4 FUNKTION ANALYSOINTIA

4.1 Funktion suurin ja pienin arvo

ALOITA PERUSTEISTA

401. **a)** Kuvaajasta nähdään, että $f(-3) \approx 3$, $f(1) \approx -1$ ja $f(4) \approx 1{,}3$.

Vastaus: $f(-3) \approx 3$, $f(1) \approx -1$, $f(4) \approx 1{,}3$

b) Funktion suurin arvo välillä $[-3, 4]$ on noin 3 ja pienin arvo noin -1.

Vastaus: suurin 3, pienin -1

402. **a)** Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 6$ derivaatta on $f'(x) = 2 \cdot x + 2 + 0 = 2x + 2$. Määritetään derivaatan nollakohta yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \quad \| :2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -1$

b) Funktion f derivaatan nollakohta $x = -1$ kuuluu välille $[-3, 2]$. Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa, joten lasketaan funktion f arvot näissä kohdissa.

$f(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 6 = -3$
$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 6 = -7$
$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 2$

Funktion f suurin ja pienin arvo välillä $[-3, 2]$ ovat 2 ja -7.

Vastaus: suurin 2, pienin -7

403. Funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 2$ derivaatta on
$f'(x) = -2 \cdot x + 6 \cdot 1 + 0 = -2x + 6.$
Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -2x + 6 &= 0 \\ -2x &= -6 \quad \| : (-2) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

a) Funktion f derivaatan nollakohta $x = 3$ kuuluu välille $[-1, 4]$. Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa, joten lasketaan funktion f arvot näissä kohdissa.

$f(-1) = -(-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 2 = -9$
$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 2 = 7$
$f(4) = -4^2 + 6 \cdot 4 - 2 = 6$

Funktion f suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 4]$ ovat 7 ja -9.

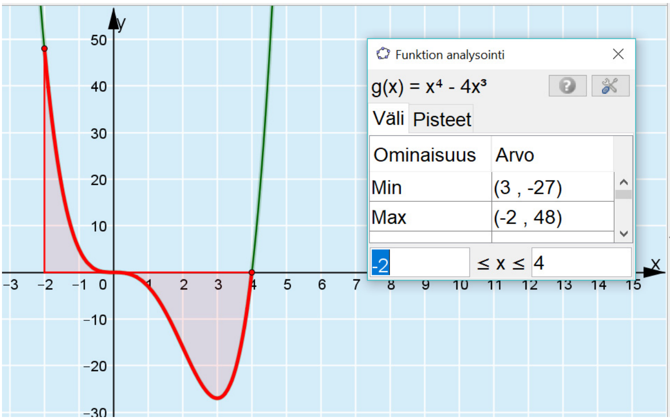
Vastaus: suurin 7, pienin -9

b) Funktion f derivaatan nollakohta $x = 3$ ei kuuluu välille $[-3, 2]$, joten funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteessä. Lasketaan funktion f arvot näissä kohdissa.
$f(-3) = -(-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 2 = -29$
$f(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 2 = 6$

Funktion f suurin arvo on 6 ja pienin arvo -29 välillä $[-3, 2]$.

Vastaus: suurin 6, pienin -29

404.



Huomataan, että funktion $g(x) = x^4 - 4x^3$ suurin arvo on 48 ja pienin arvo -27 välillä $[-2, 4]$.

Vastaus: suurin 48, pienin -27

405. Kuvaajan perusteella funktio g muuttuu kasvavasta väheneväksi kohdassa $x \approx -2$, joten funktion paikallinen maksimikohta on $x \approx -2$.
Kuvaajan perusteella funktion g muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdassa $x \approx 1$, joten funktion paikallinen minimikohta on $x \approx 1$.

Maksimiarvo on kuvaajan perusteella noin 3 ja minimiarvo noin -3.

Vastaus: paikallinen maksimikohta $x \approx -2$ ja paikallinen maksimiarvo noin 3, paikallinen minimikohta $x \approx 1$ ja paikallinen minimiarvo noin -3

406. Funktio f muuttuu kasvavasta väheneväksi kohdassa $x = 3$, joten funktion paikallinen maksimikohta on $x = 3$.
Funktion f muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdassa $x = 7$, joten funktion paikallinen minimikohta on $x = 7$.

Vastaus: paikallinen maksimikohta $x = 3$, paikallinen minimikohta $x = 7$

407. A Funktion kulkusuunta ei muutu kohdassa $x = 4$, joten funktiolla ei ole paikallisia ääriarvokohtia. Kulkukaaviota A vastaa vaihtoehto III.

B Funktion muuttuu kohdassa $x = 4$ kasvavasta väheneväksi, joten kohdassa on paikallinen maksimikohta. Kulkukaaviota B vastaa vaihtoehto I.

C Funktion muuttuu kohdassa $x = 4$ vähenevästä kasvavaksi, joten kohdassa on paikallinen minimikohta. Kulkukaaviota C vastaa vaihtoehto II.

D Funktion kulkusuunta ei muutu kohdassa $x = 4$, joten funktiolla ei ole paikallisia ääriarvokohtia. Kulkukaaviota D vastaa vaihtoehto III.

Vastaus: A: III, B: I, C: II ja D: III

408. **a)** Funktio f muuttuu kasvavasta väheneväksi kohdassa $x = 1$, joten funktion paikallinen maksimikohta on $x = 1$. Funktion arvo kohdassa $x = 1$ on 0,62, joten paikallinen maksimiarvo on 0,62.

Funktion f muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdissa $x = -2$ ja $x = 3$, joten funktion paikalliset minimikohdat ovat $x = -2$ ja $x = 3$.

Koska $f(-2) = -2{,}53$ ja $f(3) = -0{,}45$, niin paikalliset minimiarvot ovat $-2{,}53$ ja $-0{,}45$.

Vastaus: paikallinen maksimikohta $x = 1$ ja paikallinen maksimiarvo 0,62, paikalliset minimikohdat $x = -2$ ja $x = 3$ ja paikalliset minimiarvot $-2{,}53$ ja $-0{,}45$

b) Funktiolla f ei ole suurinta arvoa, mutta funktion pienin arvo on $-2{,}53$.

Vastaus: ei suurinta arvoa, pienin arvo $-2{,}53$

409. **a)** Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ derivaatta on $f'(x) = 2 \cdot 2x + 4 \cdot 1 = 4x + 4$. Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 4x + 4 &= 0 \\ 4x &= -4 \quad \| :4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Laaditaan kulkukaavio.

		-1	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘	min	↗

$f'(-2) = 4 \cdot (-2) + 4 = -8 + 4 = -4 < 0$
$f'(0) = 4 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$

Vastaus: $x = -1$

		-1	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘	min	↗

b) Kulkukaavion perusteella paraabelin $y = f(x)$ huippu on kohdassa $x = -1$, joten huipun x-koordinaatti on -1.

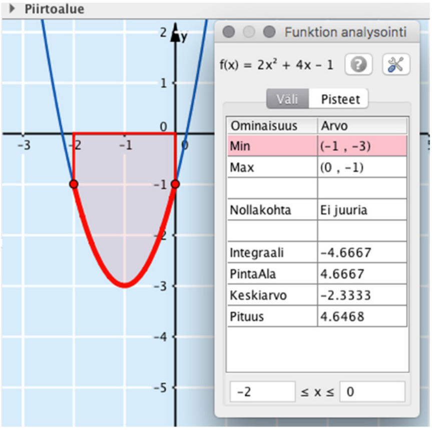
Huipun y-koordinaatti saadaan, kun lasketaan funktion arvo kohdassa $x = -1$.

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 1 = 2 \cdot 1 - 4 - 1 = 2 - 4 - 1 = -3$$

Huippu on pisteessä $(-1, -3)$.

Vastaus: $(-1, -3)$

c) Piirretään funktion kuvaaja ja määritettään huipun koordinaatit analysointityökalun avulla.



Kuvaajan perusteella paraabelin huippu on pisteessä (−1, −3).

Vastaus: -

410. **a)** Funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x$ derivaatta on

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+\frac{1}{2}\cdot 2x-6\cdot 1=x^2+x-6$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x)=0$ avulla.

$$x^2+x-6=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}$$

$$x=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2 \quad \text{tai } x=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x=-3$ ja $x=2$.

Vastaus: $x=-3$ ja $x=2$

b) Laaditaan kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.

		-3		2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↗
		max		min	

$f'(-4) = 6$
$f'(0) = -6$
$f'(3) = 6$

c) Funktion *f* paikallinen maksimiarvo on

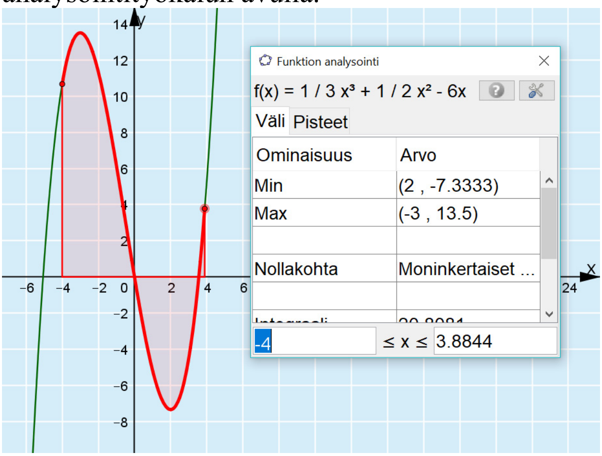
$$f(-3) = \frac{1}{3}\cdot(-3)^3 + \frac{1}{2}\cdot(-3)^2 - 6\cdot(-3)$$
$$= -\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18 = -9 + 4\frac{1}{2} + 18 = 13\frac{1}{2}$$

ja paikallinen minimiarvo on

$$f(2) = \frac{1}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 6\cdot 2$$
$$= \frac{8}{3} + 2 - 12 = \frac{8}{3} - {}^{3)}10 = \frac{8}{3} - \frac{30}{3} = -\frac{22}{3} = -7\frac{1}{3}.$$

Vastaus: paikallinen maksimikohta -3 ja paikallinen maksimiarvo $13\frac{1}{2}$, paikallinen minimikohta 2 ja paikallinen minimiarvo $-7\frac{1}{3}$

d) Piirretään funktion kuvaaja ja määritetään huipun koordinaatit analysointityökalun avulla.



Kuvaaja ja analysointitoiminto vahvistavat kohtien a–c tulokset.

Vastaus: -

VAHVISTA OSAAMISTA

411. **a)** Funktio f muuttuu kasvavasta väheneväksi kohdissa $x = –3$, $x = 2$ ja $x = 4,5$, joten nämä ovat paikalliset maksimikohdat. Paikalliset maksimiarvot ovat $f(–3) = 3$, $f(2) = 2$ ja $f(4,5) = 3,5$.

Vastaus: paikalliset maksimikohdat $x = –3$, $x = 2$ ja $x = 4,5$, paikalliset maksimiarvot 3, 2 ja 3,5

b) Funktio f muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdissa $x = –0,5$ ja $x = 3$, joten nämä ovat paikalliset minimikohdat. Lisäksi välin päätepisteissä $x = –4$ ja $x = 5$ funktion arvot ovat pienempiä kuin funktion arvot lähiympäristössä, joten nämä ovat myös paikallisia minimikohtia.

Paikalliset minimiarvot ovat $f(–4) = 2$, $f(–0,5) = –0,5$, $f(3) = 1,5$ ja $f(5) = 4,5$.

Vastaus: paikalliset minimikohdat $x = –4$, $x = –0,5$, $x = 3$ ja $x = 5$, paikalliset minimiarvot 2, –0,5, 1,5 ja 2,5

c) Kohtien a ja b perusteella funktion f suurin arvo on 3,5 ja pienin arvo –0,5.

Vastaus: suurin 3,5, pienin –0,5

412. **a)** Funktion $f(x) = 4x + 7$ derivaatta on $f\,'(x) = 4$, joten funktiolla ei ole derivaatan nollakohtia. Funktio saa välillä $[−3, 3]$ suurimman ja pienimmän arvosta välin päätepisteissä. Lasketaan funktion arvot näissä pisteissä.
$f(−3) = 4 \cdot (−3) + 7 = −12 + 7 = −5$
$f(3) = 4 \cdot 3 + 7 = 12 + 7 = 19$

Funktion suurin arvo on 19 ja pienin −5 välillä $[−3, 3]$.

Vastaus: suurin 19, pienin −5

b) Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2$ derivaatta on $f\,'(x) = -3x^2 + 6x$. Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f\,'(x) = 0$ avulla.

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot(-3)\cdot 0}}{2\cdot(-3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36}}{-6} = \frac{-6 \pm 6}{-6}$$

$$x = \frac{-6+6}{-6} = \frac{0}{-6} = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6-6}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 2$.

Funktion f derivaatan nollakohdat kuuluvat välille $[-1, 2]$. Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa, joten lasketaan funktion f arvot näissä kohdissa.

$f(-1) = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 = -(-1) + 3 \cdot 1 = 1 + 3 = 4$
$f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$
$f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 = -8 + 3 \cdot 4 = -8 + 12 = 4$

Funktion f suurin arvo on 4 ja pienin 0 välillä $[-1, 2]$.

Vastaus: suurin 4, pienin 0

413. **a)** $f(x) = x^3 - 12x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 12$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12 &= 0 \\ 3x^2 &= 12 \quad \| :3 \\ x^2 &= 4 \\ x = -\sqrt{4} &\quad \text{tai } x = \sqrt{4} \\ x = -2 &\quad \text{tai } x = 2 \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 2$.

Funktion f derivaatan nollakohta $x = 2$ kuuluu välille $[-1, 2]$. Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa, joten lasketaan funktion f arvot näissä kohdissa.

$f(-1) = (-1)^3 - 12 \cdot (-1) + 1 = -1 + 12 + 1 = 12$
$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 1 = 8 - 24 + 1 = -15$

Funktion f suurin arvo on 12 ja pienin -15 välillä $[-1, 2]$.

Vastaus: suurin 12, pienin -15

b) Derivaatan nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 2$.

Laaditaan kulkukaavio.

	-2		2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↗
		max		min	

$f'(-3) = 15$
$f'(0) = -12$
$f'(3) = 15$

Paikallinen maksimiarvo $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) + 1 = 17$ ja paikallinen minimiarvo $f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 1 = -15$.

Vastaus: paikallinen minimiarvo -15, paikallinen maksimiarvo 17

414. Funktion $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 8$ derivaatta on $g'(x) = -6x^2 + 6x + 12$
Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $g'(x) = 0$ avulla.

$$-6x^2 + 6x + 12 = 0 \quad \| :6 \quad \text{jaetaan 6:lla, jotta saadaan sievempi yhtälö}$$
$$-x^2 + x + 2 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$
$$x = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Derivaatan nollakohdat $x = -1$ ja $x = 2$.

Laaditaan kulkukaavio.

		-1		2	
$g'(x)$	$-$		$+$		$-$
$g(x)$	↘		↗		↘
		min		max	

$g'(-2) = -24$
$g'(0) = 12$
$g'(3) = -24$

Paikallinen minimiarvo $g(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) - 8 = -15$ ja paikallinen maksimiarvo $g(2) = -2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 8 = 12$.

Vastaus: paikallinen minimiarvo -15, paikallinen maksimiarvo 12

415. **a)** Funktiolla voi olla useita paikallisia maksimikohtia, joista kaikki eivät aina ole funktion suurimpia arvoja. Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, ei ole aina

b) Kohdat, joissa funktion derivaatta vaihtaa merkkiä ovat paikallisia ääriarvoja. Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, funktion derivaatta

c) Polynomifunktio saa suljetulla välillä pienimmän ja suurimman arvonsa välillä olevissa derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. Jos suljetulla välillä ei ole yhtään derivaatan nollakohtaa, niin polynomifunktio saa pienimmän arvonsa välin päätepisteessä. Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, on kyseisellä välillä pienin arvo

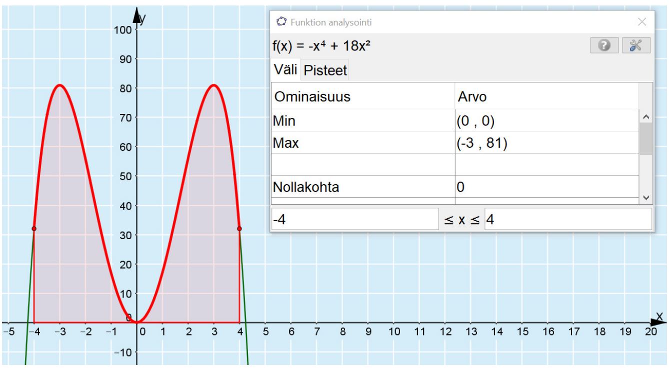
416. **a)** Määritetään ohjelman avulla derivaatan nollakohdat.

