3 FUNKTION KULKU

3.1 Epäyhtälö ja funktion merkki

ALOITA PERUSTEISTA

301. Merkkikaavion mukaan funktion f merkki on negatiivinen eli funktion kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, kun $x < 0$ ja kun $x > 10$. Funktion f merkki on positiivinen eli funktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, kun $0 < x < 10$.

Vastaus: alapuolella, kun $x < 0$ ja kun $x > 10$, yläpuolella, kun $0 < x < 10$

302. **a)** Kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, kun $x > 1$.
Näin ollen funktion f arvot ovat positiivisia, kun $x > 1$.

Vastaus: $x > 1$

b) Kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, kun $x < 4$.
Näin ollen funktion f arvot ovat positiivisia, kun $x < 4$.

Vastaus: $x < 4$

303. **a)** Kuvaaja $y = g(x)$ leikkaa x-akselin kohdassa $x = 3$ ja kulkee x-akselin alapuolella, kun $x > 3$.
Näin ollen epäyhtälön $g(x) \leq 0$ ratkaisu on $x \geq 3$.

Vastaus: $x \geq 3$

b) Kuvaaja $y = g(x)$ leikkaa x-akselin kohdissa $x = -1$ ja $x = 2$. Lisäksi kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, kun
$-1 < x < 2$.
Näin ollen epäyhtälön $g(x) \leq 0$ ratkaisu on $-1 \leq x \leq 2$.

Vastaus: $-1 \leq x \leq 2$

c) Kuvaaja $y = g(x)$ leikkaa x-akselin kohdissa $x = –3$ ja $x = 1$. Lisäksi kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, kun
$x < –3$ ja kun $x > 1$. Näin ollen epäyhtälön $g(x) \leq 0$ ratkaisu on $x \leq –3$ tai $x \geq 1$.

Vastaus: $x \leq –3$ tai $x \geq 1$

304. **a)** Funktion f ainoa nollakohta on $x = 3$ ja lisäksi tiedetään, että $f(2) = 6$ ja $f(4) = –1$. Tästä voidaan päätellä funktion saavan positiivisia arvoja, kun $x < 3$ ja negatiivisia arvoja, kun $x > 3$. Täydennetään funktion f merkkikaavio.

	3	
$f(x)$	+	–

Vastaus:

	3	
$f(x)$	+	–

b) Funktion g nollakohdat ovat $x = 4$ ja $x = 6$ ja lisäksi tiedetään, että $g(3) < 0$, $g(5) > 0$ ja $g(7) < 0$. Näin ollen funktion merkki on nollakohdan $x = 4$ vasemmalla puolella negatiivinen, sitten positiivinen ja nollakohdan $x = 6$ oikealla puolella negatiivinen. Täydennetään funktion g merkkikaavio.

	4	6	
$g(x)$	–	+	–

Vastaus:

	4	6	
$g(x)$	–	+	–

305. **a)** Merkkikaavion mukaan funktio f saa negatiivisia arvoja, kun $x > 6$. Näin ollen epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisu on $x > 6$.

Vastaus: $x > 6$

b) Merkkikaavion mukaan funktio f saa negatiivisia arvoja, kun $x < –3$ tai $x > 2$.
Näin ollen epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisu on $x < –3$ tai $x > 2$.

Vastaus: $x < –3$ tai $x > 2$

c) Merkkikaavion mukaan funktio f saa negatiivisia arvoja, kun $–5 < x < 4$.
Näin ollen epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisu on $–5 < x < 4$.

Vastaus: $–5 < x < 4$

306. **a)** Ratkaistaan funktion $f(x) = 4x – 12$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 4x-12&=0 \\ 4x&=12 \quad \|:4 \\ x&=3 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 3$

b) Lasketaan funktion f arvo nollakohdan vasemmalla puolella olevassa kohdassa, esimerkiksi kohdassa $x = 2$.
$f(2) = 4 \cdot 2 – 12 = –4$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan oikealla puolella olevassa kohdassa, esimerkiksi kohdassa $x = 4$.
$f(4) = 4 \cdot 4 – 12 = 4$

Vastaus: esim. $f(2) = –4$ ja $f(4) = 4$

c) Kohdan a perusteella tiedetään, että funktion nollakohta on kohta $x = 3$. Kohdan b perusteella tiedetään, että funktion arvot ovat negatiivisia nollakohdan vasemmalla puolella ja positiivisia nollakohdan oikealla puolella. Laaditaan funktion *f* merkkikaavio näiden tietojen avulla.

	3	
$f(x)$	$-$	$+$

Vastaus:

	3	
$f(x)$	$-$	$+$

307. **a)** Määritetään funktion $g(x) = 6x - 8$ nollakohta yhtälöstä $g(x) = 0$.

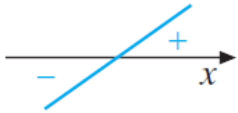
$$6x - 8 = 0$$
$$6x = 8 \qquad \|:6$$
$$x = \frac{8}{6}$$
$$x = \frac{4}{3}$$

Vastaus: $x = \frac{4}{3}$

b) Funktion $g(x) = 6x - 8$ kuvaaja on nouseva suora, koska kulmakerroin ($k = 6$) on positiivinen.

Vastaus: nouseva

c) Laaditaan funktion $g(x) = 6x - 8$ merkkikaavio a- ja b-kohtien avulla. Nousevan suoran pisteiden y-koordinaatit ovat negatiivisia nollakohdan vasemmalla puolella, joten funktion merkki vaihtuu nollakohdassa negatiivisesta positiiviseksi.



	$\frac{4}{3}$	
$f(x)$	–	+

Vastaus:

	$\frac{4}{3}$	
$f(x)$	–	+

308. **a)** Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $3x - 12$ funktiolla $f(x)$.
Ratkaistaan funktion $f(x) = 3x - 12$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$3x - 12 = 0$$
$$3x = 12 \quad \| :3$$
$$x = 4$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 4$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = 0$.
$f(0) = 3 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 4$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 6$.
$f(6) = 3 \cdot 6 - 12 = 6 > 0$

Laaditaan merkkikaavio.

	4	
$f(x)$	–	+

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f(x) = 3x - 12$ arvo on nolla tai positiivinen nollakohdassaan $x = 4$ tai sen oikealla puolella, joten epäyhtälön $3x - 12 \geq 0$ ratkaisu on $x \geq 4$.

Tapa 2:

$$3x - 12 \geq 0$$
$$3x \geq 12 \quad \| :3 \ (> 0)$$
$$x \geq 4$$

Vastaus: $x \geq 4$

b) Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $-4x - 20$ funktiolla $f(x)$. Ratkaistaan funktion $f(x) = -4x - 20$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -4x - 20 &= 0 \\ -4x &= 20 \quad \|:(-4) \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = -5$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = -6$.
$f(-6) = -4 \cdot (-6) - 20 = 4 > 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = -5$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 0$.
$f(0) = -4 \cdot 0 - 20 = -20 < 0$

Laaditaan merkkikaavio.

	-5	
$f(x)$	$+$	$-$

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f(x) = -4x - 20$ arvo on negatiivinen nollakohdan $x = -5$ oikealla puolella, joten epäyhtälön $-4x - 20 < 0$ ratkaisu on $x > -5$.

Tapa 2:

$$\begin{aligned} -4x - 20 &< 0 \\ -4x &< 20 \quad \| : (-4) \ (< 0) \\ x &> -5 \end{aligned}$$

Vastaus: $x > -5$

c) Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $10x$ funktiolla $f(x)$. Ratkaistaan funktion $f(x) = 10x$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$10x = 0 \quad ||:10$$
$$x = 0$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 0$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = -1$.
$f(-1) = 10 \cdot (-1) = -10 < 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 0$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 1$.
$f(1) = 10 \cdot 1 = 10 > 0$

Laaditaan merkkikaavio.

	0	
$f(x)$	$-$	$+$

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f(x) = 10x$ arvo positiivinen nollakohdan $x = 0$ oikealla puolella, joten epäyhtälön $10x > 0$ ratkaisu on $x > 0$.

Tapa 2:
$$10x > 0 \quad ||:10 \ (> 0)$$
$$x > 0$$

Vastaus: $x > 0$

309. **a)** Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$-6x < 24$$
$$-6x - 24 < 0$$

Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $-6x - 24$ funktiolla $f(x)$.
Ratkaistaan funktion $f(x) = -6x - 24$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$-6x - 24 = 0$$
$$-6x = 24 \quad \|:(-6)$$
$$x = -4$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = -4$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = -5$.
$f(-5) = -6 \cdot (-5) - 24 = 6 > 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = -4$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 0$.
$f(0) = -6 \cdot 0 - 24 = -24 < 0$

Laaditaan merkkikaavio.

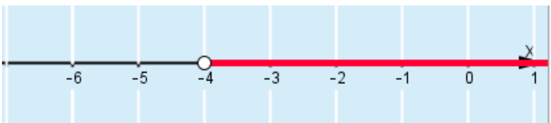
	-4	
$f(x)$	+	–

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f(x) = -6x - 24$ arvo on negatiivinen nollakohdan $x = -4$ oikealla puolella, joten epäyhtälön $-6x < 24$ ratkaisu on $x > -4$.

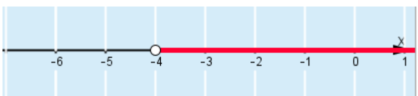
Tapa 2:

$$-6x < 24 \quad \|: (-6) \quad (< 0)$$
$$x > -4$$

Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus: $x > -4$,



b) Avataan sulkeet.

$$2(x-4) \geq 0$$
$$2x-8 \geq 0$$

Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $2x - 8$ funktiolla $f(x)$. Ratkaistaan funktion $f(x) = 2x - 8$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$2x-8=0$$
$$2x=8 \quad \| :2$$
$$x=4$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 4$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = 0$.
$f(0) = 2 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 4$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 5$.
$f(5) = 2 \cdot 5 - 8 = 2 > 0$

Laaditaan merkkikaavio.

