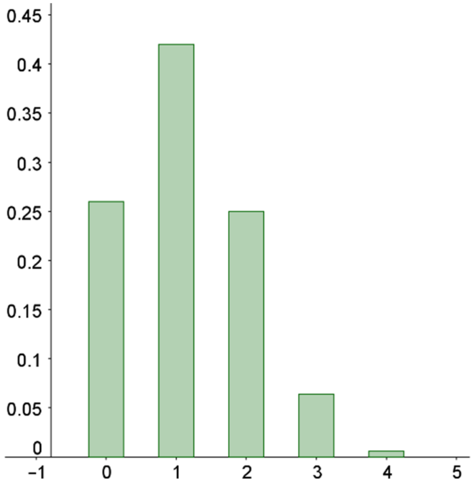
Normitetun arvon itseisarvo on $|-1{,}017| = 1{,}017 < 2$, joten tulos ”neljä koria” ei poikkeaa merkitsevästi odotusarvosta.

66.

a) Muuttujan Y mahdolliset arvot luetaan ensimmäiseltä riviltä.

Mahdolliset arvot ovat 0, 1, 2, 3 tai 4.

b) Havainnollistetaan jakaumaa esimerkiksi pylväsdiagrammilla. Kirjoitetaan muuttujan arvot ja niitä vastaavat todennäköisyydet laskentataulukkoon ja piirretään jakaumasta pylväsdiagrammi.



c) Lasketaan tapahtuman $Y \geq 2$ todennäköisyys.
Pistetodennäköisyyksien summa on

$$P(Y \geq 2) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{8}{125} + \frac{3}{500}$$

$$= \frac{8}{25}.$$

d) Kertymätodennäköisyys on

$$P(Y \leq 1) = p(0) + p(1)$$

$$= \frac{13}{50} + \frac{21}{50}$$

$$= \frac{17}{25}.$$

Tapa 2: Kysytty kertymätodennäköisyys voidaan laskea myös komplementtisäännön ja c-kohdan vastauksen avulla.

$$P(Y \leq 1) = 1 - P(Y \geq 2)$$

$$= 1 - \frac{8}{25}$$

$$= \frac{17}{25}$$

67.

Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(11; 0{,}54)$.

$n = 11$, $p = 0{,}54$

Muuttuja X saa arvot 0–11.

a) Pistetodennäköisyys on

$$P(X = 5) = 0{,}200\ldots \approx 0{,}20.$$

Esim. laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 11$, $p = 0{,}54$ ja $X = 5$.

b) Kertymätodennäköisyys on

$$P(X \leq 5) = 0{,}392\ldots \approx 0{,}39.$$

Esim. laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 11$, $p = 0{,}54$, alaraja 0 ja yläraja 5.

c) Todennäköisyys on

$$P(3 \leq X \leq 5) = 0{,}375\ldots \approx 0{,}38.$$

Esim. laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 11$, $p = 0{,}54$, alaraja 3 ja yläraja 5.

d) Tapahtuma ” $3 < X < 5$” on sama kuin tapahtuma ”$X = 4$”

Pistetodennäköisyydeksi saadaan

$$P(X = 4) = 0{,}122\ldots \approx 0{,}12.$$

e) Tapahtuma ”X > 9” on sama kuin tapahtuma ”X ≥ 10” eli tapahtuma ”810≤ X ≤ 11”.

Todennäköisyydeksi saadaan

$$P(10 \leq X \leq 11) = 0{,}011\ldots \approx 0{,}01.$$

Esim. laskinohjelmiston binomi-jakaumatoimintoon syötetään: n = 11, p = 0,54, alaraja 10 ja yläraja 11.

f) Odotusarvo on $E(X) = n \cdot p = 11 \cdot 0{,}54 = 5{,}94$.

68.

Satunnaismuuttuja X = ”eläinfiguurien lukumäärä 6 pääsiäismunan joukossa”.

Pääsiäismunasta saadaan eläinfiguuri todennäköisyydellä $p = \frac{7}{20}$.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \mathrm{Bin}(6, \frac{7}{20})$.