1	f(x):=-x^4+18x^2 → $f(x) := -x^4 + 18\,x^2$
2	f'(x) → $-4\,x^3 + 36\,x$
3	Ratkaise(f'(x)=0) → $\{x = -3, x = 0, x = 3\}$

Havaitaan, että derivaatan nollakohdat ovat $x = -3$, $x = 0$ ja $x = 3$

Vastaus: $x = -3$, $x = 0$ ja $x = 3$

b) Tutkitaan funktiota analysointitoiminnolla.



Havaitaan, että funktion paikallinen minimiarvo on 0 ja funktio saavuttaa paikallinen maksimiarvonsa 81 kahdessa kohtaa.

Vastaus: paikallinen maksimiarvo 81, paikallinen minimiarvo 0

417. Funktion $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 5$ derivaatta on
$f'(x) = 6x^2 + 12x + 6$

Derivaatan nollakohdat

$$6x^2 + 12x + 6 = 0 \quad || : 6$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{12}$$
$$x = \frac{-2 \pm 0}{2}$$
$$x = -1$$

Laaditaan kulkukaavio.

		-1
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

$f'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 6 = 6 > 0$
$f'(0) = 6 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$

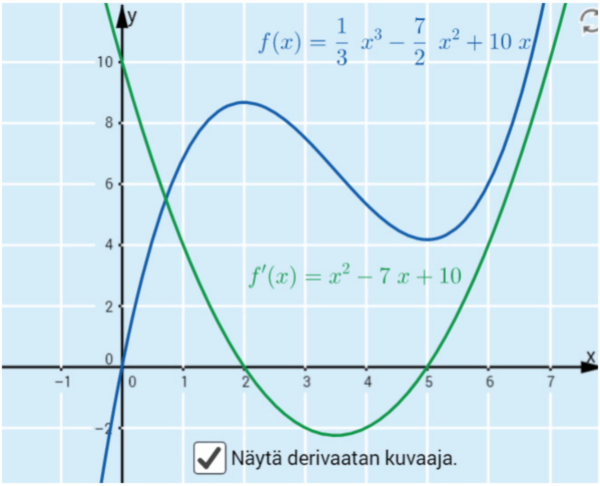
Koska derivaatta ei vaihda merkkiään nollakohdassaan, ei funktiolla ole paikallisia ääriarvoja.

Vastaus:

		-1
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

, ei ole

418.



Muodostetaan kuvaajien avulla funktion *f* kulkukaavio katsomalla derivaatan kuvaajasta derivaatan nollakohdat ja merkit.

Havaitaan, että derivaatan nollakohdat ovat $x = 2$ ja $x = 5$. Derivaatan arvot ovat negatiivisia nollakohtien välissä ja muualla positiivisia.

Vastaus:

		2		5	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max		min	

419. A Funktion kuvaaja A on vähenevä, kun $x \leq -1$ ja kasvava, kun $x \geq -1$. Derivaatan kuvaajasta IV nähdään, että derivaatan arvot vaihtuvat negatiivisista positiivisiin kohdassa $x = -1$, joten kuvaajat A ja IV kuuluvat yhteen.

B Funktion kuvaaja B on kasvava, kun $x \leq -1$ ja vähenevä, kun $x \geq -1$. Derivaatan kuvaajasta I nähdään, että derivaatan arvot vaihtuvat positiivisista negatiivisiin kohdassa $x = -1$, joten kuvaajat B ja I kuuluvat yhteen.

C Funktion kuvaaja C on kasvava, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 1$ ja vähenevä, kun $-1 \leq x \leq 1$. Derivaatan kuvaajasta III nähdään, että derivaatan arvot vaihtuvat positiivisista negatiivisiin kohdassa $x = -1$ ja negatiivisista positiivisiin kohdassa $x = 1$, joten kuvaajat C ja III kuuluvat yhteen.

D Funktion kuvaaja D on vähenevä, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 1$ ja kasvava, kun $-1 \leq x \leq 1$. Derivaatan kuvaajasta II nähdään, että derivaatan arvot vaihtuvat negatiivisista positiivisiin kohdassa $x = -1$ ja positiivisista negatiivisiin kohdassa $x = 1$, joten kuvaajat D ja II kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV, B: I, C: III ja D: II

420. A Kuvaaja A on vakiofunktio, jonka arvo on –3. Vakiofunktion derivaatta on 0 ja sellaista vaihtoehtoa kuvaajista ei löydy. Kuvaajan A täytyy siis olla derivaattafunktion kuvaaja. Koska derivaatta on –3 kaikkialla, sitä vastaavan funktion täytyy olla suora, jonka kulmakerroin on –3. Tällainen kuvaaja on D.

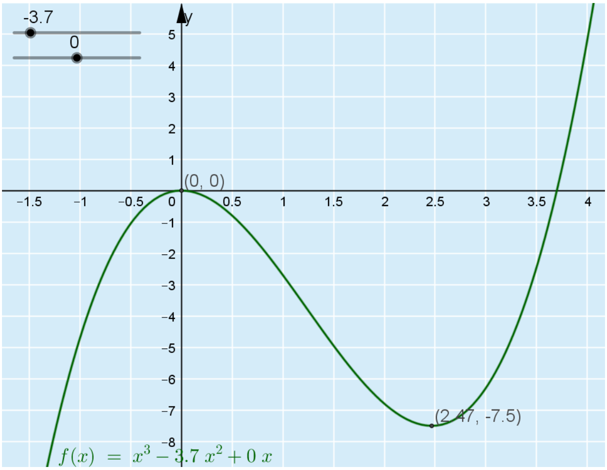
B Kuvaaja B muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdassa $x = -1$ ja kasvavasta väheneväksi kohdassa $x = 1$. Tällaisen funktion derivaatan nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 1$. Lisäksi derivaatta on negatiivinen, kun $x < -1$ tai $x > 1$, ja positiivinen, kun $-1 < x < 1$. Tällainen kuvaaja on F.

C Kuvaaja C muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdassa $x = 2$. Tällaisen funktion derivaatan nollakohta on $x = 2$. Lisäksi derivaatta on negatiivinen, kun $x < 2$, ja positiivinen, kun $x > 2$. Tällainen kuvaaja on E.

G Kuvaaja G muuttuu kasvavasta väheneväksi kohdassa $x = 0$. Tällaisen funktion derivaatan nollakohta on $x = 0$. Lisäksi derivaatta on positiivinen, kun $x < 0$, ja negatiivinen, kun $x > 0$. Tällainen kuvaaja on H.

Vastaus: D: A, B: F, C: E ja G: H

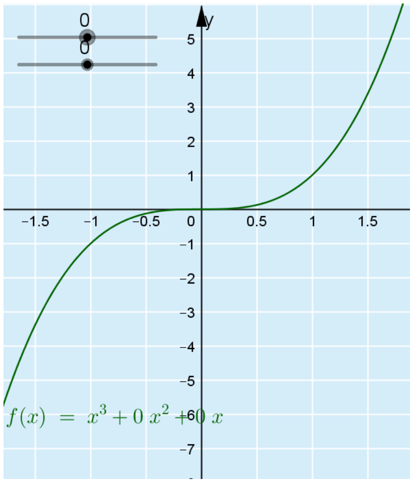
421. **a)** Huomataan, että esimerkiksi funktion $f(x) = x^3 - 3{,}7x^2$ nollakohta $x = 0$ on myös paikallinen maksimikohta.



Vastaus: esim. $f(x) = x^3 - 3{,}7x^2$

b) Huomataan, että esimerkiksi funktiolla $f(x) = x^3$ ei ole paikallisia ääriarvokohtia, koska funktio on kaikkialla kasvava.

Vastaus: esim. $f(x) = x^3$



422. **a)** Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava välillä [−4, −1], joten se saa suurimman arvona välin päätepisteessä kohdassa $x = -1$.

Vastaus: $x = -1$

b) Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on vähenevä välillä [−5, −4], kasvava välillä [−4, −1] ja vähenevä välillä [−1, 0], joten funktio voi saada suurimman arvonsa joko välin päätepisteessä kohdassa $x = -5$ tai paikallisessa maksimikohdassa $x = -1$.

Vastaus: $x = -5$ tai $x = -1$

423. $g(x)=\frac{20}{3}x^3-5x^2+4x$ ja $h(x)=5x^2+4x$

a) $f(x)=g(x)-h(x)=\frac{20}{3}x^3-5x^2+4x-\left(5x^2+4x\right)=\frac{20}{3}x^3-10x^2$

$f'(x)=20x^2-20x$

Derivaatan nollakohdat

$$20x^2-20x=0 \parallel :20$$
$$x^2-x=0$$
$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot0}}{2\cdot1}$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-0}}{2}$$
$$x=\frac{1\pm1}{2}$$
$$x=\frac{1-1}{2}=\frac{0}{2}=0 \quad \text{tai} \quad x=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Laaditaan kulkukaavio

		0		1	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max		min	

$f'(-1) = 20 \cdot (-1)2 - 20 \cdot (-1) = 40 > 0$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-20\cdot\frac{1}{2}=20\cdot\frac{1}{4}-10=-5<0$

$f'(2) = 20 \cdot 22 - 20 \cdot 2 = 20 > 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktion paikallinen maksimikohta on $x = 0$ ja paikallinen minimikohta on $x = 1$.

Lasketaan funktion paikalliset ääriarvot.

paikallinen maksimiarvo $f(0)=\frac{20}{3}\cdot0^3-10\cdot0^2=0$

paikallinen minimiarvo

$f(1)=\frac{20}{3}\cdot1^3-10\cdot1^2=\frac{20}{3}-10=\frac{20}{3}-\frac{30}{3}=-\frac{10}{3}$

Vastaus: paikallinen maksimiarvo 0, paikallinen minimiarvo $-\frac{10}{3}$

b) $f(x)=g(x)+h(x)=\frac{20}{3}x^3-5x^2+4x+\left(5x^2+4x\right)=\frac{20}{3}x^3+8x$

$f'(x) = 20x^2 + 8$

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned}
20x^2+8&=0\\
20x^2&=-8 \quad ||:20\\
x^2&=-\frac{8}{20}\\
x&=\pm\sqrt{-\frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

Negatiivisella luvulla ei ole neliöjuurta. Derivaatalla ei siis ole nollakohtia, joten derivaatta ei voi vaihtaa merkkiään eikä funktiolla ole paikallisia ääriarvokohtia.

Vastaus: ei paikallisia ääriarvoja

424. Merkitään lukua kirjaimella x.
Luvun kuutio on x^3.
Luvun neliö on x^2.

Merkitään luvun kuution ja neliön erotusta funktiolla $f(x) = x^3 - x^2$.
Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 2x$

Derivaatan nollakohdat

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 0}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm 2}{6}$$

$$x = \frac{2-2}{6} = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2+2}{6} = \frac{2}{3}$$

Laditaan kulkukaavio, kun $x > 0$.

		$\frac{2}{3}$	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

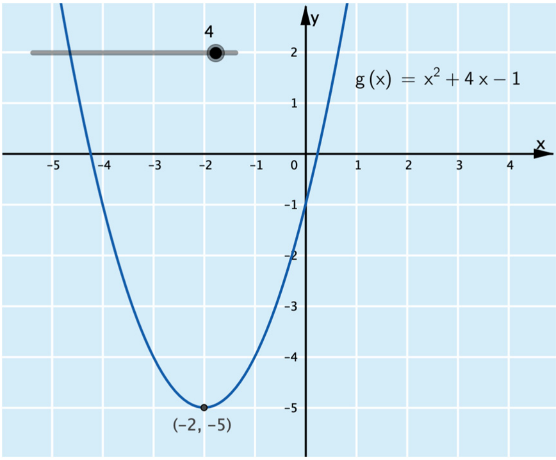
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} < 0$$

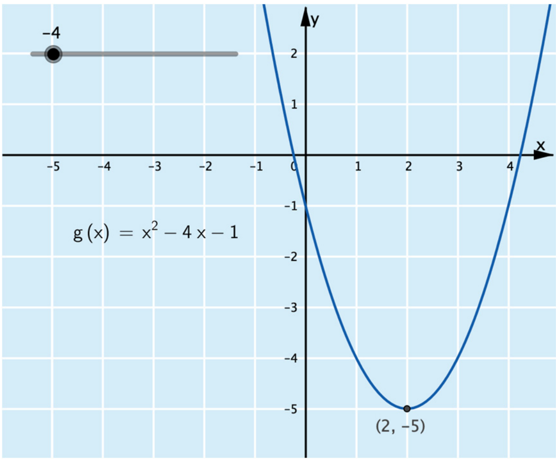
$$f'(1) = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 1 = 1 > 0$$

Kulkukaaviosta havaitaan, että erotus on pienin, kun $x = \frac{2}{3}$.

Vastaus: $\frac{2}{3}$

425. **a)** Piirtämällä funktion $g(x)=x^2+ax-1$ kuvaaja a:n eri arvoilla huomataan, että, kun a = 4 tai a = −4, funktion pienin arvo on −5.





Vastaus: $a=\pm 4$

b) Koska funktion $g(x) = x^2 + ax - 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, funktio saa pienimmän arvonsa huipussaan.
Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidessa pitää huomata, että a on vakio.

Funktion $g(x) = x^2 + ax - 1$ derivaatta on $g'(x) = 2x + a$.

Derivaatan nollakohta

$$\begin{aligned} 2x + a &= 0 \\ 2x &= -a \quad \| : 2 \\ x &= -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

Koska funktion pienin arvo on oltava −5, on huipun y-koordinaatin oltava −5. Laaditaan y-koordinaatin avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä a.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) - 1 &= -5 \\ \frac{a^2}{4} - {}^{2)}\frac{a^2}{2} - 1 &= -5 \\ \frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} &= -4 \\ \frac{a^2 - 2a^2}{4} &= -4 \\ -\frac{a^2}{4} &= -4 \quad \| \cdot (-4) \\ a^2 &= 16 \\ a &= \pm\sqrt{16} \\ a &= \pm 4 \end{aligned}$$

Vastaus: $a = \pm 4$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

426. Funktiolla on terassikohta, jos sillä on sellainen derivaatan nollakohta, jossa derivaatta ei vaihda merkkiään.
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3.$

Derivaatan nollakohdat
$3x^2 - 6x + 3 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6}$$

$$x = \frac{6}{6} = 1$$

Laaditaan kulkukaavio.

		1	
$g'(x)$	$+$		$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

$g'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$
$g'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 3 > 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktiolla on derivaatan nollakohta, jossa derivaatta ei vaihda merkkiään eli funktiolla on terassikohta $x = 1$.

Vastaus: -

427. Derivaatta ilmaisee funktion kasvunopeuden ja derivaatan derivaatta ilmaisee kasvunopeuden muutoksen suuruutta. Nopeimman kasvun kohta tarkoittaa sitä kohtaa, jossa funktion derivaatta saa suurimman arvonsa, joten funktio täytyy derivoida kaksi kertaa.

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

Derivaatta on $f'(x) = -3x^2 + 4x - 4$.

Derivaatan derivaatta on $f''(x) = -6x + 4$.

Määritetään derivaatan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} -6x + 4 &= 0 \\ -6x &= -4 \qquad \| :(-4) \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Laaditaan derivaattafunktion $f'(x)$ kulkukaavio.

		$\frac{2}{3}$	
$f''(x)$	$+$		$-$
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
		max	

$f'(0) = -6 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$
$f'(1) = -6 \cdot 1 + 4 = -2 < 0$

Derivaattafunktion kulkukaaviosta nähdään, että derivaatta saa suurimman arvonsa paikallisessa maksimikohdassa $x = \frac{2}{3}$, joten funktio f kasvaa nopeimmin kohdassa $x = \frac{2}{3}$.

Vastaus: $\frac{2}{3}$

428. $f(x) = ax^2 + bx + c$
Derivaatta on $f'(x) = 2ax + b$.

Derivaatan nollakohta

$$\begin{aligned} 2ax + b &= 0 \\ 2ax &= -b \qquad \|:2a \\ x &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Derivaatta on ensimmäisen asteen polynomifunktio, jonka kuvaaja on nouseva tai laskeva suora, joten derivaatta vaihtaa merkkinsä nollakohdassaan. Tällä perusteella funktiolla f on täsmälleen yksi ääriarvokohta.

Vastaus: -

429. Tutkitaan funktiota $f(x) = -x^4 - 4$.

Derivaatta on $f'(x) = -4x^3$

Derivaatan nollakohdat

$$
\begin{aligned}
-4x^3 &= 0 \qquad \|:(-4) \\
x^3 &= 0 \\
x &= \sqrt[3]{0} \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Laaditaan kulkukaavio

		0	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗		↘
		max	

$f'(-1) = -4 \cdot (-1)3 = 4 > 0$
$f'(1) = -4 \cdot 13 = -4 < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio kasvaa, kun $x \le 0$ ja vähenee, kun $x \ge 0$, joten funktion suurin arvo saavutetaan paikallisessa maksimikohdassa $x = 0$.