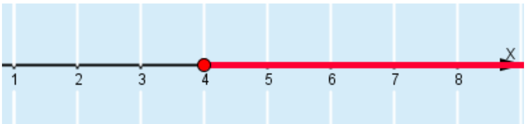
	4	
$f(x)$	–	+

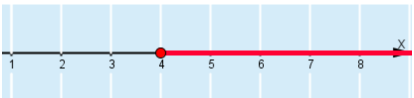
Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f(x) = 2x - 8$ arvo on nolla tai positiivinen nollakohdassaan $x = 4$ tai sen oikealla puolella, joten epäyhtälön $2(x - 4) \geq 0$ ratkaisu on $x \geq 4$.

Tapa 2:

$$2(x-4) \geq 0$$
$$2x-8 \geq 0$$
$$2x \geq 8 \quad \| :2 \quad (>0)$$
$$x \geq 4$$

Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus: $x \geq 4$, 

c) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$-3x \le x$$
$$-3x - x \le 0$$
$$-4x \le 0$$

Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $-4x$ funktiolla $f(x)$.
Ratkaistaan funktion $f(x) = -4x$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$-4x = 0 \quad \|:(-4)$$
$$x = 0$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 0$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = -1$.
$f(-1) = -4 \cdot (-1) = 4 > 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 0$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 1$.
$f(1) = -4 \cdot 1 = -4 < 0$

Laaditaan merkkikaavio.

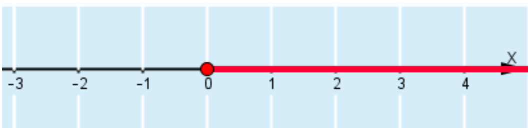
		0	
$f(x)$	+		–

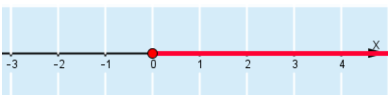
Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f(x) = -4x$ arvo on nolla tai negatiivinen nollakohdassaan $x = 0$ tai sen oikealla puolella, joten epäyhtälön $-3x \le x$ ratkaisu on $x \ge 0$.

Tapa 2:

$$-3x \le x$$
$$-4x \le 0 \quad \|: (-4) \quad (< 0)$$
$$x \ge 0$$

Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus: $x \ge 0$, 

310. **a)** Määritetään funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

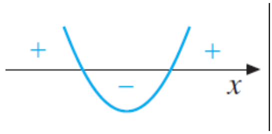
Funktion nollakohdat ovat $x = \frac{3+5}{2} = 4$ ja $x = \frac{3-5}{2} = -1$.

Vastaus: $x = -1$ ja $x = 4$

b) Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin ($a = 1$) on positiivinen.

Vastaus: ylöspäin

c) Laaditaan funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ merkkikaavio a- ja b-kohtien avulla. Ylöspäin aukeavan paraabelin y-koordinaatit ovat negatiivisia, kun x-koordinaatti on paraabelin ja x-akselin leikkauskohtien välissä, joten funktion arvot ovat nollakohtien välissä negatiivisia.



	−1		4	
$f(x)$	+	–	+	

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ toteutuu, kun $-1 \leq x \leq 4$.

Vastaus: $-1 \leq x \leq 4$

VAHVISTA OSAAMISTA

311. Merkkikaaviosta A nähdään, että funktio g saa positiivisia arvoja, kun $x < 1$, joten epäyhtälön $g(x) > 0$ ratkaisu on $x < 1$. Tällöin merkkikaavio A ja ratkaisu I kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta B nähdään, että funktio g saa positiivisia arvoja, kun $x < 1$ tai $x > 5$, joten epäyhtälön $g(x) > 0$ ratkaisu on $x < 1$ tai $x > 5$. Tällöin merkkikaavio B ja ratkaisu III kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta C nähdään, että funktio g saa positiivisia arvoja, kun $1 < x < 5$, joten epäyhtälön $g(x) > 0$ ratkaisu on $1 < x < 5$. Tällöin merkkikaavio C ja ratkaisu IV kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta D nähdään, että funktio $g(x)$ saa positiivisia arvoja, kun $x < 1$ tai $1 < x < 5$, joten epäyhtälön $g(x) > 0$ ratkaisu on $x < 1$ tai $1 < x < 5$. Tällöin merkkikaavio D ja ratkaisu V kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta E nähdään, että funktio g saa positiivisia arvoja, kun $x < 5$, joten epäyhtälön $g(x) > 0$ ratkaisu on $x < 5$. Tällöin merkkikaavio E ja ratkaisu II kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta F nähdään, että funktio g saa positiivisia arvoja, kun $x < 1$, joten epäyhtälön $g(x) > 0$ ratkaisu on $x < 1$. Tällöin merkkikaavio F ja ratkaisu I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: I, B: III, C: IV, D: V, E: II ja F: I

312. **a)** Tiedetään, että $f(x) > 0$, kun $x > 1$, joten funktio saa positiivisia arvoja, kun $x > 1$ ja negatiivisia arvoja, kun $x < 1$. Laaditaan funktion merkkikaavio.

	1	
$f(x)$	–	+

Vastaus:

	1	
$f(x)$	–	+

b) Tiedetään, että $f(x) > 0$, kun $x < 3$, joten funktio saa positiivisia arvoja, kun $x < 3$ ja negatiivisia arvoja, kun $x > 3$. Laaditaan funktion merkkikaavio.

		3	
$f(x)$	+		–

Vastaus:

		3	
$f(x)$	+		–

c) Tiedetään, että $f(x) > 0$, kun $-5 < x < 1$, joten funktio saa positiivisia arvoja, kun $-5 < x < 1$, ja negatiivisia arvoja, kun $x < -5$ tai $x > 1$. Laaditaan funktion merkkikaavio.

		–5		1	
$f(x)$	–		+		–

Vastaus:

		–5		1	
$f(x)$	–		+		–

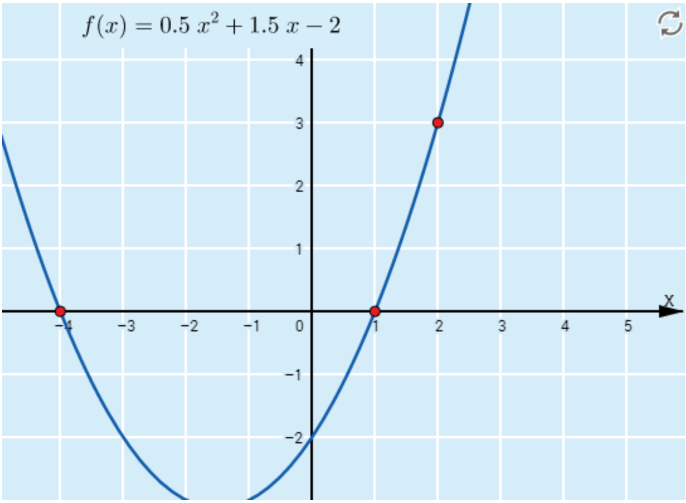
d) Tiedetään, että $f(x) > 0$, kun $x < -4$ tai $x > 6$, joten funktio saa positiivisia arvoja, kun $x < -4$ tai $x > 6$, ja negatiivisia arvoja, kun $-4 < x < 6$. Laaditaan funktion merkkikaavio.

		–4		6	
$f(x)$	+		–		+

Vastaus:

		–4		6	
$f(x)$	+		–		+

313. Siirtämällä pisteitä saadaan esimerkiksi funktio $f(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 2$, jonka arvot ovat negatiivisia vain, kun $-4 < x < 1$.



Vastaus: esim. $f(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 2$

314. **a)** Ratkaistaan funktion $f(x) = -x$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$-x = 0 \quad \| :(-1)$$
$$x = 0$$

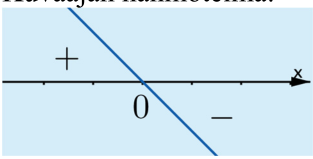
Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 0$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = -1$.
$f(-1) = -(-1) = 1 > 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 0$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 1$.
$f(1) = -1 < 0$
Laaditaan merkkikaavio.

		0
$f(x)$	+	–

Tapa 2:
Funktion $f(x) = -x$ kuvaaja on laskeva suora. Laskeva suora on x-akselin yläpuolella nollakohdan vasemmalla puolella ja x-akselin alapuolella nollakohdan oikealla puolella.

Kuvaajan hahmotelma:



Laaditaan merkkikaavio.

		0
$f(x)$	+	–

Vastaus:

		0
$f(x)$	+	–

b) Ratkaistaan funktion $f(x) = \frac{1}{3}x - 6$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}x - 6 &= 0 \\
\frac{1}{3}x &= 6 \quad \| \cdot 3 \\
x &= 18
\end{aligned}
$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 18$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = 0$.

$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 - 6 = -6 < 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = 18$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 21$.

$f(21) = \frac{1}{3} \cdot 21 - 6 = 1 > 0$

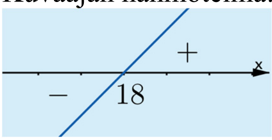
Laaditaan merkkikaavio.

		18	
$f(x)$	–		+

Tapa 2:

Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x - 6$ kuvaaja on nouseva suora. Nouseva suora on x-akselin alapuolella nollakohdan vasemmalla puolella ja x-akselin yläpuolella nollakohdan oikealla puolella.

Kuvaajan hahmotelma:



Laaditaan merkkikaavio.