$n = 6$, $p = \frac{7}{20}$

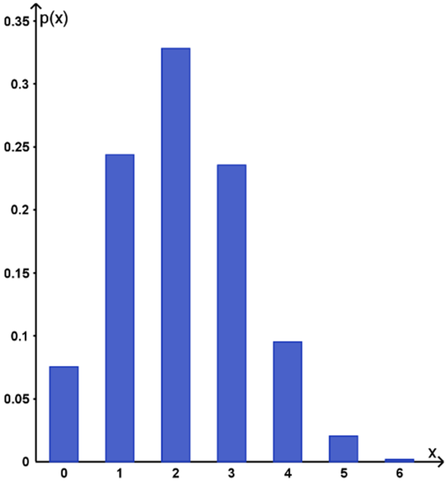
a) Muodostetaan todennäköisyysjakaumat esimerkiksi taulukko-sovelluksessa.

Muuttujan X mahdolliset arvot ovat: x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 tai 6. Määritetään pistetodennäköisyydet $p(x)$ sekä kertymätodennäköisyydet $P(X \leq x)$ ja esitetään ne taulukkona.

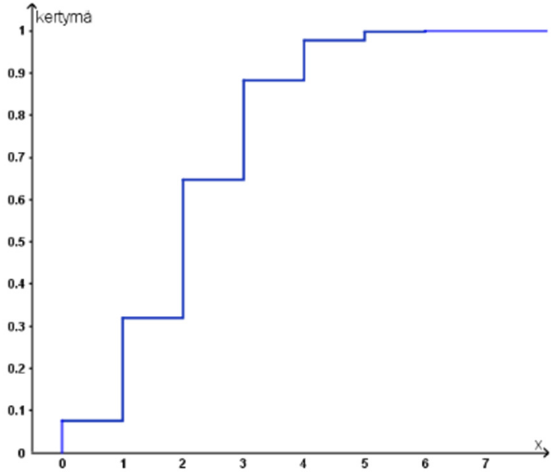
x	p(x)	P(X ≤ x)
0	0.07542	0.07542
1	0.24366	0.31908
2	0.32801	0.64709
3	0.23549	0.88258
4	0.0951	0.97768
5	0.02048	0.99816
6	0.00184	1

Kuvataan pistetodennäköisyyksiä esimerkiksi pylväsdiagrammilla ja kertymätodennäköisyyksiä esimerkiksi porraskaaviolla.

Pyväsdiagrammi



Porraskaavio



Kiinnitä huomiota: akseleilla on nimet ja sopiva asteikko.

b) Lasketaan tapahtuman ”X = 4 tai X = 5” todennäköisyys.

$$P(4 \text{ tai } 5) = p(4) + p(5)$$
$$= 0{,}115 \ldots$$
$$\approx 0{,}12$$

Esimerkiksi laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 6$, $p = 7/20$, alaraja 4 ja yläraja 5.

c) Merkintä $P(X < 2)$ tarkoittaa todennäköisyyttä tapahtumalle ”X pienempi kuin 2” eli tapahtumalle ”X on 1 tai 0” ($X \leq 1$): ”eläinfiguureja saadaan korkeintaan yksi kuudesta pääsiäismunasta”.

Merkintä $P(X = 2)$ tarkoittaa todennäköisyyttä tapahtumalle ”X tasan 2” eli tapahtumalle ”eläinfiguureja saadaan tasan kaksi kuudesta pääsiäismunasta”.

Molempien tapahtumien todennäköisyydet nähdään jakaumataulukoista.

Kertymätodennäköisyys on

$$P(X \leq 1) = 0{,}319 \ldots \approx 0{,}32.$$

Pistetodennäköisyys on

$$P(X = 2) = 0{,}328 \ldots \approx 0{,}33.$$

Tapahtuman ”X = 2” todennäköisyys on suurempi, joten tapahtuma ”X = 2” on todennäköisempi.

Kuudesta pääsiäismunasta on siis todennäköisempää saada tasan kaksi eläinfiguuria kuin korkeintaan yksi eläinfiguuri.

69.

Satunnaismuuttuja X = ”silmäluvun 3 esiintymiskerrat viiden heiton sarjassa”.

Silmäluvun 3 todennäköisyys on $p = \frac{1}{6}$.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}\left(5, \frac{1}{6}\right)$.

$n = 5$, $p = \frac{1}{6}$

a) Muodostetaan todennäköisyysjakauma esimerkiksi taulukkolaskentasovelluksessa. Muuttujan X mahdolliset arvot ovat: x = 0, 1, 2, 3, 4 tai 5. Määritetään pistetodennäköisyydet $p(x)$.

x	p(x)
0	0.40188
1	0.40188
2	0.16075
3	0.03215
4	0.00322
5	0.00013

b) Olkoon satunnaismuuttuja Y = ”voitto (€)”. Muuttujan Y mahdolliset arvot ovat

- $Y = 20$ tapauksessa $X = 4$ tai $X = 5$
- $Y = -1$ tapauksessa $X = 0$.
- $Y = 0$ muulloin, eli tapauksissa $X = 1$ tai $X = 2$ tai $X = 3$

Huomaa, että tilanne ”pelaaja häviää 1 €” vastaa tapahtumaa $Y = -1$, eli negatiivista voittoa.