Funktion suurin arvo on $f(0) = -0^4 - 4 = -4$.

Tutkitaan funktiota $g(x) = x^2 - 2x$.

Derivaatta on $g'(x) = 2x - 2$.

Derivaatan nollakohta

$$
\begin{aligned}
2x - 2 &= 0 \\
2x &= 2 \qquad \|:2 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Koska funktion g kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, funktion pienin arvo saavutetaan paraabelin huipussa. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta $x = 1$. Lasketaan y-koordinaatti.

$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

Funktion g pienin arvo on -1.

Koska funktion f suurin arvo on -4 ja funktion g pienin arvo on -1, eivät funktioiden kuvaajat leikkaa.

Vastaus: -

430. $f(x) = x^3 + ax^2$

Derivaatta on $f'(x) = 3x^2 + 2ax$.

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta vaihtaa merkkinsä, jos sillä on kaksi nollakohtaa. Toisen asteen yhtälöllä $3x^2 + 2ax = 0$ on kaksi ratkaisua, jos diskriminantti D > 0.

Diskriminantti on $\mathrm{D} = b^2 - 4ac = (2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 = 4a^2$

Ratkaistaan epäyhtälö $4a^2 > 0$. Huomataan, että epäyhtälö toteutuu kaikilla muilla a:n arvoilla paitsi, kun $a = 0$.
Funktiolla on siis paikallisia ääriarvokohtia, jos $a \neq 0$.

Vastaus: $a \neq 0$

431. Kolmannen asteen polynomifunktio on muotoa $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Derivaatta $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Muodostetaan yhtälöt annettujen tietojen avulla ja muodostetaan yhtälöistä yhtälöryhmä. Ratkaistaan yhtälöryhmän avulla vakiot *a*, *b*, *c* ja *d*.

Tiedon $f(0) = -1$ avulla saadaan yhtälö
$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -1$ eli $d = -1$.

Tiedon $f(1) = 2$ avulla saadaan yhtälö
$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 2$ eli $a + b + c + d = 2$.

Paikallisissa ääriarvokohdissa derivaatan arvo on nolla, joten saadaan yhtälöt
$3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$ eli $c = 0$ ja
$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0$ eli $3a + 2b + c = 0$.

Muodostetaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} d = -1 \\ a + b + c + d = 2 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

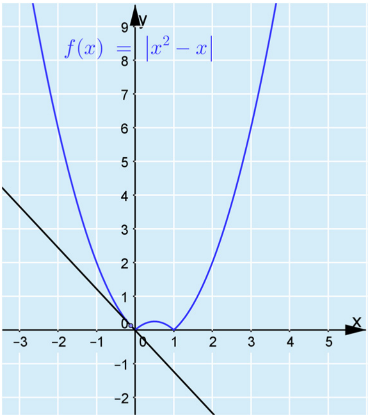
Ohjelman avulla yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$$

Joten funktio on $f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 1$.

Vastaus: $f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 1$

432. **a)** Piirretään funktion kuvaaja ja sille liikuteltava tangentti.

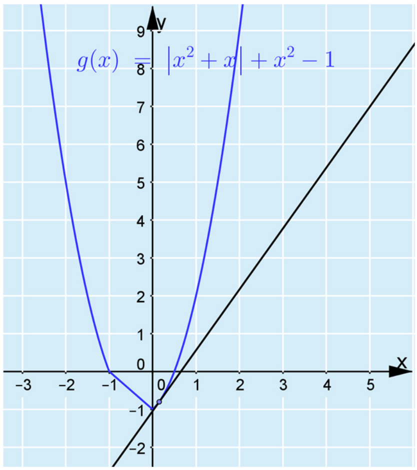


b) Tangentti häviää, koska terävään kohtaan ei voida piirtää yksikäsitteistä tangenttia.

Vastaus: tangentti häviää, koska ei voida piirtää yksikäsitteistä tangenttia

c) Piirretään funktion kuvaaja ja siirreltävä tangentti.

Huomataan, että kuvaajan alimpaan kohtaan ei voi piirtää yksikäsitteistä tangenttia, joten siinä kohdassa ei ole derivaattaa eikä derivaatan nollakohtien avulla voi määrittää funktion pienintä arvoa.

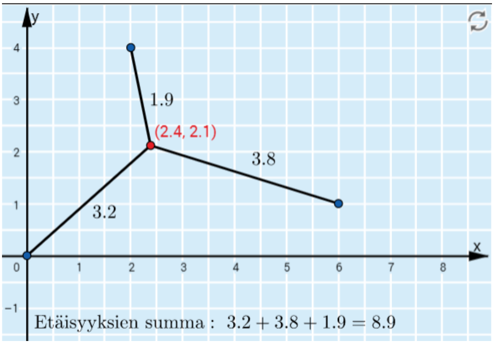


Vastaus: funktiolla ei ole derivaattaa kohdassa, missä se saa pienimmän arvonsa

4.2 Talouden ja luonnontieteiden sovelluksia

ALOITA PERUSTEISTA

433. Appletin avulla huomataan, että etäisyyksien summa on pienimmillään noin 8,9 km ja se saavutetaan esimerkiksi pisteessä noin (2,4; 2,1).



Vastaus: esim. (2,4; 2,1)

434. A Funktiossa $m(t)$ muuttujana on t, joten merkintää A vastaa vaihtoehto II.

B Funktio $m(t)$ kuvaa nuhakuumetapausten lukumäärää, joten merkintää B vastaa vaihtoehto III.

C Funktion $m(t)$ derivaattafunktio $m'(t)$ ilmaisee nuhakuumetapausten lukumäärän muutosnopeutta, joten merkintää C vastaa vaihtoehto V.

D Merkintä vrk tarkoittaa vuorokautta, joka on ajan yksikkö, joten merkintää D vastaa vaihtoehto I.

E Koska muuttuja t ilmaisee ajan vuorokausina mittauksen alusta ja mittaus kesti 10 vrk, ovat t:n arvot 0 ja 10 tarkasteluvälin päätepisteet. Merkintää E vastaa vaihtoehto IV.

Vastaus: A: II, B: III, C: V, D: I ja E: IV

435. **a)** Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin −5 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Vastaus: alaspäin aukeava paraabeli

b) Derivoidaan funktio f.
$f'(x) = -5 \cdot 2x + 4 \cdot 1 + 0 = -10x + 4$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -10x + 4 &= 0 \\ -10x &= -4 \quad \| : (-10) \\ x &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 0{,}4$

c) Funktio f saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta $x = 0{,}4$.

Huipun y−koordinaatti saadaan, kun funktioon f sijoitetaan $x = 0{,}4$.

$f(0{,}4) = -5 \cdot 0{,}4^2 + 4 \cdot 0{,}4 + 1 = 1{,}8$

Pallo on korkeimmillaan 0,4 sekunnin kuluttua heitosta ja se on silloin 1,8 metrin korkeudessa.

Vastaus: 0,4 s; 1,8 m

436. Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin −0,0464 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.
Funktio f saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa.
Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio $f(x) = -0{,}0464x^2 + 0{,}384x$.
$f'(x) = -0{,}0464 \cdot 2x + 0{,}384 \cdot 1 = -0{,}0928x + 0{,}384$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -0{,}0928x + 0{,}384 &= 0 \\ -0{,}0928x &= -0{,}384 \quad \| : (-0{,}0928) \\ x &= 4{,}137... \end{aligned}$$

Hypyn korkein kohta saadaan laskemalla funktion f arvo, kun $x = 4{,}137…$.
$f(4{,}137…) = -0{,}0464 \cdot 4{,}137…^2 + 0{,}384 \cdot 4{,}137… = 0{,}794… \approx 0{,}79$

Hyppääjä käy 0,79 m korkeudella.

Vastaus: 0,79 m korkeudella

437. **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = -0{,}012x^2 + 0{,}321x - 0{,}5$.
$f'(x) = -0{,}012 \cdot 2x + 0{,}321 \cdot 1 - 0 = -0{,}024x + 0{,}321$

Määritetään derivaatan nollakohta yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -0{,}024x + 0{,}321 &= 0 \\ -0{,}024x &= -0{,}321 \quad \| : (-0{,}024) \\ x &= 13{,}375 \\ x &\approx 13{,}4 \end{aligned}$$

Vastaus: $x \approx 13{,}4$

b) Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä $x = 4$ ja $x = 22$ sekä derivaatan nollakohdassa $x = 13{,}375$.

$f(4) = -0{,}012 \cdot 4^2 + 0{,}321 \cdot 4 - 0{,}5 = 0{,}592 \approx 0{,}59$
$f(13{,}375) = -0{,}012 \cdot 13{,}375^2 + 0{,}321 \cdot 13{,}375 - 0{,}5 = 1{,}646\ldots \approx 1{,}65$
$f(22) = -0{,}012 \cdot 22^2 + 0{,}321 \cdot 22 - 0{,}5 = 0{,}754 \approx 0{,}75$

Vastaus: $f(4) \approx 0{,}59$, $f(13{,}38) \approx 1{,}65$ ja $f(22) \approx 0{,}75$

c) Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. B-kohdan perusteella lohi kasvaa nopeimmin noin 13 °C lämpötilassa.

Vastaus: n. 13 °C

438. Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio $f(x) = 0{,}000004x^2 - 0{,}005x + 2{,}033$.
$f'(x) = 0{,}000004 \cdot 2x - 0{,}005 = 0{,}000008x - 0{,}005$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 0{,}000008x - 0{,}005 &= 0 \\ 0{,}000008x &= 0{,}005 \qquad \|: 0{,}000008 \\ x &= 625 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä $x = 300$ ja $x = 1000$ sekä välillä olevassa derivaatan nollakohdassa $x = 625$.

$f(300) = 0{,}000004 \cdot 300^2 - 0{,}005 \cdot 300 + 2{,}033 = 0{,}893$
$f(625) = 0{,}000004 \cdot 625^2 - 0{,}005 \cdot 625 + 2{,}033 = 0{,}4705$
$f(1000) = 0{,}000004 \cdot 1000^2 - 0{,}005 \cdot 1000 + 2{,}033 = 1{,}033$

Näistä pienin on $f(625)$. Polttoaineen kulutus on siis pienin, kun lentokoneen nopeus on 625 km/h.

Vastaus: 625 km/h

439. **a)** Funktio $f(x) = 15 - 0{,}02x$ ilmaisee myytyjen polkupyörien määrän, kun polkupyörän hinta on x euroa. Sijoittamalla hinnan x paikalle 100 saadaan taulukon ensimmäisen rivin lauseke myytyjen pyörien määrälle. Myyntitulo saadaan kertomalla pyörän hinta myytyjen pyörien määrällä. Täydennetään taulukko.

Hinta (€)	Myytyjen polkupyörien määrän lauseke	Myyntitulon lauseke
100	$15 - 0{,}02 \cdot 100$	$100 \cdot (15 - 0{,}02 \cdot 100)$
200	$15 - 0{,}02 \cdot 200$	$200 \cdot (15 - 0{,}02 \cdot 200)$
300	$15 - 0{,}02 \cdot 300$	$300 \cdot (15 - 0{,}02 \cdot 300)$
400	$15 - 0{,}02 \cdot 400$	$400 \cdot (15 - 0{,}02 \cdot 400)$
x	$15 - 0{,}02x$	$x(15 - 0{,}02x)$

Vastaus:

Hinta (€)	Myytyjen polkupyörien määrän lauseke	Myyntitulon lauseke
100	$15 - 0{,}02 \cdot 100$	$100 \cdot (15 - 0{,}02 \cdot 100)$
200	$15 - 0{,}02 \cdot 200$	$200 \cdot (15 - 0{,}02 \cdot 200)$
300	$15 - 0{,}02 \cdot 300$	$300 \cdot (15 - 0{,}02 \cdot 300)$
400	$15 - 0{,}02 \cdot 400$	$400 \cdot (15 - 0{,}02 \cdot 400)$
x	$15 - 0{,}02x$	$x(15 - 0{,}02x)$

b) Myyntitulo saadaan, kun myytyjen pyörien määrä kerrotaan polkupyörän hinnalla. Myyntitulofunktio on siis
$g(x) = (15 - 0{,}02x)x = 15x - 0{,}02x^2$.

Funktio g on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin $-0{,}02$ on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion g saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio g.
$g'(x) = 15 \cdot 1 - 0{,}02 \cdot 2x = 15 - 0{,}04x$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $g'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 15 - 0{,}04x &= 0 \\ -0{,}04x &= -15 \qquad \| :(-0{,}04) \\ x &= 375 \end{aligned}$$

Funktion g saa suurimman arvonsa, kun $x = 375$.
$g(375) = 15 \cdot 375 - 0{,}02 \cdot 375^2 = 2812{,}50$

Kun pyörän hinta on 375 € saadaan suurin myyntitulo 2812,50 €.

Vastaus: 375 euron hinnalla, 2812,50 euroa

440. **a)** Matkatoimiston voitto saadaan, kun asiakkaalta laskutetusta summasta $90x$ vähennetään kulut $10x + 12x^2$. Voittoa kuvaava funktio on siis $f(x) = 90x - (10x + 12x^2) = 90x - 10x - 12x^2 = -12x^2 + 80x$.

Vastaus: $f(x) = -12x^2 + 80x$

b) Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -12 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.
$f'(x) = -12 \cdot 2x + 80 \cdot 1 = -24x + 80$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$
\begin{aligned}
-24x + 80 &= 0 \\
-24x &= -80 \quad \| : (-24) \\
x &= 3{,}333.... \\
x &\approx 3
\end{aligned}
$$

Matkatoimisto saa eniten rahaa 3 vuorokauden matkasta.

Vastaus: 3 vrk

VAHVISTA OSAAMISTA

441. **a)** Voitto saadaan, kun myyntituloista $27x$ vähennetään kokonaiskustannukset $0{,}3x^2 + 2x + 250$. Voiton lauseke on siis
$27x - (0{,}3x^2 + 2x + 250)$
$= 27x - 0{,}3x^2 - 2x - 250$
$= -0{,}3x^2 + 25x - 250$.

Vastaus: $-0{,}3x^2 + 25x - 250$

b) Merkitään myyntivoiton lauseketta funktiona
$f(x) = -0{,}3x^2 + 25x - 250$.

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin $-0{,}3$ on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.
$f\,'(x) = -0{,}3 \cdot 2x + 25 \cdot 1 + 0 = -0{,}6x + 25$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f\,'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -0{,}6x + 25 &= 0 \\ -0{,}6x &= -25 \quad \| : (-0{,}6) \\ x &= 41{,}666... \end{aligned}$$

Funktion f saa suurimman arvonsa, kun $x = 41{,}666\ldots$.

$$\begin{aligned} f(41{,}666\ldots) &= -0{,}3 \cdot 41{,}666\ldots^2 + 25 \cdot 41{,}666\ldots - 250 \\ &= 270{,}833\ldots \\ &\approx 270{,}83 \end{aligned}$$

Lasien myynnillä voi enimmillään tienata päivässä 270,83 €.

Vastaus: 270,83 euroa

442. Lintupopulaation seuranta-aika oli 10 vuotta, joten etsitään funktion n pienin ja suurin arvo suljetulla välillä [0, 10].

Polynomifunktio saa suljetulla välillä pienimmän ja suurimman arvonsa välinpäätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio n.
$n'(t) = -2{,}1 \cdot 3t^2 + 37 \cdot 2t - 155 \cdot 1 + 0 = -6{,}3t^2 + 74t - 155$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $n'(t) = 0$ avulla.
$-6{,}3t^2 + 74t - 155 = 0$

Ratkaistaan yhtälö ohjelman ratkaisutoiminnon avulla. Saadaan kaksi ratkaisua $t = 2{,}728\ldots$ ja $t = 9{,}017\ldots$, jotka molemmat ovat välillä [0, 10].

Lasketaan funktion n arvo välin päätepisteissä $t = 0$ ja $t = 10$ sekä välillä olevissa derivaatan nollakohdissa $t = 2{,}728\ldots$ ja $t = 9{,}017\ldots$.

$n(0) = -2{,}1 \cdot 0^3 + 37 \cdot 0^2 - 155 \cdot 0 + 830 = 830$
$n(2{,}728\ldots) = -2{,}1 \cdot 2{,}728\ldots^3 + 37 \cdot 2{,}728\ldots^2 - 155 \cdot 2{,}728\ldots + 830$
$= 639{,}879\ldots \approx 640$
$n(9{,}017\ldots) = -2{,}1 \cdot 9{,}017\ldots^3 + 37 \cdot 9{,}017\ldots^2 - 155 \cdot 9{,}017\ldots + 830$
$= 901{,}106\ldots \approx 900$
$n(10) = -2{,}1 \cdot 10^3 + 37 \cdot 10^2 - 155 \cdot 10 + 830 = 880$

Lintupopulaatio oli pienimmillään noin 640 yksilöä ja suurimmillaan noin 900 yksilöä, joten yksilömäärä vaihteli seuranta-aikana välillä 640–900 yksilöä.