		18	
$f(x)$	–		+

Vastaus:

		18	
$f(x)$	–		+

c) Ratkaistaan funktion $f(x) = -\frac{5}{7}x - 2$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{5}{7}x - 2 &= 0 \\
-\frac{5}{7}x &= 2 \quad \| : \left(-\frac{5}{7}\right) \\
x &= 2 : \left(-\frac{5}{7}\right) \\
x &= -2 \cdot \frac{7}{5} \\
x &= -\frac{14}{5}
\end{aligned}
$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = -\frac{14}{5} = -2\frac{4}{5}$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = -7$.

$$f(-7) = -\frac{5}{7} \cdot (-7) - 2 = 3 > 0$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = -\frac{14}{5}$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 0$.

$$f(0) = -\frac{5}{7} \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

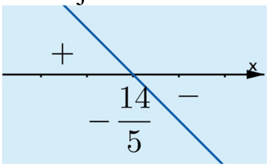
Laaditaan merkkikaavio.

	$-\frac{14}{5}$	
$f(x)$	+	–

Tapa 2:

Funktion $f(x) = -\frac{5}{7}x - 2$ kuvaaja on laskeva suora. Laskeva suora on x-akselin yläpuolella nollakohdan vasemmalla puolella ja x-akselin alapuolella nollakohdan oikealla puolella.

Kuvaajan hahmotelma:



Laaditaan merkkikaavio.

	$-\frac{14}{5}$	
$f(x)$	+	−

Vastaus:

	$-\frac{14}{5}$	
$f(x)$	+	−

315. **a)** Funktion $f(x) = -x^2 + 7x - 12$ nollakohdat ratkaistaan yhtälöstä $f(x) = 0$.

$-x^2 + 7x - 12 = 0$

Sijoitetaan toisen asteen yhtälöstä poimitut kertoimet $a = -1$, $b = 7$ ja $c = -12$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-1)}$$
$$x = \frac{-7 \pm 1}{-2}$$
$$x = \frac{-7+1}{-2} = 3 \text{ tai } x = \frac{-7-1}{-2} = 4$$

Koska funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, saa funktio f positiivisia arvoja nollakohtiensa välissä ja negatiivisia arvoja nollakohdan $x = 3$ vasemmalla sekä nollakohdan $x = 4$ oikealla puolella. (Vaihtoehtoisesti voi myös laskea funktion arvot kussakin nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä. Esimerkiksi $f(0) = -12$ (< 0), $f(3,5) = 0,25$ (> 0) ja $f(5) = -2$ (< 0).)

Laaditaan merkkikaavio.

	3	4	
$f(x)$	–	+	–

Vastaus:

	3	4	
$f(x)$	–	+	–

b) Funktion $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+4$ nollakohdat ratkaistaan yhtälöstä $f(x) = 0$.

$\frac{1}{4}x^2-2x+4=0$

Sijoitetaan toisen asteen yhtälöstä poimitut kertoimet $a=\frac{1}{4}$, $b=-2$ ja $c=4$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 4}}{2\cdot\frac{1}{4}}$$

$$x=\frac{2\pm 0}{\frac{1}{2}}$$

$$x=4$$

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia, joten f saa positiivisia arvoja kaikkialla muualla paitsi kohdassa $x = 4$ arvon 0. (Vaihtoehtoisesti voi myös laskea funktion arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä. Esimerkiksi $f(0) = 4$ (> 0) ja $f(5) = 0{,}25$ (> 0).)

Laaditaan merkkikaavio.

		4	
$f(x)$	+		+

Vastaus:

		4	
$f(x)$	+		+

316. **a)** Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$\begin{aligned} 4(2x-3) &< x+5 \\ 8x-12 &< x+5 \\ 7x-17 &< 0 \end{aligned}$$

Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $7x - 17$ funktiolla $f(x)$. Ratkaistaan funktion $f(x) = 7x - 17$ nollakohta yhtälön $f(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 7x-17 &= 0 \\ 7x &= 17 \quad \|:7 \\ x &= \frac{17}{7} \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = 0$.

$f(0) = 7 \cdot 0 - 17 = -17 < 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = \frac{17}{7}$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 3$.

$f(3) = 7 \cdot 3 - 17 = 4 > 0$

Laaditaan merkkikaavio.

	$\frac{17}{7}$	
$f(x)$	$-$	$+$

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f(x) = 7x - 17$ arvo on negatiivinen nollakohdan $x = \frac{17}{7}$ vasemmalla puolella, joten epäyhtälön $4(2x - 3) < x + 5$ ratkaisu on $x < \frac{17}{7}$.

Tapa 2:

$$\begin{aligned} 4(2x-3) &< x+5 \\ 8x-12 &< x+5 \\ 7x &< 17 \quad \|:7 \\ x &< \frac{17}{7} \end{aligned}$$

Vastaus: $x < \frac{17}{7}$

b) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$x-2(5-x)>-3(x+1)$$
$$x-10+2x>-3x-3$$
$$6x-7>0$$

Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $6x-7$ funktiolla $f(x)$. Ratkaistaan funktion $f(x)=6x-7$ nollakohta yhtälöstä $f(x)=0$.

$$6x-7=0$$
$$6x=7 \quad \|:6$$
$$x=\frac{7}{6}$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x=\frac{7}{6}$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x=0$.

$f(0)=6\cdot 0-7=-7<0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x=\frac{7}{6}$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x=2$.

$f(2)=6\cdot 2-7=5>0$

Laaditaan merkkikaavio.

		$\frac{7}{6}$
$f(x)$	$-$	$+$

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f(x)=6x-7$ arvo on positiivinen nollakohdan $x=\frac{7}{6}$ oikealla puolella, joten epäyhtälön $x-2(5-x)>-3(x+1)$ ratkaisu on $x>\frac{7}{6}$.

Tapa 2:

$$x-2(5-x)>-3(x+1)$$
$$x-10+2x>-3x-3$$
$$6x>7 \quad \|:6$$
$$x>\frac{7}{6}$$

Vastaus: $x>\frac{7}{6}$

c) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$\frac{x}{-2}+\frac{x}{-3}\geq 5$$

$$-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x\geq 5$$

$$-\frac{3}{6}x-\frac{2}{6}x\geq 5$$

$$-\frac{5}{6}x\geq 5$$

$$-\frac{5}{6}x-5\geq 0$$

Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $-\frac{5}{6}x-5$ funktiolla $f(x)$.

Ratkaistaan funktion $f(x)=-\frac{5}{6}x-5$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}x-5&=0 \\ -\frac{5}{6}x&=5 \quad \| : \left(-\frac{5}{6}\right) \\ x&=5\cdot\left(-\frac{6}{5}\right) \\ x&=-6 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = –6$ vasemmalla puolella olevassa kohdassa $x = –12$.

$$f(-12)=-\frac{5}{6}\cdot(-12)-5=5>0$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan $x = –6$ oikealla puolella olevassa kohdassa $x = 0$.

$$f(0)=-\frac{5}{6}\cdot 0-5=-5<0$$

Laaditaan merkkikaavio.

		-6	
$f(x)$	$+$		$-$

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion $f(x) = -\frac{5}{6}x - 5$ arvo on positiivinen nollakohdan $x = -6$ vasemmalla puolella, joten epäyhtälön $\frac{x}{-2} + \frac{x}{-3} \geq 5$ ratkaisu on $x \leq -6$.

Tapa 2:
Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\frac{x}{-2} + \frac{x}{-3} \geq 5$$

$$\frac{3x}{-6} + \frac{2x}{-6} \geq 5 \quad \| \cdot (-6)$$

$$3x + 2x \leq -30$$

$$5x \leq -30 \quad \| : 5$$

$$x \leq -6$$

Vastaus: $x \leq -6$

317. **a)** Määritetään merkkikaaviota varten funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ nollakohdat yhtälöstä $-x^2 + 4x - 3 = 0$.
Sijoitetaan $a = -1$, $b = 4$ ja $c = -3$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

Nollakohdat ovat siis $x = \frac{-4+2}{-2} = 1$ ja $x = \frac{-4-2}{-2} = 3$.

Lasketaan funktion f arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio. (Vaihtoehtoisesti merkkikaavion merkit voi päätellä funktion kuvaajan avulla. Funktion kuvaajana on alaspäin aukeavan paraabeli, jonka arvot ovat positiivisia nollakohtien välissä ja negatiivisia välin ulkopuolella.)

$f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$
$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$
$f(4) = -4^2 + 4 \cdot 4 - 3 = -3 < 0$

		1		3	
$f(x)$	–		+		–

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ ratkaisu on $1 \leq x \leq 3$.

Vastaus: $1 \leq x \leq 3$

b) Lasketaan merkkikaaviota varten funktion $f(x) = x^2 - 2x + 3$ nollakohdat yhtälöstä $x^2 - 2x + 3 = 0$.

Sijoitetaan $a = 1$, $b = -2$ ja $c = 3$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, joten funktiolla ei ole nollakohtia eikä funktio vaihda merkkiään.

Lasketaan funktion f arvo jollakin muuttujan x arvolla.
$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$, joten funktio saa vain positiivisia arvoja.
(Vaihtoehtoisesti merkkikaavion merkin voi päätellä funktion kuvaajan avulla. Funktion kuvaajana on ylöspäin aukeava paraabeli. Koska funktiolla ei ole nollakohtia, funktion arvot ovat positiivisia kaikkialla.)

Laaditaan merkkikaavio.

$f(x)$	+

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön $x^2 - 2x + 3 > 0$ ratkaisuja ovat kaikki reaaliluvut.

Vastaus: kaikki reaaliluvut

318. **a)** Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$x^2 - 3 \le 2 - 4x$$
$$x^2 + 4x - 5 \le 0$$

Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $x^2 + 4x - 5$ funktiolla $f(x)$.
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^2 + 4x - 5$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$$
$$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

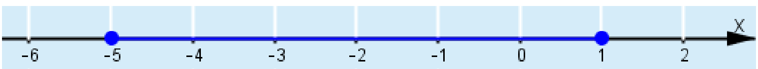
Nollakohdat ovat siis $x = \frac{-4+6}{2} = 1$ ja $x = \frac{-4-6}{2} = -5$.