Muodostetaan muuttujan Y todennäköisyysjakauma. Lasketaan todennäköisyyksien tarkat arvot, eli ei käytetä a-kohdan jakaumataulukon likiarvoja.

Satunnaismuuttujan Y todennäköisyysjakauma	
Muuttujan Y arvo **k (€)**	Pistetodennäköisyys **$P(Y = k)$**
20	0,00334…
−1	0,40187…
0	0,59477…

Tapahtuma ”$X = 0$”.

Tapahtuma ”$X = 1$ tai $X = 2$ tai $X = 3$”. Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 5$, $p = 1/6$, alaraja 1 ja yläraja 3.

Tapahtuma ”$X = 4$ tai $X = 5$”. Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään: $n = 5$, $p = 1/6$, alaraja 4 ja yläraja 5.

Lasketaan muuttujan Y odotusarvo $E(Y)$ kertomalla kukin muuttujan Y arvo sitä vastaavalla todennäköisyydellä ja laskemalla näin saadut tulot yhteen.

$$\begin{aligned} E(Y) &= 20 \cdot 0{,}00334 \ldots + (-1) \cdot 0{,}401 \ldots + 0 \cdot 0{,}594 \ldots \\ &= -0{,}335 \ldots \approx -0{,}34 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Voiton odotusarvo on –0,34 euroa. Siis, jos peliä (nopan heittoa 5 kertaa) pelattaisi monta kierrosta, niin pelaaja jäisi jokaisella kierroksella keskimäärin 0,34 euroa tappiolle.

Odotusarvon perusteella pelaajan ei kannata pelata peliä.

70.

Satunnaismuuttuja X noudattaa binomijakaumaa $X \sim \text{Bin}(7; 0{,}4)$.

$n = 7$, $p = 0{,}4$

Muuttujan X mahdolliset arvot ovat: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 tai 7.

Muodostetaan muuttujan X todennäköisyysjakaumat esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla. Verrataan jakaumia annettuihin kuvaajiin.

k	p(k)	P(X ≤ k)
0	0.02799	0.02799
1	0.13064	0.15863
2	0.26127	0.4199
3	0.2903	0.71021
4	0.19354	0.90374
5	0.07741	0.98116
6	0.0172	0.99836
7	0.00164	1

Kuvaajat A ja B havainnollistavat pistetodennäköisyyksiä.

Kuvaaja A: esimerkiksi arvon $x = 2$ todennäköisyys on kuvaajan perusteella $P(x = 2) \approx 0{,}32$. Jakaumataulukon perusteella muuttujalle X todennäköisyys on $P(X = 2) = 0{,}261\ldots$

Kuvaajaa A ei siis voida yhdistää satunnaismuuttujaan $X \sim \text{Bin}(7; 0{,}4)$.

Kuvaaja B: Likimääräisesti voidaan arvioida, että kuvaajassa esitetyt pistetodennäköisyydet vastaavat jakaumataulukon pistetodennäköisyyksiä.

Kuvaaja B voidaan siis yhdistää satunnaismuuttujaan $X \sim \text{Bin}(7; 0{,}4)$.

Kuvaajat C ja D havainnollistavat kertymätodennäköisyyksiä.

Kuvaaja C: esimerkiksi arvon $x = 2$ kertymätodennäköisyys on kuvaajan perusteella $P(x \leq 2) \approx 0{,}55$. Jakaumataulukon perusteella muuttujalle X kertymätodennäköisyys on $P(X \leq 2) = 0{,}4199\ldots$

Kuvaajaa C ei siis voida yhdistää satunnaismuuttujaan $X \sim \text{Bin}(7; 0{,}4)$.

Kuvaaja D: Likimääräisesti voidaan arvioida, että kuvaajassa esitetyt kertymätodennäköisyydet vastaavat jakaumataulukon pistetodennäköisyyksiä.

Kuvaaja D voidaan siis yhdistää satunnaismuuttujaan $X \sim \text{Bin}(7; 0{,}4)$.