Vastaus: 640−900 yksilöä

443. **a)** Lääkeaineen pitoisuus välillä [0, 100] on suurimmilla välin päätepisteissä tai välillä olevasa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio f.
$f'(t) = -0{,}00000324\,t^2 - 0{,}0000042t + 0{,}00691$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(t) = 0$ avulla.
$-0{,}00000324t^2 - 0{,}0000042t + 0{,}006 = 0$

Ratkaistaan yhtälö ohjelman ratkaisutoiminnon avulla. Saadaan kaksi ratkaisua $t = -46{,}834\ldots$ ja $t = 45{,}537\ldots$

1	f(t):=-0.00000108t^3-0.0000021t^2+0.00691t+0.812 $\rightarrow\ f(t) := -\frac{27}{25000000}t^3 - \frac{21}{10000000}t^2 + \frac{691}{100000}t + \frac{203}{250}$
2	Derivaatta(f) $\rightarrow\ -\frac{81}{25000000}t^2 - \frac{21}{5000000}t + \frac{691}{100000}$
3	f'(t)=0 RatkaiseNumeerisesti: $\{t = -46.834035012, t = 45.5377387158\}$

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä $t = 0$ ja $t = 100$ sekä välillä olevassa derivaatan nollakohdassa $t = 45{,}537\ldots$

f(0) $\approx\ 0.812$
f(45.53773871575) $\approx\ 1.0203256031$
f(100) $\approx\ 0.402$

$f(0) \approx 0{,}812$
$f(45{,}537\ldots) \approx 1{,}020$
$f(100) \approx 0{,}402$

Lääkeaineen pitoisuus on suurimmillaan 46 minuutin kuluttua lääkkeen antamisesta.

Vastaus: 46 minuutin kuluttua

b) Lasketaan lääkeaineen pitoisuuden kasvunopeus ajanhetkellä $t = 20$ sijoittamalla derivaattaan $t = 20$.

$$\begin{aligned} f'(20) &= -0{,}00000324 \cdot 20^2 - 0{,}0000042 \cdot 20 + 0{,}006 \\ &= 0{,}00553 \approx 0{,}006 \end{aligned}$$

Lääkeaineen pitoisuus kasvaa kysytyllä ajanhetkellä 0,006 mg/cm^3 minuutissa.

Vastaus: 0,006 mg/cm^3 minuutissa

444. **a)** Myyntitulot saadaan kertomalla keskenään lipun hinta x ja myytyjen lippujen määrä $95\,000 - 24\,000x$. Myyntituloa kuvaava funktion on $f(x) = x(95\,000 - 24\,000x) = 95\,000x - 24\,000x^2$

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin $-24\,000$ on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.

$$f'(x) = 95\,000 \cdot 1 - 24\,000 \cdot 2x = 95\,000 - 48\,000x$$

Määritetään derivaatan nollakohta yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 95\,000 - 48\,000x &= 0 \\ -48\,000x &= -95\,000 \quad \| : (-48\,000) \\ x &= 1{,}979\ldots \\ x &\approx 2{,}00 \end{aligned}$$

Myyntitulot ovat suurimmat, kun lipun hinta on 2,00 euroa.

Vastaus: 2 euroa

b) Kun lippuja myydään 95 000 − 24 000x kappaletta, siitä tulee yhtiölle kustannuksia 0,90(95 000 − 24 000x) = 85 500 − 21 600x euroa. Kun lipputuloista vähennetään kustannukset, niin saadaan voittoa kuvaava funktio

$$\begin{aligned} g(x) &= 95\,000x - 24\,000x^2 - (85\,500 - 21\,600x) \\ &= -24\,000\,x^2 + 116\,600x - 85\,500 \end{aligned}$$

Funktio g on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin −24 000 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion g saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.

$$g'(x) = -24\,000 \cdot 2x + 116\,600 \cdot 1 + 0 = -48\,000x + 116\,600$$

Määritetään derivaatan nollakohta yhtälön $g'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -48\,000x + 116\,600 &= 0 \\ -48\,000x &= -116\,600 \quad \| : (-48\,000) \\ x &= 2{,}429... \\ x &\approx 2{,}40 \end{aligned}$$

Voitto on suurin, kun lipun hinta on 2,40 euroa.

Vastaus: 2,40 euroa

445. **a)** Kun kahden euron korotuksien lukumäärä on x, niin uusi hinta on $30 + 2x$. Kävijämäärä vähenee jokaisella korotuksella sadalla, joten uusi kävijämäärä on $3000 - 100x$.

Vastaus: hinta $30 + 2x$, kävijämäärä $3000 - 100x$

b) Lipunmyyntitulot saadaan, kun hinta kerrotaan kävijämäärällä. Lipunmyyntituloja kuvaava funktio on $f(x) = (30 + 2x)(3000 - 100x) = -200x^2 + 3000x + 90\,000$.

Vastaus: $f(x) = -200x^2 + 3000x + 90\,000$

c) Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -200 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = -400 \cdot 2x + 3000 \cdot 1 = -400x + 3000$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$
\begin{aligned}
-400x + 3000 &= 0 \\
-400x &= -3000 \quad \| :(-400) \\
x &= 7{,}5
\end{aligned}
$$

Funktion f saa suurimman arvonsa, kun $x = 7{,}5$.
$g(7{,}5) = -200 \cdot 7{,}5^2 + 3000 \cdot 7{,}5 + 90\,000 = 101\,250$

Lipunmyyntitulot ovat suurimmat, kun $x = 7{,}5$, jolloin lipun hinta on $30 + 2 \cdot 7{,}5 = 45$ euroa. Lipunmyyntitulot tällöin ovat 101 250 euroa.

Vastaus: 45 euron hinnalla, 101 250 euroa

446. **a)** Jokaiselta lainaajalta saadaan korkoa x euroa. Koska lainaajia on $150 - 12x$ kappaletta, tuottoa kuvaava funktio on
$f(x) = x(150 - 12x) = -12x^2 + 150x$.

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -12 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.
$f'(x) = -12 \cdot 2x + 150 \cdot 1 = -24x + 150$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -24x + 150 &= 0 \\ -24x &= -150 \quad \| : (-24) \\ x &= 6,25 \end{aligned}$$

Firman saama tuotto on suurin, kun korko on 6,25 euroa.

Vastaus: 6,25 euroa

b) Jokaiselta lainaajalta saadaan korkoa x euroa. Koska lainaajia on $150 - 12x$ kappaletta, firma saa $x(150 - 12x) = -12x^2 + 150x$ euroa.

Koska lainaajia on $150 - 12x$ kappaletta, jää lainoista maksamatta $0{,}05(150 - 12x) = 7{,}5 - 0{,}6x$ kappaletta. Jokainen maksamatta jäänyt laina tuottaa firmalle tappiota $100 + x$ euroa, joten tappiota firmalle kertyy $(7{,}5 - 0{,}6x)(100 + x) = -0{,}6x^2 - 52{,}5x + 750$ euroa.

Tuottoa kuvaava funktio on

$$\begin{aligned} g(x) &= -12x^2 + 150x - (-0{,}6x^2 - 52{,}5x + 750) \\ &= -11{,}4x^2 + 202{,}5x - 750 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio g.

$g'(x) = -22{,}8x + 202{,}5$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $g'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -22{,}8x + 202{,}5 &= 0 \\ -22{,}8x &= -202{,}5 \quad \| :(-22{,}8) \\ x &= 8{,}881\ldots \\ x &\approx 8{,}88 \end{aligned}$$

Firma saama tuotto on suurin, kun korko on 8,88 euroa.

Vastaus: 8,88 euroa

447. **a)** Huvipuisto saa jokaisesta asiakkaasta lipputuloja $x(350 - 12x)$ ja jokainen asiakas käyttää huvipuistossa rahaa $(350 - 12x)(5x + 10)$ euroa, joten huvipuiston tuloja kuvaava funktion on
$f(x) = x(350 - 12x) + (350 - 12x)(5x + 10) = -72x^2 + 1980x + 3500$.

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -72 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.
$f'(x) = -72 \cdot 2x + 1980 \cdot 1 + 0 = -144x + 1980$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -144x + 1980 &= 0 \\ -144x &= -1980 \quad \| : (-144) \\ x &= 13{,}75 \\ x &\approx 13{,}80 \end{aligned}$$

Huvipuisto saa suurimmat tulot, kun pääsylipun hinta on 13,80 euroa.

Vastaus: 13,80 euroa

b) Vähennetään huvipuiston tuloista asiakkaista aiheutuvat kulut $25(350 - 12x) = -300x + 8750$, jolloin saadaan voittoa kuvaava funktio

$$\begin{aligned} f(x) &= -72x^2 + 1980x + 3500 - (-300x + 8750) \\ &= -72x^2 + 2280x - 5250. \end{aligned}$$

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -72 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = -72 \cdot 2x + 2280 \cdot 1 + 0 = -144x + 2280$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -144x + 2280 &= 0 \\ -144x &= -2280 \quad \| : (-144) \\ x &= 15{,}833... \\ x &\approx 15{,}80 \end{aligned}$$

Huvipuiston voitto on suurin, kun pääsylipun hinta on 15,80 euroa.

Vastaus: 15,80 euroa

448. Merkitään litrahinnan korotusta kirjaimella x. Tällöin uusi litrahinta on $5 + x$ ja myynti päivässä on $12 - x$. Myyntitulot päivässä on $(5 + x)(12 - x) = -x^2 + 7x + 60$ euroa. Kuluja mehun valmistamisesta, kuljetuksesta ja säilyttämisestä tulee $(2 + 0{,}20)(12 - x) = -2{,}20x + 26{,}40$ euroa.

Voittoa kuvaava funktio on
$f(x) = -x^2 + 7x + 60 - (2{,}20x + 26{,}40) = -x^2 + 9{,}2x + 33{,}6$.

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.
$f'(x) = -1 \cdot 2x + 9{,}2 \cdot 1 + 0 = -2x + 9{,}2$

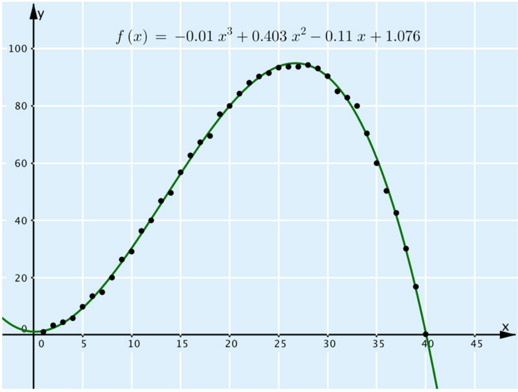
Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -2x + 9{,}2 &= 0 \\ -2x &= -9{,}2 \quad \| :(-2) \\ x &= 4{,}6 \end{aligned}$$

Voitto on suurin, kun $x = 4{,}6$, joten mehun litrahinnaksi kannattaa asettaa $5 + 4{,}60 = 9{,}60$ euroa.

Vastaus: 9,60 euroa/l

449. Kopioidaan taulukon tiedot ohjelmaan ja sovitetaan tietoihin 3. asteen polynomifunktio.



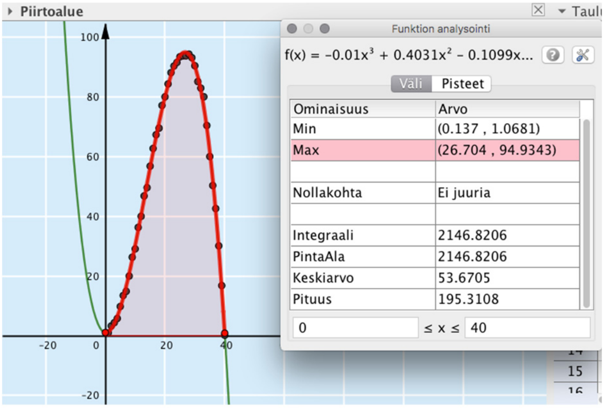
Ohjelma antaa 3. asteen polynomifunktioksi $f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}403x^2 - 0{,}110x + 1{,}076$. Kuvaajan perusteella malli on järkevä välillä [0, 40].

a) Määritetään ohjelman avulla sairastuneiden osuus kymmenen päivän jälkeen sijoittamalla $x = 10$ funktioon f.
$f(10) = 30{,}2740 \approx 30$

Kymmenen vuorokauden kuluttua varusmiehistä on sairaana noin 30 %.

Vastaus: 30 %

b) Tutkitaan funktiota *f* ohjelman analysointitoiminnon avulla.



		0.137	26.704	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	↘	↗	↘	
		min	max	

Funktion analysointityökalulla nähdään, että funktio kasvaa kohtien $x \approx 0{,}137$ ja $x \approx 26{,}704$ välillä, joten sairastuneiden määrä kasvaa noin 27 vuorokautta.

Vastaus: 27 vrk

c) b-kohdan perusteella funktio saa suurimman arvonsa, kun $x = 26{,}704$. Lasketaan ohjelman avulla funktion arvo tässä kohdassa.
$f(26{,}704) = 94{,}934\ldots \approx 95$

Sairastuneita on enimmillään 95 % varusmiehistä.

Vastaus: 95 %

450. Poimitaan mittausarvot taulukkoon.

Nopeus (mailia/h)	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
Kulutus (mailia/gallona)	24	28	30	32	31	30	31	32	32	31	29	27	25

Muutetaan taulukkolaskentaohjelmalla nopeudet kilometreiksi tunnissa ja gallonalla kuljetut mailit litroiksi 100 kilometrillä.

Yksikkömuunnos mailia tunnissa kilometreiksi tunnissa saadaan, kun mailia tunnissa kerrotaan luvulla 1,609.

Muutetaan mailia yhdellä gallonalla yksiköt yksikköön litraa sadalla kilometrillä. Merkitään polttoineen kulutusta kirjaimella p ja muunnetaan gallonat litroiksi ja mailit sadoiksi kilometreiksi

$$p \cdot \frac{\text{mailia}}{\text{gallona}} = p \cdot \frac{1,609 \text{ km}}{3,785 \text{ l}} = p \cdot \frac{1,609}{3,785} \cdot \frac{\text{km}}{\text{l}} = \frac{p \cdot 1,609}{100 \cdot 3,785} \cdot \frac{100 \text{ km}}{\text{l}}$$

Koska yksikkönä pitää olla l/100 km, muodostetaan käänteisluku

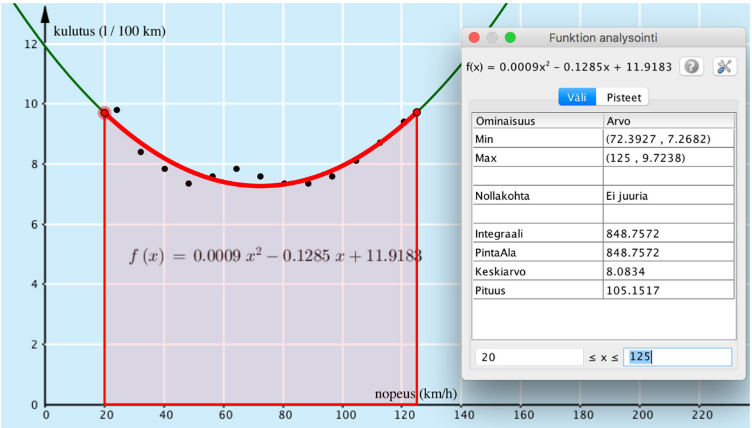
$$\frac{100 \cdot 3,785}{p \cdot 1,609} \cdot \frac{\text{l}}{100 \text{ km}}$$

Kirjoitetaan soluun C2 kaava: ”=A2 · 1.609” ja kopioidaan solua alaspäin. Kirjoitetaan soluun D2 kaava: ”=(100 · 3.785)/(1.609 · B2)” ja kopioidaan solua alaspäin.

	A	B	C	D
1	Nopeus (MPH)	Kulutus (MPG)	Nopeus (km/h)	Kulutus (l/100 km)
2	15	24	24.14	9.8
3	20	28	32.18	8.4
4	25	30	40.23	7.84
5	30	32	48.27	7.35
6	35	31	56.32	7.59
7	40	30	64.36	7.84
8	45	31	72.41	7.59
9	50	32	80.45	7.35
10	55	32	88.5	7.35
11	60	31	96.54	7.59
12	65	29	104.59	8.11
13	70	27	112.63	8.71
14	75	25	120.68	9.41

Luodaan sarakkeiden C ja D tiedoista pistelista ja sovitetaan siihen toisen asteen polynomi. Ohjelma antaa auton kulutukselle funktion $f(x) = 0{,}0009x^2 - 0{,}1285x + 11{,}9183$.