Lasketaan funktion f arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio. (Vaihtoehtoisesti merkkikaavion merkit voi päätellä funktion kuvaajan avulla. Funktion kuvaajana on ylöspäin aukeavan paraabeli, jonka arvot ovat negatiivisia nollakohtien välissä ja positiivisia välin ulkopuolella.)

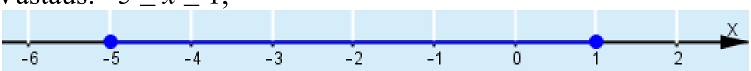
$f(-6) = (-6)^2 + 4 \cdot (-6) - 5 = 7 > 0$
$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$
$f(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = 7 > 0$

		-5		1	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön $x^2 - 3 \le 2 - 4x$ ratkaisu on $-5 \le x \le 1$. Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus: $-5 \le x \le 1$,



b) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$4-2(x^2-1)<-3x+6$$
$$4-2x^2+2<-3x+6$$
$$-2x^2+3x<0$$

Merkitään epäyhtälön vasemman puolen lauseketta $-2x^2+3x$ funktiolla $f(x)$.
Ratkaistaan funktion $f(x) = -2x^2+3x$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$-2x^2+3x=0$$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-2)\cdot 0}}{2\cdot(-2)}$$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9}}{-4}$$
$$x=\frac{-3\pm 3}{-4}$$

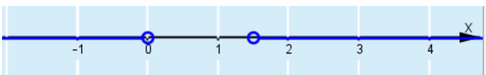
Nollakohdat ovat siis $x=\frac{-3+3}{-4}=0$ ja $x=\frac{-3-3}{-4}=\frac{3}{2}$.

Lasketaan funktion f arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio. (Vaihtoehtoisesti merkkikaavion merkit voi päätellä funktion kuvaajan avulla. Funktion kuvaajana on alaspäin aukeavan paraabeli, jonka arvot ovat positiivisia nollakohtien välissä ja negatiivisia välin ulkopuolella.)

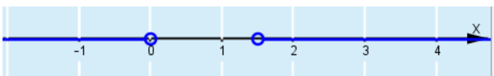
$f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = -5 < 0$
$f(1) = -2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1 > 0$
$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = -2 < 0$

		0		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$-$		$+$		$-$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön $4-2(x^2-1)<-3x+6$ ratkaisu on $x < 0$ tai $x > \frac{3}{2}$. Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus: $x < 0$ tai $x > \frac{3}{2}$,



319. Merkkikaaviosta nähdään, että funktio f saa positiivisia arvoja, kun $x \neq -2$, joten epäyhtälö A ja ratkaisu II kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta nähdään, että funktio f ei saa negatiivisia arvoja, joten epäyhtälö B ja ratkaisu III kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta nähdään, että funktio f saa positiivisia arvoja tai arvon nolla kaikilla muuttujan x arvoilla, joten epäyhtälö C ja ratkaisu IV kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta nähdään, että funktio f saa negatiivisia arvoja tai arvon nolla, kun $x = -2$, joten epäyhtälö D ja ratkaisu I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III, C: IV ja D: I

320. Kuvaajasta A havaitaan, että funktion f arvot ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin nolla välillä $-2 \leq x \leq 1$, joten kuvaaja A ja ratkaisu II kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta B havaitaan, että funktion f arvot ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin nolla, kun $x \leq -2$ tai $x \geq 1$, joten kuvaaja B ja ratkaisu III kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta C havaitaan, että funktion f arvot ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin nolla kaikilla muuttujan x arvoilla, joten kuvaaja C ja ratkaisu V kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta D havaitaan, että funktion f arvot ovat aina suurempia kuin nolla eli funktio f ei saa millään muuttujan arvolla negatiivista arvoa, joten kuvaaja D ja ratkaisu IV kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta E havaitaan, että funktion f arvot ovat aina suurempia tai yhtä suuria kuin nolla ja vain kohdassa $x = 2$ arvon 0, joten kuvaaja E ja ratkaisu I kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta F havaitaan, että funktion f arvot ovat aina pienempiä tai yhtä suuria kuin nolla, joten kuvaaja F ja ratkaisu V kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III, C: V, D: IV, E: I ja F: V

321. **a)** Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$x^2 - 6x < -9$$
$$x^2 - 6x + 9 < 0$$

Määritetään merkkikaaviota varten funktion $f(x) = x^2 - 6x + 9$ nollakohdat yhtälöstä $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Sijoitetaan $a = 1$, $b = -6$ ja $c = 9$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Funktion f ainoa nollakohta on $x = 3$.
Lasketaan funktion f arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio. (Vaihtoehtoisesti merkkikaavion merkit voi päätellä funktion kuvaajan avulla. Funktion kuvaajana on ylöspäin aukeavan paraabeli, jolla on yksi nollakohta paraabelin huipussa. Funktion arvot ovat positiivisia kaikkialla muualla paitsi nollakohdassa arvo on 0.)

		3	
$f(x)$	+		+

$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$
$f(10) = 10^2 - 6 \cdot 10 + 9 = 49 > 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö $x^2 - 6x < -9$ ei toteudu millään muuttujan x arvolla.

Vastaus: ei ratkaisua

b) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$x^2 \geq -4(x+1)$

$x^2 + 4x + 4 \geq 0$

Määritetään merkkikaaviota varten funktion $f(x) = x^2 + 4x + 4$ nollakohdat yhtälöstä $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Sijoitetaan $a = 1$, $b = 4$ ja $c = 4$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Nollakohta on siis $x = -2$.

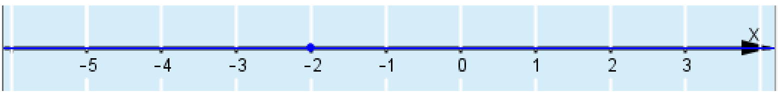
Lasketaan funktion f arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio. (Vaihtoehtoisesti merkkikaavion merkit voi päätellä funktion kuvaajan avulla. Funktion kuvaajana on ylöspäin aukeavan paraabeli, jolla on yksi nollakohta paraabelin huipussa. Funktion arvot ovat positiivisia kaikkialla muualla paitsi nollakohdassa arvo on 0.)

	–2	
$f(x)$	+	+

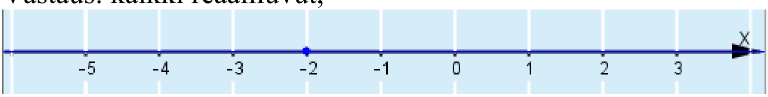
$f(-3) = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4 = 1 > 0$

$f(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö $x^2 \geq -4(x+1)$ toteutuu kaikilla x:n arvolla. Piirretään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus: kaikki reaaliluvut,



c) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$8x + 4 < 16x^2 + 5$$
$$-16x^2 + 8x - 1 < 0$$

Lasketaan merkkikaaviota varten funktion $f(x) = -16x^2 + 8x - 1$ nollakohdat yhtälöstä $-16x^2 + 8x - 1 = 0$.

Sijoitetaan $a = -16$, $b = 8$ ja $c = -1$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-16)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{-32} = \frac{-8}{-32} = \frac{1}{4}$$

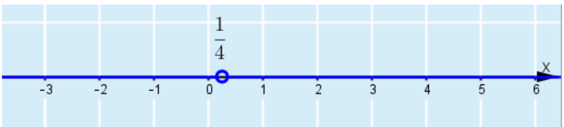
Nollakohta on siis $x = \frac{1}{4}$.

Lasketaan funktion f arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio. (Vaihtoehtoisesti merkkikaavion merkit voi päätellä funktion kuvaajan avulla. Funktion kuvaajana on alaspäin aukeavan paraabeli, jolla on yksi nollakohta paraabelin huipussa. Funktion arvot ovat negatiivisia kaikkialla muualla paitsi nollakohdassa arvo on 0.)

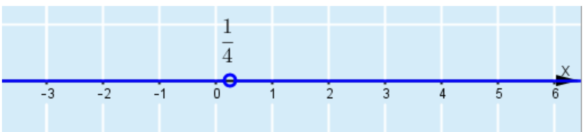
	$\frac{1}{4}$	
$f(x)$	–	–

$f(0) = -16 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$
$f(1) = -16 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 1 = -9 < 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö $8x + 4 < 16x^2 + 5$ toteutuu kaikilla muilla muuttujan x arvoilla paitsi arvolla $x = \frac{1}{4}$. Piirretään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus: $x \neq \frac{1}{4}$



322. Jos koko köysi käytetään kannan x suuntaisiin sivuihin, on kannan pituus 5 metriä, joten $x \leq 5$. Kannan pituus pitää olla myös positiivinen eli $x > 0$, joten $0 \leq x \leq 5$.

Vastaus: $0 \leq x \leq 5$

323. Kilohinnan x pitää olla positiivinen tai 0 eli $x \geq 0$. Myös myyntihinnan $15 - 0{,}25x$ pitää olla positiivinen tai 0 eli $15 - 0{,}25x \geq 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö $15 - 0{,}25x \geq 0$.
Merkitään epäyhtälön vasenta puolta funktiolla $f(x) = 15 - 0{,}25x$.

Ratkaistaan funktion $f(x) = 15 - 0{,}25x$ nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 15 - 0{,}25x &= 0 \\ -0{,}25x &= -15 \quad \|:(-0{,}25) \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Laaditaan merkkikaavio.

	60	
$f(x)$	+	–

$f(0) = 15 - 0{,}25 \cdot 0 = 15 > 0$
$f(100) = 15 - 0{,}25 \cdot 100 = -10 < 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön $15 - 0{,}25x \geq 0$ ratkaisu on $x \leq 60$.
(Epäyhtälön voi ratkaista myös seuraavasti:

$$\begin{aligned} 15 - 0{,}25x &\geq 0 \\ -0{,}25x &\geq -15 \quad \|: (-0{,}25) < 0 \\ x &\leq 60\ ) \end{aligned}$$

Muuttujan x arvot $0 \leq x \leq 60$ ovat mahdollisia kilohintoja.

Vastaus: $0 \leq x \leq 60$

324. Funktion g nollakohdat ovat $x = –9$ ja $x = –4$, ja funktio vaihtaa merkkinsä molemmissa niistä. Tiedetään, että funktion g kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä (0, 5), joten funktio saa siis positiivisen arvon kohdassa $x = 0$. Näin ollen funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > –4$. Laaditaan funktion merkkikaavio.

	–9	–4	
$g(x)$	+	–	+

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön $g(x) < 0$ ratkaisu on $–9 < x < –4$.

Vastaus: $–9 < x < –4$

325. Sijoitetaan epäyhtälöön $f(x) > g(x)$ funktioiden $f(x) = x^2 + x - 6$ ja $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$ lausekkeet.

$x^2 + x - 6 > 2x^2 - 2x - 4$

Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.
$-x^2 + 3x - 2 > 0$

Lasketaan merkkikaaviota varten funktion $h(x) = -x^2 + 3x - 2$ nollakohdat yhtälöstä $-x^2 + 3x - 2 = 0$.

Sijoitetaan $a = -1$, $b = 3$ ja $c = -2$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

Nollakohdat ovat siis $x = \frac{-3-1}{-2} = 2$ ja $x = \frac{-3+1}{-2} = 1$.

Määritetään funktion h arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio. (Vaihtoehtoisesti merkkikaavion merkit voi päätellä funktion h kuvaajan avulla. Funktion kuvaajana on alaspäin aukeavan paraabeli, jonka arvot ovat positiivisia nollakohtien välissä ja negatiivisia välin ulkopuolella.)

		1		2	
$h(x)$	$-$	|	$+$	|	$-$

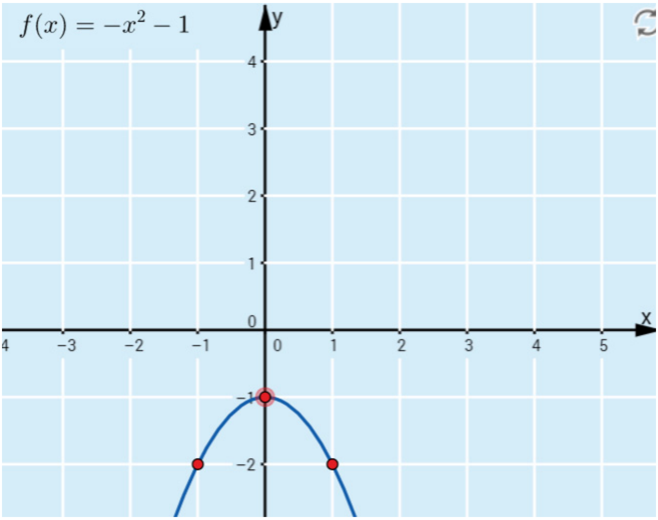
$h(0) = -0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$
$h(1{,}5) = -1{,}5^2 + 3 \cdot 1{,}5 - 2 = 0{,}25 > 0$
$h(3) = -3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = -2 < 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö $f(x) > g(x)$ toteutuu, kun $1 < x < 2$.

Vastaus: $1 < x < 2$

326. **a)** Paraabelin määrittämiseksi tarvitaan 3 pistettä. Asetetaan pisteet siten, että jokainen kolmesta paraabelin tunnetusta pisteestä ovat kaikki x-akselin alapuolella ja keskimmäisen y-koordinaatti on suurempi kuin kahden reunimmaisen. Lisäksi kaksi reunimmaista ovat x-koordinaatin suhteen yhtä kaukana keskimmäisestä pisteestä ja reunimmaisten y-koordinaatit ovat yhtä suuret. Tällöin paraabeli kulkee koko ajan x-akselin alapuolella, sillä keskimmäinen piste asettuu paraabelin huipuksi ja kaksi muuta määräävät aukeamissuunnan alaspäin.

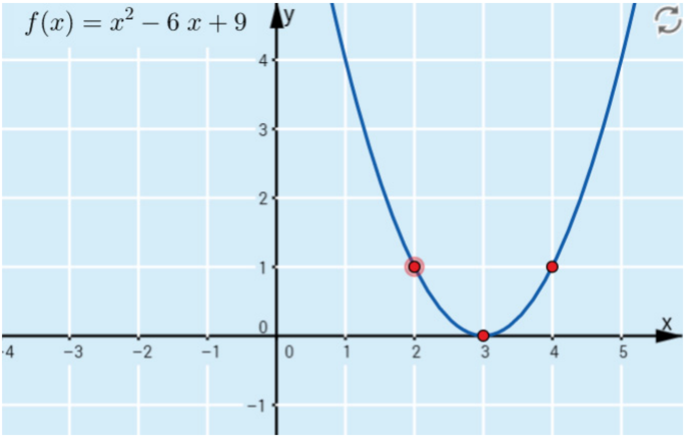
Saadaan esimerkiksi funktio $f(x) = -x^2 - 1$.



Vastaus: esim. $f(x) = -x^2 - 1$

b) Tehdään kuten a-kohdassa, mutta valitaan keskimmäiseksi pisteeksi (3, 0) ja kaksi muuta pistettä x-akselin yläpuolelta, x-koordinaatin suhteen yhtä kaukana kohdasta $x = 3$. Näin saadaan esimerkiksi pisteet (2, 1) ja (4, 1).

Saadaan esimerkiksi funktio $f(x) = x^2 - 6x + 9$.



Vastaus: esim. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

327. **a)** Määritetään tulon tekijöiden nollakohdat.
$x - 1 = 0$, kun $x = 1$.
$x - 2 = 0$, kun $x = 2$.
$x - 3 = 0$, kun $x = 3$.

Laaditaan kaikkien tulon tekijöiden kulkukaaviot allekkain, jotta epäyhtälön ratkaisu on helpompi päätellä. Jokainen tekijä on yksinään ensimmäisen asteen polynomifunktio ja kunkin kuvaajana on nouseva suora. Näin ollen jokaisen tekijän merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi nollakohdan kohdalla.

	1	2	3	
$x - 1$ –		+	+	+
$x - 2$ –		–	+	+
$x - 3$ –		–	–	+

Kulkukaaviosta havaitaan, että tekijöistä pariton määrä on negatiivisia, kun $x < 1$ tai $2 < x < 3$, joten epäyhtälön $(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$ ratkaisu on $x < 1$ tai $2 < x < 3$.

Vastaus: $x < 1$ tai $2 < x < 3$

b) Määritetään tulon tekijöiden nollakohdat.

$$\begin{aligned} 3x-2&=0\\ 3x&=2\\ x&=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$-x^2+4x+5=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot 5}}{2\cdot(-1)}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{-2}$$

$$x=\frac{-4\pm 6}{-2}$$

Nollakohdat ovat $x=\frac{-4-6}{-2}=5$ ja $x=\frac{-4+6}{-2}=-1$.

Laaditaan tulon tekijöiden kulkukaaviot allekkain, jotta epäyhtälön ratkaisu on helpompi päätellä.
Ensimmäisen asteen tekijän lauseke on nousevan suoran lauseke, joten se saa negatiivisia arvoja nollakohtansa vasemmalla puolella ja positiivisia oikealla puolella.
Toisen asteen tekijän lauseketta voidaan kuvata alaspäin aukeavalla paraabelilla, joka saa positiivisia arvoja nollakohtiensa välillä ja negatiivisa muutoin.

	-1	$\frac{2}{3}$	5	
$3x-2$	–	–	+	+
$-x^2+4x+5$	–	+	+	–
$(3x-2)(-x^2+4x+5)$	+	–	+	–

Kulkukaaviosta havaitaan, että epäyhtälön $(3x-2)(-x^2+4x+5)\geq 0$ ratkaisu on $x\leq -1$ tai $\frac{2}{3}\leq x\leq 5$.

Vastaus: $x\leq -1$ tai $\frac{2}{3}\leq x\leq 5$

328. Ratkaistaan epäyhtälö $2{,}1 \cdot 0{,}996^x < 1{,}5$ ohjelmalla.

1	Ratkaise(2.1*0.996^x<1.5)
	≈ $\{x > 83.95\}$

Ratkaisuksi saadaan $x > 83{,}95$, joten akun varaus alittaa 1,5 ampeerituntia noin 84 tunnin kuluttua lataamisen lopettamisesta.

Vastaus: $2{,}1 \cdot 0{,}996^x < 1{,}5$; 84 h

329. **a)** Taulukoidaan annetut havaintoarvot ja muodostetaan taulukoiden avulla eksponentiaaliset mallit ohjelmalla.

Vuosia vuodesta 2015	Karhuja
0	1450
1	1720

Malliksi saadaan $y = 1450 \cdot 1{,}186^x$.

Vuosia vuodesta 2015	Karhuja
0	1590
1	1720

Malliksi saadaan $y = 1590 \cdot 1{,}082^x$.

Vuosia vuodesta 2015	Karhuja
0	1450
1	1840

Malliksi saadaan $y = 1450 \cdot 1{,}269^x$.

Vuosia vuodesta 2015	Karhuja
0	1590
1	1840

Malliksi saadaan $y = 1590 \cdot 1{,}157^x$.