Tutkitaan ohjelman Funktion analysointi -työkalun avulla, missä kohdassa funktio saa pienimmän arvonsa.



Työkalun avulla havaitaan, että funktio saa pienimmän arvonsa, kun $x = 72{,}392\ldots \approx 70$.

Auton optiminopeus on noin 70 km/h.

Vastaus: n. 70 km/h

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

451. **a)** Kun alkunopeus on 10 m/s, niin kappaleen etäisyyttä maasta kuvaava funktio on $f(t) = -4{,}9t^2 + 10t$. Kappaleen nopeus tietyllä ajanhetkellä saadaan derivaatan avulla. Derivoidaan funktio f.
$f'(t) = -4{,}9 \cdot 2t + 10 \cdot 1 = -9{,}8t + 10$

Lasketaan derivaatan arvot kohdissa $t = 0{,}5$ ja $t = 1{,}5$.
$f'(0{,}5) = -9{,}8 \cdot 0{,}5 + 10 = 5{,}1$
$f'(1{,}5) = -9{,}8 \cdot 1{,}5 + 10 = -4{,}7$

Kappaleen nopeus 0,5 sekunnin kuluttua heitosta on 5,1 m/s ja 1,5 sekunnin kuluttua heitosta −4,7 m/s. Positiivinen nopeus tarkoittaa, että kappale liikkuu ylöspäin ja negatiivinen nopeus tarkoittaa, että kappale liikkuu alaspäin.

Vastaus: 0,5 sekunnin kuluttua 5,1 m/s, 1,5 sekunnin kuluttua −4,7 m/s

b) Kun alkunopeus on 7,9 m/s, niin kappaleen etäisyyttä maasta kuvaava funktio on $f(t) = f(t) = -4{,}9t^2 + 7{,}9t$.

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin −4,9 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.
$f'(t) = -4{,}9 \cdot 2t + 7{,}9 \cdot 1 + 0 = -9{,}8t + 7{,}9$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(t) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -9{,}8t + 7{,}9 &= 0 \\ -9{,}8t &= -7{,}9 \quad \| : (-9{,}8) \\ t &= 0{,}806... \end{aligned}$$

Funktion f saa suurimman arvonsa, kun $t = 0{,}806…$.
$f(0{,}806…) = -4{,}9 \cdot 0{,}806…^2 + 7{,}9 \cdot 8{,}06… = 3{,}184… \approx 3{,}2$

Kappale käy 3,2 metrin korkeudessa.

Vastaus: 3,2 m

c) Derivoidaan funktio $f(t) = -4{,}9t^2 + vt$
$f'(t) = -9{,}8t + v$

Derivoidaan funktio $f'(t) = -9{,}8t + v$.
$f''(t) = -9{,}8$

Huomataan, että derivaatan derivaatta eli kiihtyvyys on vakio, joten se ei riipu alkunopeudesta. Kiihtyvyys on vakio, koska kiihtyvyyden aiheuttaa maan vetovoima.

Vastaus: ei riipu

452. Tutkitaan ensin tilannetta, jossa paperilehden vuositilaushintaa nostetaan $x \geq 0$ euroa.
Koska 10 euron hinnan korotus vähentää 30 000 tilausta, yhden euron hinnan nousu vähentää 3000 tilausta ja x euron nousu vähentää $3000x$ tilausta.
Paperilehden tilaajamäärä on $310\,000 - 3000x$ ja verkkolehden $50\,000 + 1500x$.

Paperilehden tilaajilta saadaan rahaa $(310\,000 - 3000x)(380 + x)$ euroa verkkolehden tilaajilta $(50\,000 + 1500x) \cdot 120$ euroa.

Tulot yhteensä ovat
$(310\,000 - 3000x)(380 + x) + (50\,000 + 1500x) \cdot 120$
$= -3000x^2 - 650\,000x + 123\,800\,000$ euroa.

Paperilehden kustannukset ovat $(310\,000 - 3000x) \cdot 210$ euroa ja verkkolehden $(50\,000 + 1500x) \cdot 50$ euroa.

Kustannukset ovat yhteensä
$(310\,000 - 3000x) \cdot 210 + (50\,000 + 1500x) \cdot 50$
$= -555\,000x + 67\,600\,000$ euroa.

Myyntivoittoa kuvaava funktio on
$f(x) = -3000x^2 - 650\,000x + 123\,800\,000 - (-555\,000x + 67\,600\,000)$
$= -3000x^2 - 95\,000x + 56\,200\,000.$

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin −3000 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio f.
$f'(x) = -3000 \cdot 2x - 95\,000 \cdot 1 + 0 = -6000x - 95\,000$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -6000x - 95\,000 &= 0 \\ -6000x &= 95\,000 \quad \| : (-6000) \\ x &= -15{,}833... \end{aligned}$$

Koska funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on kohdassa $x = -15{,}833\ldots$, funktio f on vähenevä, kun $x \geq 0$. Vuositilaushintaa ei siis kannata nostaa.

Tutkitaan seuraavaksi tapaus, jossa vuositilaushintaa lasketaan $x \geq 0$ euroa.

Paperilehden tilaajamäärä on $310\,000 + 1000x$ ja verkkolehden 50 000.

Paperilehden tilaajilta saadaan rahaa $(310\,000 + 1000x)(380 - x)$ euroa verkkolehden tilaajilta $50\,000 \cdot 120 = 60\,000\,000$ euroa.

Tulot yhteensä ovat
$(310\,000 + 1000x)(380 - x) + 60\,000\,000$
$= -1000x^2 + 70\,000x + 177\,800\,000$ euroa.

Paperilehden kustannukset ovat $(310\,000 + 1000x) \cdot 210$ euroa ja verkkolehden $50\,000 \cdot 50 = 2\,500\,000$ euroa.

Kustannukset ovat yhteensä
$(310\,000 + 1000x) \cdot 210 + 2\,500\,000$
$= 210\,000x + 67\,600\,000$ euroa.

Myyntivoittoa kuvaava funktio on
$g(x) = -1000x^2 + 70\,000x + 177\,800\,000 - (210\,000x + 67\,600\,000)$
$\quad = -1000x^2 - 140\,000x + 110\,200\,000.$

Funktio g on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin −1000 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion g saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio g.
$g'(x) = -1000 \cdot 2x - 140\,000 \cdot 1 + 0 = -2000x - 140\,000$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $g'(x) = 0$ avulla.

$$
\begin{aligned}
-2000x - 140\,000 &= 0 \\
-2000x &= 140\,000 \quad \| : (-2000) \\
x &= -70
\end{aligned}
$$

Koska funktion g kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on kohdassa $x = -70$, funktio g on vähenevä, kun $x \geq 0$. Vuositilaushintaa ei siis kannata alentaa.

Koska vuositilaushintaa ei kannata korottaa eikä alentaa, on hinta nyt kohdallaan.

Vastaus: 380 euroa

453. Kun myydään x cm korkea pienoismalli, saadaan x euron tulot.

Pienoismallin tilavuus on suoraan verrannollinen sen korkeuden kuutioon, joten valmistuskustannuksetkin ovat suoraan verrannollinen pienoismallin korkeuden kuutioon.

Korkeus (cm)	Korkeuden kuutio (cm^3)	Valmistuskustannukset (€)
11	$11^3 = 1331$	2,50
x	x^3	y

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä valmistuskustannukset y.

$$\frac{1331}{x^3} = \frac{2,50}{y}$$
$$1331y = 2,50x^3 \quad \| :1331$$
$$y = \frac{2,50}{1331}x^3$$
$$y = 0,00187...x^3$$

Kun valmistetaan x cm korkea pienoismalli, valmistuskustannukset ovat $0,00187\ldots x^3$. Lisäksi myynnistä tulee kustannuksia 0,50 euroa riippumatta pienoismallin koosta.

Myyntivoittoa kuvaava funktio on $f(x) = x - 0,00187\ldots x^3 - 0,5$. Pienoismallin korkeus ei voi olla negatiivinen, joten $x \geq 0$.

Derivoidaan funktio f.
$f'(x) = 1 - 0,00187\ldots \cdot 3x^2 = -0,00563\ldots x^2 + 1$.

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$-0,00563...x^2 + 1 = 0$$
$$-0,00563...x^2 = -1 \quad \| :(-0,00563...)$$
$$x^2 = 177,466...$$
$$x = \pm\sqrt{177,466...}$$
$$x = \pm 13,321...$$
$$x \approx \pm 13,3$$

Piirretään kulkukaavio.

		-13.3		13.3	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

$f'(-20) \approx -1{,}3 < 0$
$f'(0) \approx 1 > 0$
$f'(20) \approx -1{,}3 < 0$

Koska $x \geq 0$, kulkukaaviosta nähdään, että suurin myyntivoitto saadaan, kun $x \approx 13{,}3$.

Yrityksen kannattaa tehdä 13,3 cm korkeita pienoismalleja.

Vastaus: 13,3 cm

454. Merkitään tuotteen alkuperäistä hintaa kirjaimella *h* ja myynnin määrää kirjaimella *m*. Myynnin arvo on tällöin *hm*.

Kun hintaa alennetaan *p* %, tuotteen uusi hinta on $\left(1-\frac{p}{100}\right)h$. Tuotetta myydään tällöin 1,6*p* % enemmän eli $\left(1+\frac{1,6p}{100}\right)m$ kappaletta.

Myynnin arvo on

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)h\cdot\left(1+\frac{1,6p}{100}\right)m=\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{1,6p}{100}\right)hm$$
$$=\left(-0,00016p^2+0,006p+1\right)hm$$

Myynti saa suurimman arvonsa, kun funktio
$f(p) = -0,00016p^2 + 0,006p + 1$ saa suurimman arvonsa.

Funktio *f* on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin −0,00016 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion *f* saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun *x*-koordinaatti. Huipun *x*-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio *f*.
$f'(p) = -0,00016 \cdot 2x + 0,006 \cdot 1 + 0 = -0,00032x + 0,006$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(p) = 0$ avulla.

$$-0,00032p+0,006=0$$
$$-0,00032p=-0,006 \quad \| :(-0,00032)$$
$$p=18,75$$

Myynti saa suurimman arvonsa, kun $p = 18,75$ eli hintaa pitää alentaa 18,75 %.

Myynnin arvo on sama kuin alussa, kun

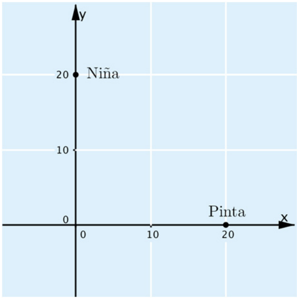
$$\left(-0,00016p^2+0,006p+1\right)hm=hm \quad \| :hm$$
$$-0,00016p^2+0,006p+1=1$$
$$-0,00016p^2+0,006p=0$$

Ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $p = 0$ tai $p = 37,5$.

Jos hintaa alennetaan, sitä on alennettava 37,5 %, jotta myynnin arvo olisi sama kuin alkuperäisellä hinnalla.

Vastaus: $p = 18,75$, $p = 37,5$

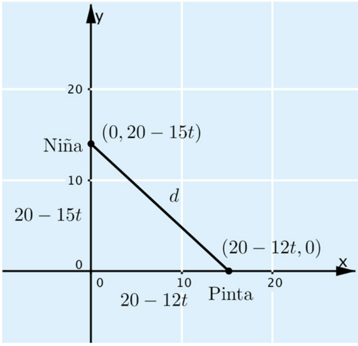
455. **a)** Piirretään laivojen sijainnit koordinaatistoon niin, että Pinta on x-akselilla 20 kilometrin päässä origosta. Pintan on siis koordinaatiston pisteessä (20, 0). Vastaavasti Niña on y-akselilla pisteessä (0, 20).



b) Kun aikaa on kulunut t tuntia, Pinta on kulkenut koordinaatistossa x-akselia pitkin vasemmalle $12t$ kilometriä, joten se on pisteessä $(20 - 12t, 0)$. Niña on t tunnin y-akselilla alaspäin $15t$ kilometriä, joten se on pisteessä $(0, 20 - 15t)$.

Vastaus: $(20 - 12t, 0)$ ja $(0, 20 - 15t)$

c) Piirretään mallikuva b-kohdan tilanteesta ja merkitään siihen pisteiden etäisyyttä kirjaimella d.



Koordinaattiakselit ja laivoja kuvaavat pisteet muodostavat suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusa on pisteiden etäisyys d ja kateetit ovat pisteiden etäisyydet origosta $20 - 12t$ ja $20 - 15t$.

Ratkaistaan pisteiden etäisyys d Pythagoraan lauseen avulla.

$$d^2 = (20 - 12t)^2 + (20 - 15t)^2$$
$$d^2 = 369t^2 - 1080t + 800$$
$$d = (+)\sqrt{369t^2 - 1080t + 800}$$

Pisteiden etäisyyden lauseke on $\sqrt{369t^2 - 1080t + 800}$.

Juurrettavan lauseke on funktio $f(t) = 369t^2 - 1080t + 800$.

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin 369 on positiivinen, joten funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktion f saa pienimmän arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktion f.
$f'(t) = 369 \cdot 2t - 1080 \cdot 1 + 0 = 738t - 1080$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f\,'(t) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 738t - 1080 &= 0 \\ 738t &= 1080 \quad \| :738 \\ t &= 1{,}463... \end{aligned}$$

Juurrettavan lauseke on pienin, kun $t = 1{,}463...$ Juurrettavan pienin arvo on $f(1{,}463\ldots) = 9{,}756\ldots \approx 9{,}8$.

Vastaus: $\sqrt{369t^2 - 1080t + 800}$; 9,8

d) Luvun neliöjuuri on pienin, kun juurrettava on pienin. C-kohdan nojalla laivojen etäisyys on pienin, kun alkutilanteesta on kulunut 1,463… ≈ 1,5 tuntia.

C-kohdassa saatiin pisteiden etäisyyden lausekkeeksi $\sqrt{369t^2 - 1080t + 800}$, joka vastaa laivojen etäisyyttä.

Lasketaan laivojen etäisyys sijoittamalla lausekkeeseen $t = 1{,}463…$.

$$\sqrt{369 \cdot 1{,}463...^2 - 1080 \cdot 1{,}463... + 800} = \sqrt{9{,}756...} \approx 3{,}1$$

Laivojen etäisyys pienimmillään on noin 3,1 km.

Vastaus: 1,5 h; 3,1 km

4.3 Geometrian sovelluksia

ALOITA PERUSTEISTA

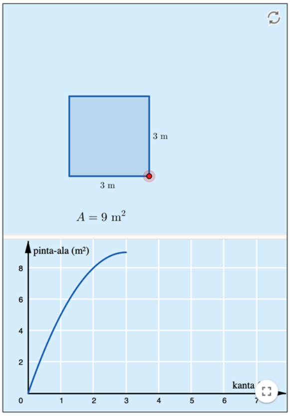
456. **a)** Kannan x pienin mahdollinen arvo on 0 m.

Vastaus: $x = 0$ m

b) Kannan x suurin mahdollinen arvo saadaan, kun korkeus on 0 m, jolloin kanta on $\frac{10\text{ m}}{2} = 5$ m.

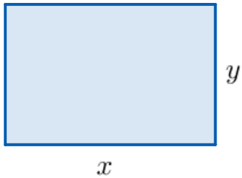
Vastaus: $x = 5$ m

457. **a)** Appletin avulla huomataan, että suorakulmion pinta-ala on mahdollisimman suuri, kun kaikki sivut ovat 3 m pitkiä.



Vastaus: kaikki sivut 3 m

b) Piirretään mallikuva.



Suorakulmion pinta-ala on $A = xy$.

Koska suorakulmion piiri on 12,0 m, niin saadaan yhtälö
$2x + 2y = 12{,}0$. Ratkaistaan yhtälöstä y.

$$\begin{aligned} 2x+2y &= 12{,}0 \\ 2y &= 12{,}0-2x \quad \| :2 \\ y &= 6{,}0-x \end{aligned}$$

Pinta-alaa kuvaava funktio on $A(x) = x(6{,}0 - x) = -x^2 + 6{,}0x$.

Funktio A on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion A saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio A.
$A'(x) = -1 \cdot 2x + 6{,}0 \cdot 1 = -2x + 6{,}0$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -2x+6{,}0 &= 0 \\ -2x &= -6{,}0 \quad \| :(-2) \\ x &= 3{,}0 \end{aligned}$$

Pinta-ala on suurin, kun $x = 3{,}0$. Tällöin $y = 6{,}0 - 3{,}0 = 3{,}0$.