Vastaus: $y = 1450 \cdot 1{,}186^x$, $y = 1590 \cdot 1{,}082^x$, $y = 1450 \cdot 1{,}269^x$ ja $y = 1590 \cdot 1{,}157^x$

b) Muodostetaan epäyhtälöt ja ratkaistaan ohjelmalla, milloin Suomessa on yli 4000 karhua.

$$1450 \cdot 1{,}186...^x > 4000$$
$$x > 5{,}942...$$

Ensimmäisen mallin mukaan karhuja on yli 4000 noin vuonna $2015 + 5{,}942... \approx 2021$.

$$1590 \cdot 1{,}0817...^x > 4000$$
$$x > 11{,}738...$$

Toisen mallin mukaan karhuja on yli 4000 noin vuonna $2015 + 11{,}738... \approx 2027$.

$$1450 \cdot 1{,}2689...^x > 4000$$
$$x > 4{,}259...$$

Kolmannen mallin mukaan karhuja on yli 4000 noin vuonna $2015 + 4{,}259... \approx 2019$.

$$1590 \cdot 1{,}1572...^x > 4000$$
$$x > 6{,}317...$$

Neljännen mallin mukaan karhuja on yli 4000 noin vuonna $2015 + 6{,}317... \approx 2021$.

Vastaus: n. vuonna 2021, 2027, 2019 ja 2021

330. Ratkaistaan kaksoisepäyhtälö ohjelmalla.

1 Ratkaise[40<70*exp(-0.05*t)+22<50,t]

$\approx \{18.33 < t < 27.16\}$

Pyöristetään ratkaisu minuutin tarkkuuteen $18 < t < 27$. Ratkaisu tarkoittaa, että aikavälillä 18 min $< t <$ 27 min teen lämpötila on 40 asteen ja 50 asteen välillä

Vastaus: $18 < t < 27$, aikavälillä 18 min $< t <$ 27 min teen lämpötila on 40 ja 50 celsiusasteen välillä

331. Merkitään kysyttyä positiivista lukua kirjaimella x.
Luvun x kuutio on x^3.
Luvun x neliö on x^2.
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan se ohjelmalla.
$x^3 < x^2$

Ratkaise(x^3<x^2)

$\rightarrow \{x < 0, 0 < x < 1\}$

Näin ollen positiiviset reaaliluvut x, joiden kuutio on pienempi kuin neliö, ovat välillä $0 < x < 1$.

Vastaus: $0 < x < 1$

332. Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$x > ax + 1$$
$$x - ax - 1 > 0$$

Määritetään ohjelmalla merkkikaaviota varten funktion $f(x) = x - ax - 1$ nollakohdat yhtälöstä $x - ax - 1 = 0$.

Ratkaise(x-a*x-1=0)

$$\rightarrow \left\{ \mathbf{x} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a} - \mathbf{1}} \right\}$$

Koska epäyhtälön ratkaisun tulee olla $x > 2$, on funktion f nollakohdan oltava $x = 2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se ohjelmalla.

$$-\frac{1}{a-1} = 2$$

Ratkaise(-1/(a-1)=2, a)

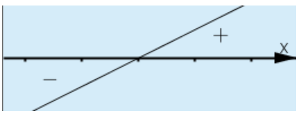
$$\rightarrow \left\{ \mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \right\}$$

Lisäksi on tarkistettava, että a:n arvolla $\frac{1}{2}$ epäyhtälön ratkaisu on $x > 2$.

Sijoitetaan a:n arvo epäyhtälöön ja tarkistetaan epäyhtälön suunta.

$$x - \frac{1}{2}x - 1 > 0$$
$$\frac{1}{2}x - 1 > 0$$

Epäyhtälön vasemmalla puolella olevan funktion kuvaaja on nouseva suora, joten funktio saa positiivisia arvoja nollakohtansa $x = 2$ oikealla puolella.



Näin ollen epäyhtälön ratkaisu on $x > 2$ a:n arvolla $\frac{1}{2}$.

Vastaus: $a = \frac{1}{2}$

3.2 Funktion kasvavuus ja vähenevyys

ALOITA PERUSTEISTA

333. Epäyhtälöstä A nähdään, että muuttujan arvo saa olla mikä tahansa lukua 4 pienempi arvo, mutta erityisesti ei luku 4. Tällaista lukuväliä vastaa hakasulkumerkintä II, joten epäyhtälö A ja hakasulkumerkintä II kuuluvat yhteen.

Epäyhtälöstä B nähdään, että muuttujan arvo saa olla mikä tahansa lukua 4 pienempi arvo ja erityisesti myös luku 4. Tällaista lukuväliä vastaa hakasulkumerkintä IV, joten epäyhtälö B ja hakasulkumerkintä IV kuuluvat yhteen.

Epäyhtälöstä C nähdään, että muuttujan arvo saa olla mikä tahansa lukua 4 suurempi arvo, mutta erityisesti ei luku 4. Tällaista lukuväliä vastaa hakasulkumerkintä I, joten epäyhtälö C ja hakasulkumerkintä I kuuluvat yhteen.

Epäyhtälöstä D nähdään, että muuttujan arvo saa olla mikä tahansa lukua 4 suurempi arvo ja erityisesti myös luku 4. Tällaista lukuväliä vastaa hakasulkumerkintä III, joten epäyhtälö D ja hakasulkumerkintä III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: IV, C: I ja D: III

334. Kulkukaavion perusteella funktion derivaatta saa positiivisia arvoja, kun $x \leq 9$. Funktio f on siis kasvava, kun $x \leq 9$ eli välillä $]-\infty, 9]$.

Vastaus: $x \leq 9$, $]-\infty, 9]$

335. Kuvaajasta nähdään, että funktion kuvaajana on alaspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on kohdassa $x = 3$. Funktio f on siis kasvava, kun $x \leq 3$ ja vähenevä, kun $x \geq 3$ eli kasvava välillä $]-\infty, 3]$ ja vähenevä välillä $[3, \infty[$.

Vastaus: kasvava, kun $x \leq 3$ eli $]-\infty, 3]$ ja vähenevä, kun $x \geq 3$ eli $[3, \infty[$

336. **a)** Kuvaajasta nähdään, että funktio on kasvava välillä [–4, 2]. Näin ollen väite on tosi.

Vastaus: tosi

b) Kuvaajasta nähdään, että funktio on kasvava välillä $[-3,1]$, joten väite on epätosi. Funktio kuvaajan mukaan näyttäisi olevan vähenevä, kun $x \leq -4$ tai $x \geq 2$.

Vastaus: epätosi, $x \leq -4$ tai $x \geq 2$

c) Kuvaajalle kohtiin $x = -4$ ja $x = 2$ piirretyt tangentit ovat vaakasuoria. Vaakasuoran suoran kulmakerroin on 0, joten funktion derivaatan arvo kohdissa $x = -4$ ja $x = 2$ ei ole negatiivinen vaan nolla. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, nolla

d) Funktio on kuvaajan mukaan vähenevä, kun $x \geq 2$, joten $f(2) > f(2,5)$ eli väite on tosi.

Vastaus: tosi

337. **a)** Täydennetään kulkukaavioon funktion kasvamista ja vähenemistä kuvaavat nuolet derivaatan merkkien avulla.

	3	8	
$f'(x)$	–	+	–
$f(x)$	↘	↗	↘

b) Täydennetään kulkukaavioon funktion kasvamista ja vähenemistä kuvaavat nuolet derivaatan merkkien avulla.

	–1	4	
$f'(x)$	+	–	–
$f(x)$	↗	↘	↘

338. **a)** Laaditaan annettujen tietojen avulla derivaatan merkkikaavio.

	−6		2	
$f'(x)$	+	–	+	

$f'(-10) = 4 > 0$
$f'(-2) = -1 < 0$
$f'(3) = 5 > 0$

Vastaus:

	−6		2
$f'(x)$	+	–	+

b) Laaditaan a-kohdan avulla funktion kulkukaavio lisäämällä kulkukaavioon funktion kasvamista ja vähenemistä kuvaavat nuolet derivaatan merkkien avulla.

	−6	2	
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

c) Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on vähenevä, kun $-6 \leq x \leq 2$.

Vastaus: $-6 \leq x \leq 2$

339. Derivaatan merkkikaaviosta A nähdään, että funktio on kasvava välillä [–1,2] ja muualla vähenevä, joten A ja III kuuluvat yhteen.

Derivaatan merkkikaaviosta B nähdään, että funktio on vähenevä välillä [–1,2] ja muualla kasvava, joten B ja I kuuluvat yhteen.

Derivaatan merkkikaaviosta C nähdään, että funktio on kasvava, kun $x \leq 2$ ja muualla vähenevä, joten C ja IV kuuluvat yhteen.

Derivaatan merkkikaaviosta D nähdään, että funktio on vähenevä, kun $x \leq 2$ ja muualla kasvava, joten D ja II kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: III, B: I, C: IV ja D: II

340. **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.
$f'(x) = 4x - 8$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} 4x - 8 &= 0 \\ 4x &= 8 \quad \|:4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio. (Vaihtoehtoisesti merkit derivaatan merkkikaavioon voi päätellä derivaatan kuvaajan avulla. Derivaattafunktion kuvaaja on nouseva suora, joka saa negatiivisia arvoja nollakohdan vasemmalla puolella ja positiivisia muulloin.)

		2
$f'(x)$	–	+

$f'(0) = 4 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$
$f'(3) = 4 \cdot 3 - 8 = 4 > 0$

Vastaus:

		2
$f'(x)$	–	+

b) Laaditaan a-kohdan avulla funktion f kulkukaavio.

		2
$f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

341. Derivoidaan funktio $f(x) = -x^2 + 8x - 12$.
$f'(x) = -2x + 8$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$-2x + 8 = 0$$
$$-2x = -8 \quad \|:(-2)$$
$$x = 4$$

Laaditaan kulkukaavio. (Vaihtoehtoisesti merkit derivaatan merkkikaavioon voi päätellä derivaatan kuvaajan avulla. Derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora, joka saa positiivisia arvoja nollakohdan vasemmalla puolella ja negatiivisia muulloin.)

	4	
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

$f'(0) = -2 \cdot 0 + 8 = 8 > 0$
$f'(5) = -2 \cdot 5 + 8 = -2 < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun $x \leq 4$ eli välillä $]-\infty, 4]$.

Vastaus: $x \leq 4$, $]-\infty, 4]$

342. Derivoidaan funktio $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
$f'(x) = 2x - 4$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \quad \| : 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

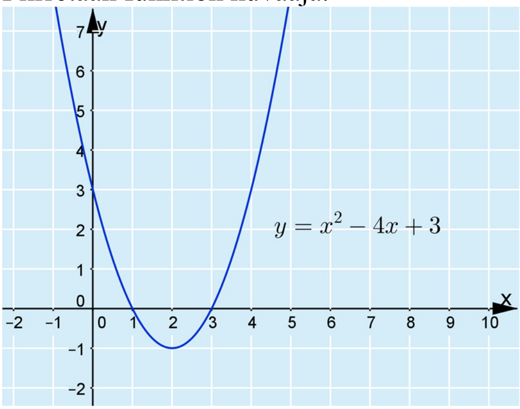
Lasketaan derivaatan f' arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan kulkukaavio. (Vaihtoehtoisesti merkit derivaatan merkkikaavioon voi päätellä derivaatan kuvaajan avulla. Derivaattafunktion kuvaaja on nouseva suora, joka saa negatiivisia arvoja nollakohdan vasemmalla puolella ja positiivisia muulloin.)

		2
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

$f'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$
$f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun $x \geq 2$ ja vähenevä, kun $x \leq 2$.

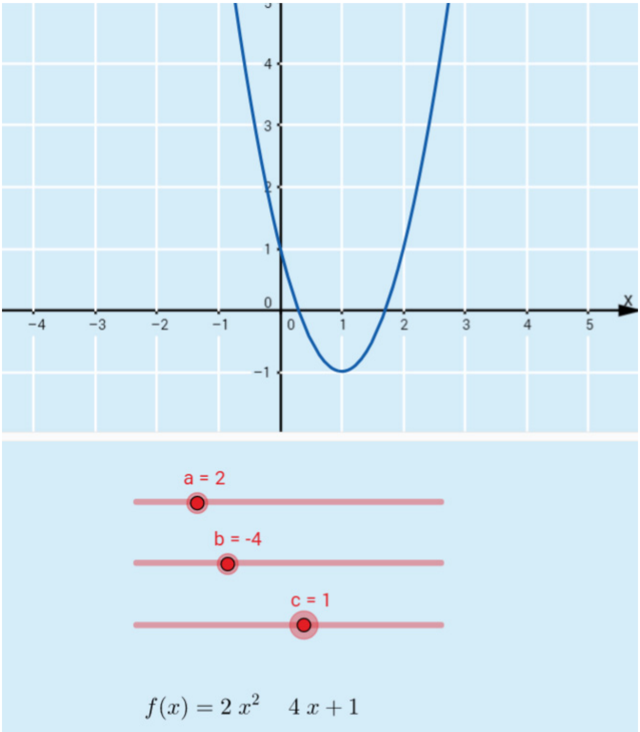
Piirretään funktion kuvaaja.



Myös kuvaajan mukaan funktio on kasvava, kun $x \geq 2$ ja vähenevä, kun $x \leq 2$.

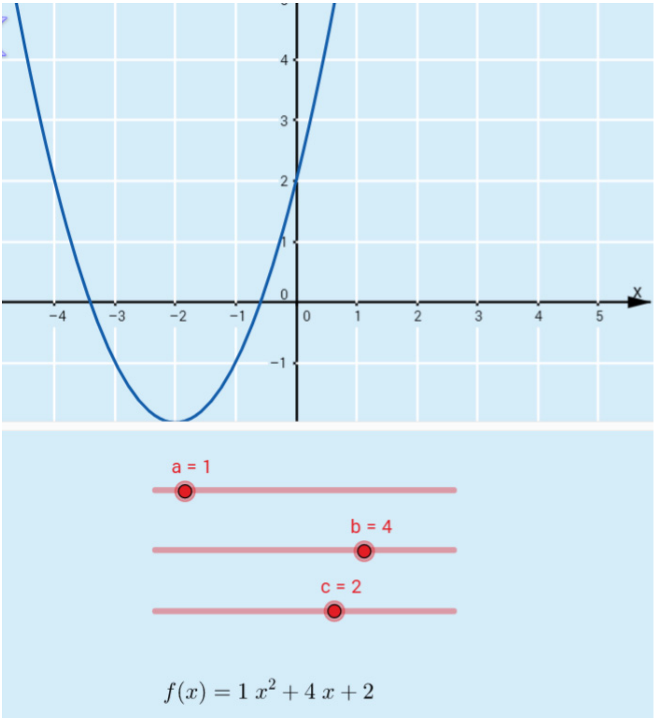
Vastaus: kasvava, kun $x \geq 2$, ja vähenevä, kun $x \leq 2$

343. **a)** Muuttamalla liukusäätimillä kertoimien a, b ja c arvoja löydetään esimerkiksi funktio $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, joka on vähenevä, kun $x \leq 1$.



Vastaus: esim. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

b) Muuttamalla liukusäätimillä kertoimien a, b ja c arvoja löydetään esimerkiksi funktio $f(x) = x^2 + 4x + 2$, jonka derivaatta on positiivinen, kun $x \geq -2$.



Vastaus: esim. $f(x) = x^2 + 4x + 2$

VAHVISTA OSAAMISTA

344. Epäyhtälömerkintä A tarkoittaa lukua 5 pienempiä lukuja kuten myös hakasulkumerkintä V, joten A ja V kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä B tarkoittaa lukua 5 ja sitä pienempiä lukuja kuten hakasulkumerkintä myös VI, joten B ja VI kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä C tarkoittaa lukua 5 suurempia lukuja kuten hakasulkumerkintä myös VII, joten C ja VII kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä D tarkoittaa lukua 5 ja sitä suurempia lukuja kuten hakasulkumerkintä myös VIII, joten D ja VIII kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä E tarkoittaa lukua 3 suurempia, mutta lukua 5 pienempiä lukuja kuten myös hakasulkumerkintä I, joten E ja I kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä F tarkoittaa lukuja, jotka ovat 3 tai sitä suurempia, mutta pienempiä tai yhtä suuria kuin 5, kuten hakasulkumerkintä II, joten F ja II kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä G tarkoittaa lukuja, jotka ovat lukua 3 suurempia, mutta pienempiä tai yhtä suuria kuin 5, kuten hakasulkumerkintä IV, joten G ja IV kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä H tarkoittaa lukuja, jotka ovat 3 tai sitä suurempia, mutta pienempiä kuin 5, kuten hakasulkumerkintä III, joten H ja III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: V, B: VI, C: VII, D: VIII, E: I, F: II, G: IV ja H: III

345. Derivaatan ominaisuus A tarkoittaa, että funktio on kasvava välillä $0 \le x \le 4$ ja vähenevä väleillä $x \le 0$ ja $x \ge 4$, joten A ja IV kuuluvat yhteen.

Derivaatan ominaisuus B tarkoittaa, että funktio on vähenevä kaikkialla, joten B ja I kuuluvat yhteen. Derivaatan ominaisuus B tarkoittaa myös, että funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen kohtaan $x = 2$ piirrettyä tangenttia lukuun ottamatta, joten B ja III kuuluvat yhteen.

Derivaatan ominaisuus C tarkoittaa, että funktio on kasvava välillä $x \le 3$ ja vähenevä välillä $x \ge 3$, joten C ja II kuuluvat yhteen. Derivaatan ominaisuus C tarkoittaa myös, että funktion muutosnopeus kohdassa $x = 3$ on nolla, joten C ja V kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV, B: I, III ja C: II, V

346. **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = -10x^2 + 7x - 3$.
$f'(x) = -20x + 7$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$$-20x + 7 = 0$$
$$-20x = -7 \quad \|:(-20)$$
$$x = \frac{7}{20}$$

Lasketaan derivaatan f' arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan kulkukaavio. (Vaihtoehtoisesti merkit derivaatan merkkikaavioon voi päätellä derivaatan kuvaajan avulla. Derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora, joka saa positiivisia arvoja nollakohdan vasemmalla puolella ja negatiivisia muulloin.)

		$\frac{7}{20}$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

$f'(0) = -20 \cdot 0 + 7 = 7 > 0$
$f'(1) = -20 \cdot 1 + 7 = -13 < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun $x \le \frac{7}{20}$ ja vähenevä, kun $x \ge \frac{7}{20}$.

Vastaus: kasvava, kun $x \le \frac{7}{20}$, vähenevä, kun $x \ge \frac{7}{20}$

b) Derivoidaan funktio $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 6$.
$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$-6x^2 + 6x + 12 = 0 \quad \|:6$
$-x^2 + x + 2 = 0$

Sijoitetaan yhtälöstä poimitut kertoimet $a = -1$, $b = 1$ ja $c = 2$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x = \frac{-1+3}{-2} = -1 \text{ tai } x = \frac{-1-3}{-2} = 2$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 2$. Koska derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, saa derivaatta positiivisia arvoja derivaatan nollakohtien välissä ja negatiivisia muulloin. (Vaihtoehtoisesti voi laskea myös derivaattafunktion arvot esimerkiksi $f'(-2) = -24$ (< 0), $f'(0) = 12$ (> 0) ja $f'(3) = -24$ (< 0).)