Alueen pinta-ala on suurin, kun alue on neliön muotoinen eli kaikkien sivujen pituus on 3,0 metriä.

Vastaus: kaikki sivut 3,0 m

458. **a)** Koska piirin pituus on 20 m, saadaan sivujen pituuksien x ja y avulla yhtälö $2x + 2y = 20$.

Vastaus: $2x + 2y = 20$

b) Ratkaistaan a-kohdan yhtälöstä y.

$$\begin{aligned} 2x+2y &= 20 \\ 2y &= 20-2x \quad \| :2 \\ y &= 10-x \end{aligned}$$

Vastaus: $y = 10 - x$

c) Suorakulmion pinta-ala kannan x ja korkeuden y tulona eli $A = xy$.

Vastaus: xy

d) Sijoittamalla c-kohdan lausekkeeseen $y = 10 - x$ saadaan pinta-alalle lauseke $A = xy = x(10-x) = 10x - x^2$.

Vastaus: $10x - x^2$

459. **a)** Sivun x pienin mahdollinen arvo on 0. Korkeuden $6 - 2x$ pienin arvo 0. Lasketaan sivun x pituus, kun korkeus on 0.

$$\begin{aligned} 6-2x &= 0 \\ -2x &= -6 \quad \| :(-2) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Sivun x suurin arvo on 3. Näin ollen sivun x pituus voi olla välillä $0 \leq x \leq 3$.

Vastaus: $0 \leq x \leq 3$

b) Kolmion pinta-ala on $A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6-2x) = 3x - x^2$.

Vastaus: $A(x) = 3x - x^2$

c) Funktio $A(x)$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion $A(x)$ saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio $A(x)$.
$A'(x) = 3 - 2x$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 3-2x &= 0 \\ -2x &= -3 \quad \| :(-2) \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Pinta-ala on suurin, kun $x = \frac{3}{2}$, jolloin pinta-ala on

$$A\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Vastaus: $\frac{9}{4}$

460. **a)** Viljelylaatikon pinta-ala on kanta kertaa korkeus eli $A = x \cdot y$.

Vastaus: $A = x \cdot y$

b) Viljelylaatikon piiri muodostaa yhtälön $2x + 2y = 7{,}0$. Ratkaistaan yhtälöstä sivu y.

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 7{,}0 \\ 2y &= 7{,}0 - 2x \quad \| :2 \\ y &= 3{,}5 - x \end{aligned}$$

Vastaus: $y = 3{,}5 - x$

c) Sijoitetaan pinta-alan lausekkeeseen $y = 3{,}5 - x$, jolloin pinta-alafunktio on $A(x) = x(3{,}5 - x) = 3{,}5x - x^2$.

Vastaus: $A(x) = 3{,}5x - x^2$

d) Funktio A on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion A saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio A.
$A'(x) = 3{,}5 - 2x$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 3{,}5 - 2x &= 0 \\ -2x &= -3{,}5 \quad \| :(-2) \\ x &= 1{,}75 \end{aligned}$$

Pinta-ala on suurin, kun $x = 1{,}75$.

Vastaus: $x = 1{,}75$

461. A Aitauksen piiri muodostaa yhtälön $2x + 2y = 60$. Ratkaistaan yhtälöstä sivu y.

$$\begin{aligned} 2x+2y&=60 \\ 2y&=60-2x \quad \| :2 \\ y&=30-x \end{aligned}$$

Aitauksen pinta-alan lauseke on xy. Sijoitetaan pinta-alan lausekkeeseen $y = 30 - x$, jolloin pinta-alaksi saadaan $x(30 - x)$.

Tätä vastaa vaihtoehto II.

B Aitauksen piiri muodostaa yhtälön $3x + 2y = 60$. Ratkaistaan yhtälöstä sivu y.

$$\begin{aligned} 3x+2y&=60 \\ 2y&=60-3x \quad \| :2 \\ y&=30-\frac{3}{2}x \end{aligned}$$

Aitauksen pinta-alan lauseke on xy. Sijoitetaan pinta-alan lausekkeeseen $y=30-\frac{3}{2}x$, jolloin pinta-alaksi saadaan $x\left(30-\frac{3}{2}x\right)$.

Tätä vastaa vaihtoehto IV.

C Aitauksen piiri muodostaa yhtälön $2x + y = 60$. Ratkaistaan yhtälöstä sivu y.

$$\begin{aligned} 2x+y&=60 \\ y&=60-2x \end{aligned}$$

Aitauksen pinta-alan lauseke on xy. Sijoitetaan pinta-alan lausekkeeseen $y = 60 - 2x$, jolloin pinta-alaksi saadaan $x(60 - 2x)$.

Tätä vastaa vaihtoehto I.

D Aitauksen piiri muodostaa yhtälön $3x + y = 60$. Ratkaistaan yhtälöstä sivu y.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 60 \\ y &= 60 - 3x \end{aligned}$$

Aitauksen pinta-alan lauseke on xy. Sijoitetaan pinta-alan lausekkeeseen $y = 60 - 3x$, jolloin pinta-alaksi saadaan $x(60 - 3x)$.

Tätä vastaa vaihtoehto III.

Vastaus: A: II, B: IV, C: I ja D: III

462. **a)** Pellin leveyden avulla saadaan yhtälö on $x + 2y = 18$.

Vastaus: $x + 2y = 18$

b) Sivun x suurin mahdollinen arvo saadaan, kun koko pellin leveys käytetään siihen, jolloin sivun x pituus on 18.

Sivun x pienin mahdollinen arvo saadaan, kun koko pellin leveys käytetään sivuihin y, jolloin sivun x pituus on 0.

Vastaus: suurin 18, pienin 0

c) Ratkaistaan pellin leveyden avulla muodostetusta yhtälöstä sivu y.

$$\begin{aligned} x+2y&=18 \\ 2y&=18-x \quad \| :2 \\ y&=9-\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Kourun halkileikkauspinta-ala on kanta kertaa korkeus eli $A = xy$.
Sijoitetaan pinta-alan lausekkeeseen $y=9-\frac{1}{2}x$, jolloin pinta-alafunktio on $A(x)=x\left(9-\frac{1}{2}x\right)=9x-\frac{1}{2}x^2$.
Funktio $A(x)$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin $-\frac{1}{2}$ on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion $A(x)$ saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio $A(x)$.
$A'(x) = 9 - x$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 9-x&=0 \\ -x&=-9 \quad \| :(-1) \\ x&=9 \end{aligned}$$

Pinta-ala on suurin, kun $x = 9$, jolloin pinta-ala on

$$A(9)=9\cdot\left(9-\frac{1}{2}\cdot 9\right)=40\frac{1}{2}.$$

Vastaus: $40\frac{1}{2}$

VAHVISTA OSAAMISTA

463. **a)** Aitauksessa on kolme x:n pituista sivua ja yksi y:n pituinen sivu. Aitaa on yhteensä 360 metriä, joten saadaan yhtälö
$3x + y = 360$.

Vastaus: $3x + y = 360$

b) Aitauksen pinta-ala on $A = xy$. Ratkaistaan a-kohdan yhtälöstä y.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 360 \\ y &= 360 - 3x \end{aligned}$$

Pinta-alafunktioksi saadaan $A(x) = x(360 - 3x) = 360x - 3x^2$.

Vastaus: $A(x) = 360x - 3x^2$

c) Funktio A on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin −3 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion A saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio A.
$A'(x) = 360 \cdot 1 - 3 \cdot 2x = 360 - 6x$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

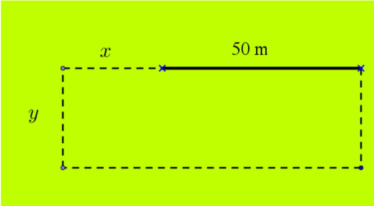
$$\begin{aligned} 360 - 6x &= 0 \\ -6x &= -360 \quad \| :(-6) \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Pinta-ala on suurin, kun $x = 60$. Lasketaan funktion A arvo, kun $x = 60$.
$A(60) = 360 \cdot 60 - 3 \cdot 60^2 = 10\,800$

Aitauksen suurin pinta-ala on 10 800 m^2.

Vastaus: 10 800 m^2

464. Merkitään suorakulmion toista sivua kirjaimella y.



a) Aitauksen piiri muodostaa yhtälön $2(x + 50) + 2y = 50 + 100$. Ratkaistaan yhtälöstä sivu y.

$$
\begin{aligned}
2(x+50)+2y &= 50+100 \\
2x+100+2y &= 150 \\
2y &= -2x+50 \quad \| :2 \\
y &= -x+25
\end{aligned}
$$

Aitauksen pinta-ala on kanta kertaa korkeus eli $A = (x + 50)y$. Sijoitetaan pinta-alan lausekkeeseen $y = -x + 25$, jolloin pinta-alafunktio on $A(x) = (x+50)(-x+25) = -x^2 - 25x + 1250$.

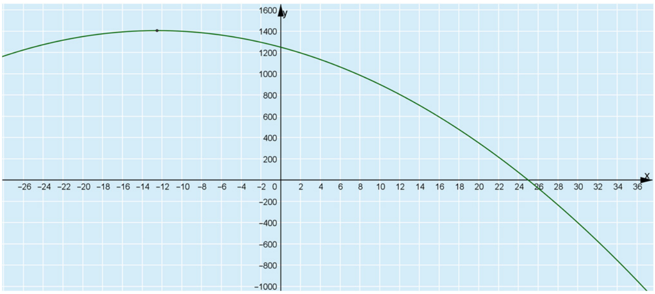
Funktio $A(x)$ on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion $A(x)$ saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio $A(x)$.
$A'(x) = -2x - 25$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

$$
\begin{aligned}
-2x-25 &= 0 \\
-2x &= 25 \quad \| :(-2) \\
x &= -12,5
\end{aligned}
$$

Negatiivinen x:n arvo tarkoittaa, että vanhaa aitaa purettaisiin 12,5 metriä, mutta sitä ei saanut tehdä. Koska pinta-alafunktio on vähenevä ääriarvokohdan −12,5 jälkeen, suurin pinta-ala saadaan silloin, kun $x = 0$.
Piirretään funktion $A(x)$ kuvaaja havainnollistamaan tilannetta.



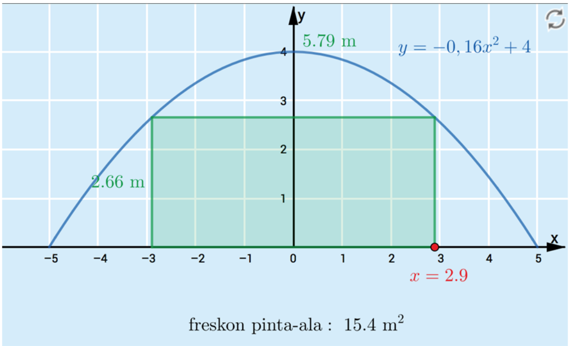
Pinta-ala on suurin, kun $x = 0$, jolloin toisen sivun pituus on $y = -x + 25 = -0 + 25 = 25$.

Vastaus: sivut 50 m ja 25 m

b) Koska vanhaa aitaa saa purkaa, aitauksen suurin pinta-ala saavutetaan a-kohdan perusteella siten, että vanhaa aitaa puretaan 12,5 m,. Tällöin vanhan aidan suuntaisen sivun pituus on 50 m − 12,5 m = 37,5 m, jolloin sivun y pituus on a-kohdan perusteella
$y = -(-12{,}5) + 25 = 37{,}5$ (m).

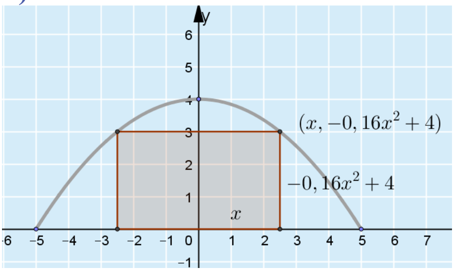
Vastaus: molemmat sivut 37,5 m

465. **a)** Appletin avulla havaitaan, että suurimman suorakulmion pinta-ala on 15,4 m^2 ja freskon mitat ovat silloin noin 5,8 m x 2,66 m.



Vastaus: 5,8 m x 2,66 m; 15,4 m^2

b) Piirretään mallikuva tilanteesta.



Kuvasta nähdään, että suorakulmion kannan puolikkaan ollessa x korkeus on $-0{,}16x^2 + 4$ ja kannan puolikas x saa arvoja välillä [0, 5].

Suorakulmion pinta-alaa kuvaava funktio on
$A(x) = 2x(-0{,}16x^2 + 4) = -0{,}32x^3 + 8x$.

Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman ja arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan funktio A.
$A'(x) = -0{,}32 \cdot 3x^2 + 8 \cdot 1 = -0{,}96x^2 + 8$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -0{,}96x^2 + 8 &= 0 \\ -0{,}96x^2 &= -8 \quad \| :(-0{,}96) \\ x^2 &= 8{,}333... \\ x &= \pm\sqrt{8{,}333...} \\ x &= \pm 2{,}886... \end{aligned}$$

Välillä [0, 5] oleva derivaatan nollakohta on $x = 2{,}886...$. Lasketaan funktion A arvo välin päätepisteissä $x = 0$ ja $x = 5$ sekä derivaatan nollakohdassa $x = 2{,}886...$.

$A(0) = -0{,}32 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0 = 0$
$A(2{,}88...) = -0{,}32 \cdot 2{,}886...^3 + 8 \cdot 2{,}886... = 15{,}396... \approx 15{,}4$
$A(5) = -0{,}32 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5 = 0$

Suurin näistä arvoista on $A(2{,}886...)$, joten freskon leveys $2x$ on $2 \cdot 2{,}886...\text{m} = 5{,}773...\text{m} \approx 5{,}77$ metriä. Tällöin freskon korkeus on $-0{,}16 \cdot 2{,}886...^2 + 4 = 2{,}666... \approx 2{,}66$ metriä, pyöristetään alaspäin, koska muuten fresko ei mahdu seinälle.

Vastaus: 5,77 m x 2,66 m; 15,4 m^2

466. **a)** Muodostetaan pisteiden (0, 20) ja (30, 40) kautta kulkevan suoran yhtälö.
Lasketaan suoran kulmakerroin koordinaattien avulla.

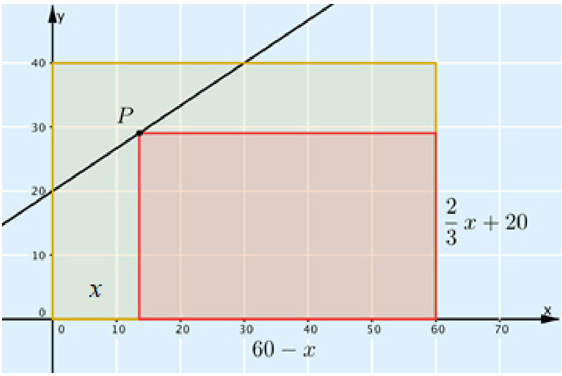
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{40-20}{30-0} = \frac{20}{30}^{(10} = \frac{2}{3}$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Sijoitetaan pisteen (0, 20) koordinaatit sekä kulmakerroin yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$20 = \frac{2}{3} \cdot 0 + b$$
$$b = 20$$

Suoran yhtälö on $y = \frac{2}{3}x + 20$.

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Pisteen $P(x, y)$ y-koordinaatti on $\frac{2}{3}x + 20$, joten punaisen suorakulmion korkeus on $\frac{2}{3}x + 20$ ja kanta $60 - x$. Punaisen suorakulmion pinta-alaa kuvaava funktio on

$$A(x) = (60 - x)\left(\frac{2}{3}x + 20\right) = -\frac{2}{3}x^2 + 20x + 1200.$$

Derivoidaan funktio A.

$$A'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 2x + 20 \cdot 1 + 0 = -\frac{4}{3}x + 20$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

$$-\frac{4}{3}x + 20 = 0$$

$$-\frac{4}{3}x = -20 \quad \| : \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$x = 15$$

Koska x-koordinaatin pienin arvo on 0 ja suurin 30, pinta-alafunktio $A(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 20x + 1200$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin [0, 30] päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa $x = 15$. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$A(0) = -\frac{2}{3}\cdot 0^2 + 20\cdot 0 + 1200 = 1200$$

$$A(15) = -\frac{2}{3}\cdot 15^2 + 20\cdot 15 + 1200 = 1350$$

$$A(30) = -\frac{2}{3}\cdot 30^2 + 20\cdot 30 + 1200 = 1200$$

Pinta-ala on suurin, kun $x = 15$. Tällöin $y = \frac{2}{3}\cdot 15 + 20 = 30$.

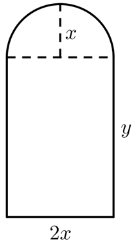
Punaisen suorakulmion pinta-ala on suurin, kun pisteen P koordinaatit ovat (15, 30)

Vastaus: (15, 30)

b) Kohdan a-perusteella nähdään, että pinta-ala on pienin, kun $x = 0$ tai $x = 30$ eli, kun piste P on (0,20) tai (30, 40).

Vastaus: (0,20) tai (30, 40)

467. Piirretään mallikuva tilanteesta ja merkitään tarvittavia mittoja kuvan mukaisesti.



Ikkunan ympärysmitta koostuu puoliympyrän kaaresta ja suorakulmion kolmesta sivusta. Puoliympyrän kaaren pituus on πx ja sivujen pituudet ovat $2x$ ja y, joten ikkunan ympärysmitta on $\pi x + 2x + 2y$. Muodostetaan ympärysmitan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä sivu y.

$$\begin{aligned} \pi x + 2x + 2y &= 12,0 \\ 2y &= 12,0 - \pi x - 2x \quad \| : 2 \\ y &= 6,0 - \frac{\pi x}{2} - x \\ y &= 6,0 - 2,570...x \end{aligned}$$

Ikkunan pinta-ala koostuu puoliympyrästä ja suorakulmiosta. Ikkunan pinta-ala on $A = \frac{\pi x^2}{2} + 2xy$. Pinta-alafunktio on

$$A(x) = \frac{\pi x^2}{2} + 2x(6,0 - 2,570...x) = -3,570...x^2 + 12,0x$$

Funktio A on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin −3,570… on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion A saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio A.

$$A'(x) = -3,570\ldots \cdot 2x + 12,0 \cdot 1 = -7,141\ldots x + 12,0$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

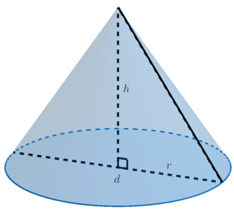
$$\begin{aligned} -7{,}141...x + 12{,}0 &= 0 \\ -7{,}141...x &= -12{,}0 \quad \| : (-7{,}141...) \\ x &= 1{,}680.... \end{aligned}$$

Pinta-ala on suurin, kun $x = 1{,}680...$. Lasketaan funktion A arvo, kun $x = 1{,}680...$.

$A(1{,}680\ldots) = -3{,}570\ldots \cdot 1{,}680\ldots^2 + 12{,}0 \cdot 1{,}680\ldots = 10{,}081\ldots \approx 10{,}1$
Ikkunan suurin pinta-ala on noin 10,1 m^2.

Vastaus: 10,1 m^2

468. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Suoran ympyräkartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, jossa r on kartion pohjaympyrän säde ja h kartion korkeus. Koska kartion korkeuden ja pohjaympyrän halkaisijan summa on 20, saadaan yhtälö $h + d = 20$. Koska halkaisija on kaksi kertaa säde, saadaan yhtälö muotoon $h + 2r = 20$.

Ratkaistaan yhtälöstä korkeus h.

$$\begin{aligned} h + 2r &= 20 \\ h &= 20 - 2r \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu lauseke tilavuuden kaavaan, jolloin saadaan tilavuutta kuvaava funktio

$$V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2(20-2r)=-\frac{2}{3}\pi r^3+\frac{20}{3}\pi r^2 .$$

Päätellään seuraavaksi mikä on pienin ja suurin arvo, jonka pohjan säde r voi saada.
Säde ei voi olla negatiivinen, joten $r \geq 0$.
Säteen suurin mahdollinen arvo on 10, joka tarkoittaisi, että pohjan halkaisija on 20 ja kartion korkeus on 0.

Määritetään funktion V suurin arvo, kun säde r on välillä [0, 10].

Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman ja arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan funktio V.

$$V'(r)=-\frac{2}{3}\pi\cdot 3r^2+\frac{20}{3}\pi\cdot 2r=-2\pi r^2+\frac{40}{3}\pi r$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $V'(r) = 0$ avulla.
Ohjelmalla saadaan, että derivaatan nollakohdat ovat $r = 0$ ja $r = 6{,}666…$.

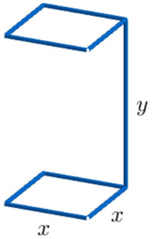
Derivaatan nollakohta $r = 6{,}666…$ kuuluu tarkasteltavalle välille [0, 10], joten lasketaan funktion V arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$V(0)=-\frac{2}{3}\pi\cdot 0^3+\frac{20}{3}\pi\cdot 0^2=0$$
$$V(6{,}666...)=-\frac{2}{3}\pi\cdot 6{,}666...^3+\frac{20}{3}\pi\cdot 6{,}666...^2=310{,}280...$$
$$V(10)=-\frac{2}{3}\pi\cdot 10^3+\frac{20}{3}\pi\cdot 10^2=0$$

Kartion tilavuus on suurin, kun säde on $r = 6{,}666… \approx 6{,}7$.

Vastaus: 6,7

469. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Kehikon tilavuus on $V = x^2y$.

Kehikossa on kahdeksan x:n pituista osaa ja yksi y:n pituinen osa. Kun rautalangan molemmista päistä otetaan 1 cm mittainen pätkä pois, kehikkoon on käytettävissä 48 cm rautalankaa. Muodostetaan rautalangan pituudesta yhtälö ja ratkaistaan siitä y.

$$\begin{aligned} 8x + y &= 48 \\ y &= 48 - 8x \end{aligned}$$

Tilavuutta kuvaava funktio on $V(x) = x^2(48 - 8x) = -8x^3 + 48x^2$.

Päätellään seuraavaksi mikä on pienin ja suurin arvo, jonka sivu x voi saada.
Sivu ei voi olla negatiivinen, joten $x \geq 0$.
Sivun suurin mahdollinen arvo on $\frac{48}{8} = 6$, joka tarkoittaisi, että kehikon korkeus on 0.

Määritetään funktion V suurin arvo, kun x on välillä [0, 6].

Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman ja arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan funktio V.
$V'(x) = -8 \cdot 3x^2 + 48 \cdot 2x = -24x^2 + 96x$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $V'(x) = 0$ avulla.
Ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan, että derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 4$.

Derivaatan nollakohta $x = 4$ kuuluu tarkasteltavalle välille [0, 6], joten lasketaan funktion V arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

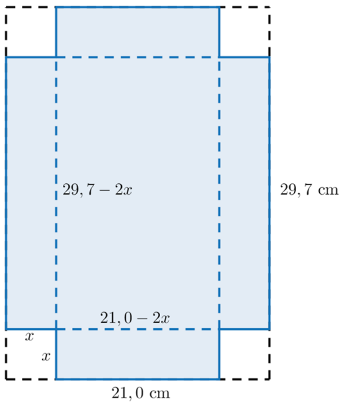
$V(0) = -8 \cdot 0^3 + 48 \cdot 0^2 = 0$
$V(4) = -8 \cdot 4^3 + 48 \cdot 4^2 = 256$
$V(6) = -8 \cdot 6^3 + 48 \cdot 6^2 = 0$

Kehikon tilavuus on suurin mahdollinen, kun $x = 4$. Tällöin
$y = 48 - 8 \cdot 4 = 16$.

Pohjaneliön sivun tulee olla 4 cm ja kehikon korkeus 16 cm.

Vastaus: sivu 4 cm ja korkeus 16 cm

470. A4-paperin koko on 21,0 cm x 29,7 cm. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Suorakulmaisen särmiön tilavuus on kanta · korkeus · leveys.

Kun poisleikattavan neliön sivua merkitään kirjaimella x, niin särmiön korkeus on x, kanta $21{,}0 - 2x$ ja leveys $29{,}7 - 2x$.

Särmiön tilavuutta kuvaava funktio on
$V(x) = x(21{,}0 - 2x)(29{,}7 - 2x) = 4x^3 - 101{,}4x^2 + 623{,}7x$.

Päätellään seuraavaksi mikä on pienin ja suurin arvo, jonka x voi saada. Sivu ei voi olla negatiivinen, joten $x \geq 0$.

Sivun x suurin mahdollinen arvo saadaan, kun $21{,}0 - 2x = 0$, joka tarkoittaisi, että leikattava neliö poistaisi koko A4-paperin lyhemmän sivun. Yhtälön $21{,}0 - 2x = 0$ ratkaisu on $x = 10{,}5$, joten $x \leq 10{,}5$.

Määritetään funktion V suurin arvo, kun x on välillä [0; 10,5].

Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman ja arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan ohjelmalla funktio V.

$V'(x) = 12x^2 - 202{,}8x\,^{-}\,623{,}7$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $V'(x) = 0$ avulla.
Ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan, että derivaatan nollakohdat ovat $x = 4{,}042\ldots$ ja $x = 12{,}857\ldots$.

Derivaatan nollakohta $x = 4{,}042\ldots$ kuuluu tarkasteltavalle välille [0; 10,5], joten lasketaan funktion V arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$V(0) = 4 \cdot 0^3 - 101{,}4 \cdot 0^2 + 623{,}7 \cdot 0 = 0$

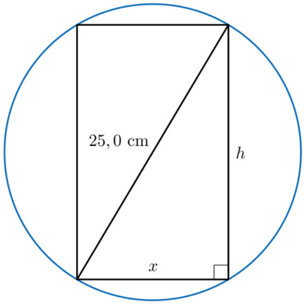
$$\begin{aligned} V(4{,}042\ldots) &= 4 \cdot 4{,}042\ldots^3 - 101{,}4 \cdot 4{,}042\ldots^2 + 623{,}7 \cdot 4{,}042\ldots \\ &= 1128{,}495\ldots \end{aligned}$$

$V(10{,}5) = 4 \cdot 10{,}5^3 - 101{,}4 \cdot 10{,}5^2 + 623{,}7 \cdot 10{,}5 = 0$

Suurin tilavuus on $1128{,}495\ldots\ \text{cm}^3 \approx 1128\ \text{cm}^3$.

Vastaus: $1128\ \text{cm}^3$

471. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Hirren lujuus saadaan kaavalla xh^2.

Puunrungon halkaisija ja hirren sivut muodostavat suorakulmaisen kolmion, joten Pythagoraan lauseen nojalla $x^2 + h^2 = 25{,}0^2$. Kun Pythagoraan lauseesta ratkaistaan h^2, niin saadaan $h^2 = 625{,}0 - x^2$.

Sijoitetaan lauseke kaavaan xh^2.Tällöin saadaan hirren lujuutta kuvaava funktio
$f(x) = x(625{,}0 - x^2) = -x^3 + 625{,}0x$.

Päätellään seuraavaksi mikä on pienin ja suurin arvo, jonka sivu x voi saada.
Sivu ei voi olla negatiivinen, joten $x \geq 0$.
Sivun suurin mahdollinen arvo on 25, joka tarkoittaisi, että sivu x puun halkaisija ja hirren korkeus on 0.

Määritetään funktion f suurin arvo, kun x on välillä [0, 25].

Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman ja arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = -3x^2 + 625{,}0$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.
Ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan, että derivaatan nollakohdat ovat $x = -14{,}433\ldots$ ja $x = 14{,}433\ldots$.

Derivaatan nollakohta $x = 14{,}433\ldots$ kuuluu tarkasteltavalle välille [0, 25], joten lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$f(0) = -0^3 + 625 \cdot 0 = 0$
$f(14{,}433\ldots) = -14{,}433\ldots^3 + 625 \cdot 14{,}433\ldots = 6014{,}065\ldots$
$f(25) = -25^3 + 625 \cdot 25 = 0$

Hirren lujuus on suurin, kun sivu on $x = 14{,}433\ldots \approx 14{,}4$.

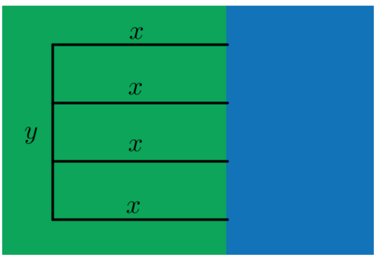
Hirren korkeus saadaan nyt lausekkeen $h^2 = 625{,}0 - x^2$ avulla.

$$
\begin{aligned}
h^2 &= 625{,}0 - 14{,}433\ldots^2 \\
h^2 &= 416{,}666\ldots \\
h &= {}_{(}\pm_{)}\sqrt{416{,}666\ldots} \\
h &= {}_{(}\pm_{)}\,20{,}412\ldots \\
h &\approx {}_{(}\pm_{)}\,20{,}4
\end{aligned}
$$

Hirren mitat ovat 14,4 cm ja 20,4 cm.

Vastaus: 14,4 cm x 20,4 cm

472. Piirretään tilanteesta mallikuva. Merkitään joen suuntaisen aidan pituutta metreinä kirjaimella y ja jokea vastaan kohtisuoria aidan pituuksia kirjaimella x.



Aitauksen pinta-ala on $A = xy$.

Aitauksen hinnaksi tulee 12,00 · y + 4 · 8 · x = 12y + 32x euroa. Aitaukseen on käytössä rahaa 2400 euroa, joten saadaan yhtälö 12y + 32x = 2400. Ratkaistaan yhtälöstä y.

$$\begin{aligned} 12y + 32x &= 2400 \\ 12y &= 2400 - 32x \quad \| :12 \\ y &= 200 - \frac{8}{3}x \end{aligned}$$

Aitauksen pinta-alaa kuvaava funktio on

$$A(x) = x\left(200 - \frac{8}{3}x\right) = -\frac{8}{3}x^2 + 200x\,.$$

Funktio A on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termin kerroin $-\frac{8}{3}$ on negatiivinen, joten funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktion A saa suurimman arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun x-koordinaatti. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio A.

$$A'(x) = -\frac{8}{3}\cdot 2x + 200\cdot 1 = -\frac{16}{3}x + 200$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.

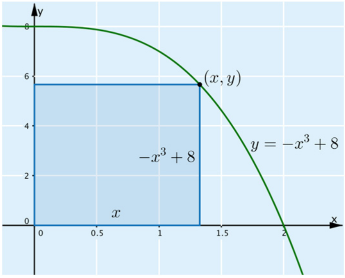
$$\begin{aligned} -\frac{16}{3}x + 200 &= 0 \\ -\frac{16}{3}x &= -200 \quad \| :\left(-\frac{16}{3}\right) \\ x &= 37{,}5 \end{aligned}$$

Pinta-ala on suurin, kun x = 15. Tällöin $y = 200 - \frac{8}{3}\cdot 37{,}5 = 100$.

Aitauksen pinta-ala on suurin, kun joen suuntainen sivu on 100 m ja jokea vastaan kohtisuora sivu on 37,5 m.

Vastaus: 37,5 m x 100 m

473. Piirrettään tilanteesta mallikuva.



Suorakulmion pinta-ala on $A = xy$, missä $y = -x^3 + 8$. Pinta-alaa kuvaava funktio on $A(x) = x(-x^3 + 8) = -x^4 + 8x$.

Ohjelman perusteella käyrä leikkaa x-akselin, kun $x = 2$, joten sivu x voi saada arvoja väliltä [0, 2].

Määritetään funktion A suurin arvo, kun x on välillä [0, 2].

Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman ja arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan funktio A.
$A'(x) = -4x^3 + 8$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla. Ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan, että derivaatan nollakohta on $x = 1{,}259…$.

Derivaatan nollakohta $x = 1{,}259…$ kuuluu tarkasteltavalle välille [0, 25], joten lasketaan funktion A arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$A(0) = -0^4 + 8 \cdot 0 = 0$
$A(1{,}259…) = -1{,}259…^4 + 8 \cdot 1{,}259… = 7{,}559…$
$A(2) = -2^4 + 8 \cdot 2 = 0$

Suorakulmion pinta-ala on mahdollisimman suuri, kun $x = 1{,}259…$, jolloin se on $7{,}559… \approx 7{,}56$.

Vastaus: 7,56

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

474. Kun vohvelia on 90 cm^2, jäätelön tilavuus on suoraan verrannollinen lausekkeen $\sqrt{\frac{90^2}{\pi^2}r^2 - r^6}$ arvoon. Neliöjuuren arvo on suurin, kun juurrettavan arvo on suurin. Merkitään juurrettavaa funktiolla

$$V(r) = \frac{90^2}{\pi^2}r^2 - r^6 = -r^6 + \frac{8100}{\pi^2}r^2 \ .$$

Vohvelin suuaukko ei voi olla negatiivinen, joten $r \geq 0$.

Määritellään funktion V suurin arvo, kun $r \geq 0$. Derivoidaan funktio V.

$$V'(r) = -6r^5 + \frac{8100}{\pi^2} \cdot 2r = -6r^5 + \frac{16\,200}{\pi^2}r$$

Määritetään derivaatan nollakohdat funktion $V'(r) = 0$ avulla.
Ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan, että derivaatan nollakohdat ovat $r = -4{,}066\ldots$ ja $r = 4{,}066\ldots$.

Derivaatan nollakohta $r = 4{,}066\ldots$ kuuluu tarkasteltavalle välille $r \geq 0$.

Laaditaan kulkukaavio, kun $r \geq 0$.

	0	4.067
$V'(x)$	$+$	$-$
$V(x)$	↗	↘
	max	

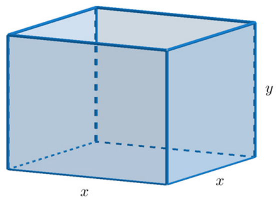
$V'(1) = 1635 > 0$
$V'(5) = -10\,543 < 0$

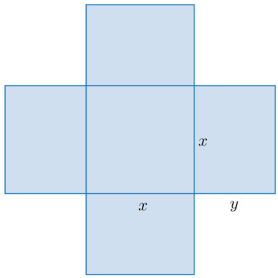
Kulkukaavion avulla nähdään, että suurin tilavuus saadaan, kun $r = 4{,}066\ldots$.

Vohvelin suuaukon halkaisija pitää olla siis
$2 \cdot 4{,}066\ldots = 8{,}133\ldots \approx 8{,}1$ cm.

Vastaus: 8,1 cm

475. Piirretään tilanteesta mallikuva.





Laatikon tilavuus on $V = x \cdot x \cdot y = x^2 y$.

Laatikon kokonaispinta-ala koostuu pohjatahkosta ja neljästä sivutahkosta. Kokonaispinta-ala on $A = x^2 + 4xy$. Koska kokonaispinta-ala on 1200 cm^2, saadaan yhtälö $x^2 + 4xy = 1200$. Ratkaistaan yhtälöstä y.

$$x^2 + 4xy = 1200$$
$$4xy = 1200 - x^2 \quad \| : 4x$$
$$y = \frac{1200}{4x} - \frac{x^2}{4x}$$
$$y = \frac{300}{x} - \frac{x}{4}$$

Laatikon tilavuutta kuvaava funktio on

$$V(x) = x^2\left(\frac{300}{x} - \frac{x}{4}\right) = -\frac{x^3}{4} + 300x$$

Sivun pituus ei voi olla negatiivinen, joten $x \geq 0$.

Määritellään funktion V suurin arvo, kun $x \geq 0$. Derivoidaan funktio V.

$$V'(r) = -\frac{3}{4}x^2 + 300$$

Määritetään derivaatan nollakohdat funktion $V'(x) = 0$ avulla.
Ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan, että derivaatan nollakohdat ovat $x = -20$ ja $x = 20$.

Derivaatan nollakohta $x = 20$ kuuluu tarkasteltavalle välille $x \geq 0$.

Laaditaan kulkukaavio, kun $x \geq 0$.

	0	20
$V'(x)$	$+$	$-$
$V(x)$	$\nearrow$	$\searrow$
	max	

$V'(1) = 65{,}070\ldots > 0$
$V'(21) = -30{,}75 < 0$

Kulkukaavion avulla nähdään, että suurin tilavuus saadaan, kun $x = 20$.
Tällöin $y = \frac{300}{20} - \frac{20}{4} = 10$.

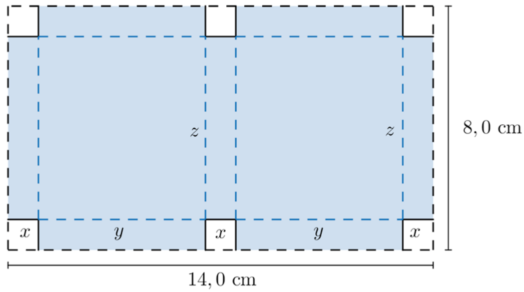
Lasketaan suurin laatikon tilavuus sijoittamalla $x = 20$ funktioon V.

$$V(20) = -\frac{20^3}{4} + 300 \cdot 20 = 4000$$

Laatikon suurin mahdollinen tilavuus on 4000 cm^3, laatikon korkeus on tällöin 10 cm ja pohjan sivu 20 cm.

Vastaus: tilavuus 4000 cm^3, korkeus 10 cm ja pohjan sivu 20 cm.

476. Piirrettään tilanteesta mallikuva.



Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta kirjaimella x, rasian kantaa kirjaimella y ja rasian leveyttä kirjaimella z.

Koska pahvin kanta on 14,0 cm, niin saadaan yhtälö $3x + 2y = 14{,}0$. Ratkaistaan yhtälöstä rasian kanta y.

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 14{,}0 \\
2y &= 14{,}0 - 3x \quad \| :2 \\
y &= 7{,}0 - 1{,}5x
\end{aligned}
$$

Koska pahvin korkeus on 8,0 cm, niin saadaan yhtälö $2x + z = 8{,}0$. Ratkaistaan yhtälöstä rasian leveys z.

$$
\begin{aligned}
2x + z &= 8{,}0 \\
z &= 8{,}0 - 2x
\end{aligned}
$$

Rasian tilavuus on $V = xyz$, joten rasian tilavuutta kuvaava funktio on $V(x) = x(7{,}0 - 1{,}5x)(8{,}0 - 2x) = 3x^3 - 26x^2 + 56x$.

Tutkitaan, millä muuttujan x arvoilla tilanne on mielekäs. Rasian sivut eivät voi olla negatiivisia, joten $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $z \geq 0$. Testataan, millä x:n arvoilla $y \geq 0$ ja $z \geq 0$ ja valitaan näistä pienempi väli, koska muuten jokin sivu voi olla negatiivinen.

$$
\begin{aligned}
y &\geq 0 \\
7{,}0 - 1{,}5x &\geq 0 \\
-1{,}5x &\geq -7{,}0 \quad \| :(-1{,}5) \\
x &\leq 4{,}666...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z &\geq 0 \\
8{,}0 - 2x &\geq 0 \\
-2x &\geq -8{,}0 \quad \| :(-2) \\
x &\leq 4
\end{aligned}
$$

Poisleikattavan neliön sivun pituus pitää olla välillä [0, 4].

Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman ja arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan funktio V.

$V'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 26 \cdot 2x + 56 \cdot 1 = 9x^2 - 52x + 56$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $V'(x) = 0$ avulla.
Ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan, että derivaatan nollakohdat ovat $x = 1{,}431\ldots$ ja $x = 4{,}346\ldots$.

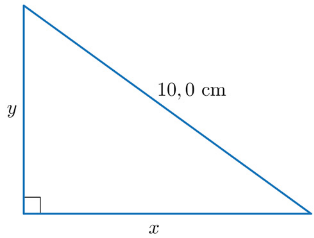
Derivaatan nollakohta $x = 1{,}431\ldots$ kuuluu tarkasteltavalle välille [0, 4], joten lasketaan funktion V arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$V(0) = 3 \cdot 0^3 - 26 \cdot 0^2 + 56 \cdot 0 = 0$
$V(1{,}431\ldots) = 3 \cdot 1{,}431\ldots^3 - 26 \cdot 1{,}431\ldots^2 + 56 \cdot 1{,}431\ldots = 35{,}685\ldots$
$V(4) = 3 \cdot 4^3 - 26 \cdot 4^2 + 56 \cdot 4 = 0$

Rasian tilavuus on suurin, kun $x = 1{,}431\ldots \approx 1{,}4$, joten poisleikattavan neliön sivun pituus on 1,4 cm.

Vastaus: 1,4 cm

477. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2}xy$. Pythagoraan lauseen nojalla $x^2 + y^2 = 10{,}0^2$. Ratkaistaan yhtälöstä sivu y.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10{,}0^2 \\ y^2 &= 100{,}0 - x^2 \\ y &= _{(}\pm_{)}\sqrt{100{,}0 - x^2} \end{aligned}$$

Kolmion pinta-alaa kuvaava funktio on

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100{,}0 - x^2}$$

Päätellään seuraavaksi mikä on pienin ja suurin arvo, jonka sivu x voi saada.
Sivu ei voi olla negatiivinen, joten $x \geq 0$.
Sivun suurin mahdollinen arvo on 10, joka tarkoittaisi, että sivun y pituus on 0.

Määritetään funktion A suurin arvo, kun x on välillä [0, 10].

Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman ja arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan ohjelmalla funktio A.

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x^2 + 100}{\sqrt{-x^2 + 100}}$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $A'(x) = 0$ avulla.
Ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan, että derivaatan nollakohdat ovat $x = -7{,}071\ldots$ ja $x = 7{,}071\ldots$.

Derivaatan nollakohta $x = 7{,}071\ldots$ kuuluu tarkasteltavalle välille [0, 10], joten lasketaan funktion A arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$A(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sqrt{100{,}0 - 0^2} = 0$$

$$A(7{,}071...) = \frac{1}{2} \cdot 7{,}071... \cdot \sqrt{100{,}0 - 7{,}071...^2} = 25$$

$$A(10) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{100{,}0 - 10^2} = 0$$

Pinta-ala on suurin, kun $x = 7{,}071\ldots \approx 7{,}1$. Tällöin
$y = \sqrt{100{,}0 - 7{,}071...^2} = 7{,}071... \approx 7{,}1$.

Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on suurin, kun molempien kateettien pituus on 7,1 cm.

Vastaus: 7,1 cm ja 7,1 cm

478. Merkitään mustan helmen halkaisijaa kirjaimella x ja vihreän helmen halkaisijaa kirjaimella $2y$. Koska mustan helmen halkaisija on puolet punaisen helmen halkaisijasta, niin punaisen helmen halkaisija on $2x$.

Helmet peittävät 40 cm langasta, joten saadaan yhtälö $6x + 8 \cdot 2x + 10 \cdot 2y = 40$. Ratkaistaan yhtälöstä y.

$$\begin{aligned} 6x + 8 \cdot 2x + 10 \cdot 2y &= 40 \\ 20y &= 40 - 22x \quad \| : 20 \\ y &= 2 - 1{,}1x \end{aligned}$$

Koska helmien massa on suoraan verrannollinen niiden tilavuuteen, määritetään helmien yhteistilavuuden pienin arvo. Helminauhan helmien yhteistilavuus on

$$V(x) = 6 \cdot \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 8 \cdot \frac{4}{3}\pi(2x)^3 + 10 \cdot \frac{4}{3}\pi(2 - 1{,}1x)^3$$

Päätellään seuraavaksi mikä on pienin ja suurin arvo, jonka x voi saada. Halkaisija ei voi olla negatiivinen, joten $x \geq 0$.

Sivun x suurin arvo saadaan, kun $y = 0$, joka tarkoittaisi, että vihreän helmen halkaisija on 0. Yhtälön $2 - 1{,}1x = 0$ ratkaisu on $x = 1{,}818\ldots$, joten $x \leq 1{,}818\ldots$.

Määritetään funktion V suurin arvo, kun x on välillä $[0; 1{,}818\ldots]$.

Suljetulla välillä polynomifunktio saa suurimman ja arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan ohjelmalla funktio V.
Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $V'(x) = 0$ avulla.
Ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan derivaatan nollakohdiksi $x = 1{,}004\ldots$ ja $x = 9{,}609\ldots$.

V(x):=6*4/3*pi*(x/2)^3+8*4/3*pi*(x)^3+10*4/3*pi*(2-1.1x)^3

$\approx$ $V(x) := -19.10088\,x^3 + 304.10617\,x^2 - 552.92031\,x + 335.10322$

V'(x)

$\to \dfrac{1}{50000000000}\left(-2865132500073\,x^2 + 30410616886750\,x - 27646015351590\right)$

Ratkaise(V'(x)=0)

$\to \left\{x = \dfrac{-\sqrt{151991907776813470785724555} + 15205308443375}{2865132500073},\ x = \dfrac{\sqrt{151991907776813470785724555} + 15205308443375}{2865132500073}\right\}$

$3

$\approx$ $\{x = 1.00408,\ x = 9.60996\}$

Derivaatan nollakohta $x = 1{,}004\ldots$ kuuluu tarkasteltavalle välille [0; 1,818…], joten lasketaan ohjelmalla funktion V arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

V(0)

$\rightarrow \dfrac{3351032163829}{10000000000}$

$5

$\approx$ 335.10322

V(1.00408)

$\approx$ 67.1841

V(1.818)

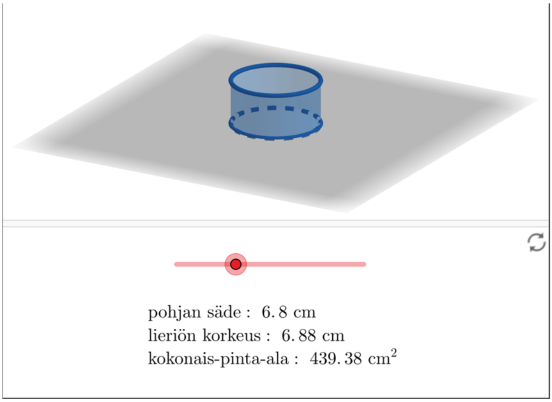
$\approx$ 220.23092

Helminauha on kevyin, kun $x = 1{,}004\ldots \approx 1{,}00$. Tällöin
$2x = 2 \cdot 1{,}004\ldots = 2{,}008\ldots \approx 2{,}01$ ja
$2y = 2 \cdot (2 - 1{,}1 \cdot 1{,}004\ldots) = 4 - 2.2 \cdot 1{,}004\ldots = 1{,}791\ldots \approx 1{,}79$.

Muutetaan mitat senttimetreistä millimetreiksi. Mustan helmen halkaisija pitää olla 10,0 mm, punaisen 20,1 mm ja vihreän 17,9 mm.

Vastaus: musta 10,0 mm, punainen 20,1 mm ja vihreä 17,9 mm

479. **a)** Appletin avulla havaitaan, että mitan pinta-ala on pienimmillään 439,4 cm^2 ja silloin pohjaympyrän säde on 6,8 cm ja mitan korkeus on 6,9 cm. Materiaalia kuluu siis mahdollisimman vähän, kun mitan pohjaympyrän säde on 6,8 cm ja korkeus on 6,9 cm.



Vastaus: mitan korkeus 6,8 cm ja pohjaympyrän säde 6,8 cm

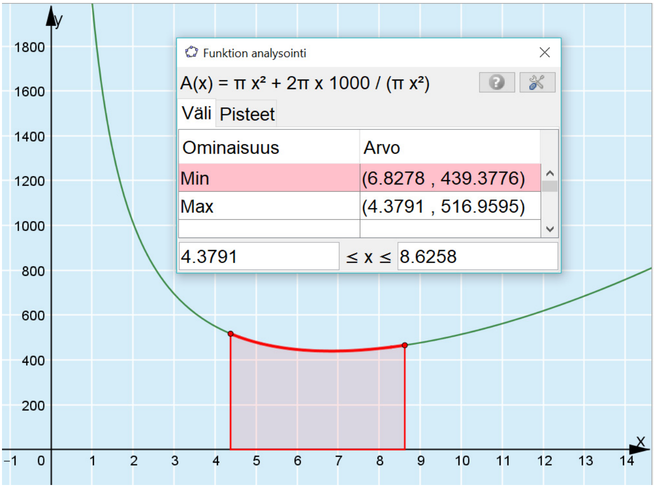
b) Materiaalia kuluu mahdollisimman vähän, kun mitan kokonaispinta-ala on mahdollisimman pieni. Pinta-ala koostuu pohjaympyrästä ja vaipasta. Mitan kokonaispinta-ala on $A = \pi r^2 + 2\pi rh$, jossa r on pohjaympyrän säde ja h on lieriön korkeus.
Sijoittamalla mitan tilavuus 1 l = 1000 cm^3 ympyrälieriön tilavuuden lausekkeeseen $V = \pi r^2 h$ saadaan yhtälö, josta ratkaistaan korkeus h

$$\begin{aligned} \pi r^2 h &= 1000 \quad ||:\pi r^2 \\ h &= \frac{1000}{\pi r^2} \end{aligned}$$

Sijoitetaan h kokonaispinta-alan lausekkeeseen, jolloin saadaan pinta-alafunktio, jossa on vain yksi muuttuja r.

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2}$$

Määritetään pinta-alafunktion pienin arvo funktion analysointiohjelman avulla.



Havaitaan, että pinta-ala on pienimmillään 439,3776 ≈ 439 minimikohdassa $r = 6{,}8278 \approx 6{,}8$.

Lasketaan mitan korkeus h minimikohdassa $r = 6{,}8278$.

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \cdot 6{,}8278^2} = 6{,}827\ldots \approx 6{,}8$$

Materiaalia kuluu siis mahdollisimman vähän, kun mitan pohjaympyrän säde on 6,8 cm ja korkeus on 6,8 cm.

Vastaus: mitan korkeus 6,8 cm ja pohjaympyrän säde 6,8 cm