Laaditaan merkkikaavio.

		-1		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun $-1 \leq x \leq 2$ ja vähenevä, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 2$.

Vastaus: kasvava, kun $-1 \leq x \leq 2$, vähenevä, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 2$

347. **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = 5x^2 + 15x$.
$f'(x) = 10x + 15$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$10x + 15 = 0$$
$$10x = -15 \quad \|:10$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

Laaditaan kulkukaavio. (Vaihtoehtoisesti merkit derivaatan merkkikaavioon voi päätellä derivaatan kuvaajan avulla. Derivaattafunktion kuvaaja on nouseva suora, joka saa negatiivisia arvoja nollakohdan vasemmalla puolella ja positiivisia muulloin.)

	$-\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

$f(-2) = -5 < 0$
$f(0) = 15 > 0$

Kulkukaaviosta nähdään funktion olevan kasvava, kun $x \geq -\frac{3}{2}$.

Vastaus: $x \geq -\frac{3}{2}$

b) Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 22$.

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 18$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$3x^2 - 3x - 18 = 0 \quad \|:3$

$x^2 - x - 6 = 0$

Sijoitetaan toisen asteen yhtälöstä poimitut kertoimet $a = 1$, $b = -1$ ja $c = -6$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ tai } x = \frac{1-5}{2} = -2$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = -2$ tai $x = 3$. Koska derivaattafunktio on ylöspäin aukeava paraabeli, saa derivaatta negatiivisia arvoja derivaatan nollakohtien välissä ja positiivisia muulloin. (Vaihtoehtoisesti voi laskea myös derivaattafunktion arvot esimerkiksi $f'(-3) = 6$ (> 0), $f'(0) = -6$ (< 0) ja $f'(4) = 6$ (> 0).)

Laaditaan kulkukaavio.

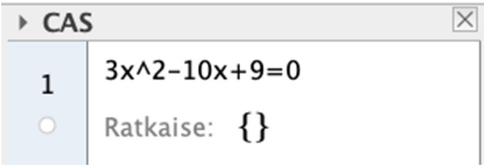
	–2	3	
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Kulkukaaviosta nähdään funktion olevan kasvava, kun $x \leq -2$ tai $x \geq 3$.

Vastaus: $x \leq -2$ tai $x \geq 3$

348. **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 7$.
$f'(x) = 3x^2 - 10x + 9$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$3x^2 - 10x + 9 = 0$
Ratkaistaan yhtälö ohjelman avulla.



Havaitaan, ettei yhtälöllä ole ratkaisuja eli derivaatalla ei ole nollakohtia.

Lasketaan derivaatan f' arvo jollakin muuttujan x arvolla.
$f'(0) = 9 > 0$
Laaditaan kulkukaavio. (Vaihtoehtoisesti voi todeta, että funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia. Täten funktion arvot ovat aina positiivisia.)

$f'(x)$	$+$
$f(x)$	↗

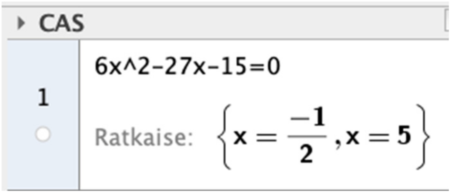
Vastaus:

$f'(x)$	$+$
$f(x)$	↗

b) Derivoidaan funktio $f(x) = 2x^3 - \frac{27}{2}x^2 - 15x + 1$.

$f'(x) = 6x^2 - 27x - 15$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$6x^2 - 27x - 15 = 0$
Ratkaistaan yhtälö ohjelman avulla.



Ratkaisuksi saadaan $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 5$.

Huomataan, että derivaatan nollakohta $x = 5$ ei kuulu tarkasteluvälille [–2, 0].

Laaditaan kulkukaavio.
Lasketaan ohjelman avulla derivaatan f' arvot nollakohdan ja tarkasteltavan välin päätepisteiden rajaamissa lukusuoran väleissä.
$f'(-1) = 18 > 0$
$f'(-0{,}25) = -7{,}875 < 0$

	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(x)$	+	–	
$f(x)$	↗	↘	

Vastaus:

	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(x)$	+	–	
$f(x)$	↗	↘	

349. Derivaattafunktio A on laskeva suora, joka ylittää x-akselin kohdassa $x = 0$. Derivaattafunktion arvot ovat positiivisia nollakohdan vasemmalla puolella ja negatiivisia sen oikealla puolella. Derivaattafunktiota vastaava funktio on kasvava kohdan $x = 0$ vasemmalla puolella ja vähenevä sen jälkeen. Tällainen funktio on funktio IV.

Derivaattafunktio B on nouseva suora, joka ylittää x-akselin kohdassa $x = -1$. Derivaattafunktion arvot ovat negatiivisia nollakohdan vasemmalla puolella ja positiivisia sen oikealla puolella. Derivaattafunktiota vastaava funktio on siten vähenevä kohdan $x = -1$ vasemmalla puolella ja kasvava sen jälkeen. Tällainen funktio on funktio II.

Derivaattafunktio C on vaakasuora suora, jonka yhtälö on $y = 2$. Derivaattafunktion kaikki arvot ovat siis positiivisia, joten derivaattafunktiota vastaava funktio on aina kasvava. Tällainen funktio on funktio I.

Derivaattafunktio D on ylöspäin aukeava paraabeli, joka ylittää x-akselin kohdissa $x = -1$ ja $x = 0$. Derivaattafunktion arvot ovat negatiivisia nollakohtien välissä ja positiivisia muulloin. Derivaattafunktiota vastaava funktio on siten kasvava kohtaan $x = -1$ saakka, vähenevä välillä $-1 < x < 0$ ja kasvava siitä eteenpäin. Tällainen funktio on funktio III.

Vastaus: A: IV, B: II, C: I ja D: III

350. **a)** Derivaatan kuvaajasta huomataan, että derivaatan arvot ovat suurempia kuin nolla, kun $x < 1$ tai $x > 4$ ja nolla kun $x = 1$ tai $x = 4$, joten funktio on kasvava, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 4$.

Huomataan, että derivaatan arvot pienempiä kuin nolla, kun $1 < x < 4$ ja nolla kun $x = 1$ tai $x = 4$, joten funktio on vähenevä, kun $1 \leq x \leq 4$.

Vastaus: kasvava, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 4$, ja vähenevä, kun $1 \leq x \leq 4$

b) Derivaatan kuvaajasta huomataan, että derivaatan arvot ovat suurempia kuin nolla, kun $x > 3$ ja tasan 0, kun $x = 3$, joten funktio on kasvava, kun $x \geq 3$.

Huomataan, että derivaatan arvot pienempiä kuin nolla, kun $x < 3$ ja tasan 0, kun $x = 3$, joten funktio on vähenevä, kun kun $x \leq 3$.

Vastaus: kasvava, kun $x \geq 3$, ja vähenevä, kun $x \leq 3$

351. **a)** Derivoidaan ja lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = 4$ ohjelmalla.

f(x) := −0.45417x^6+16.738x^5−250.15x^4+1933.8x^3−8128.9x^2 + 17578.9x−15249

$$\rightarrow f(x) := -\frac{45417}{100000}x^6+\frac{8369}{500}x^5-\frac{5003}{20}x^4+\frac{9669}{5}x^3-\frac{81289}{10}x^2+\frac{175789}{10}x-15249$$

f'(4)

$$\rightarrow -\frac{213003}{6250}$$

$2

$$\approx -34.08$$

$f'(4) \approx -34$

Koska derivaatta ilmaisee funktion muutosnopeutta, tulos tarkoittaa käytännössä, että huhtikuun alussa mehiläisten määrä vähenee nopeudella 34 000 mehiläistä/kuukausi.

Vastaus: $f(4) = -34$, huhtikuun alussa mehiläisten määrä vähenee nopeudella 34 000 mehiläistä/kk

b) Määritetään ohjelman avulla derivaatan f' nollakohdat ja arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan kulkukaavio.

RatkaiseNumeerisesti(f'(x)=0)

$\approx \{x = 3.32, x = 4.42, x = 6.43, x = 8.01, x = 8.53\}$

f'(3.1)

$\approx$ **71.1**

f'(4)

$\approx$ **−34.08**

f'(5)

$\approx$ **40.46**

f'(7)

$\approx$ **−22.62**

f'(8.2)

$\approx$ **5.61**

f'(8.6)

$\approx$ **−5.44**

Pyöristetään derivaatan nollakohdat yhden desimaalin tarkkuuteen.

	3 – 3,3	3,3 – 4,4	4,4 – 6,4	6,4 – 8,0	8,0 – 8,5	8,5 – 9
$f'(x)$	+	–	+	–	+	–
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Kulkukaaviosta havaitaan, että funktio on kasvava, kun $3 \le x \le 3{,}3$ tai $4{,}4 \le x \le 6{,}4$ tai $8{,}0 \le x \le 8{,}5$ ja vähenevä, kun $3{,}3 \le x \le 4{,}4$ tai $6{,}4 \le x \le 8{,}0$ tai $x \ge 8{,}5$. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että mehiläisten määrä kasvaa maaliskuun alussa, huhtikuun puolestavälistä kesäkuun puoleenväliin ja elokuun alkupuolen ajan. Muulloin mehiläisten määrä vähenee.

Vastaus: Funktio f on kasvava, kun $3 \le x \le 3{,}3$ tai $4{,}4 \le x \le 6{,}4$ tai $8{,}0 \le x \le 8{,}5$, ja vähenevä, kun $3{,}3 \le x \le 4{,}4$ tai $6{,}4 \le x \le 8{,}0$ tai $x \ge 8{,}5$. Mehiläisten määrä kasvaa maaliskuun alussa, huhtikuun puolestavälistä kesäkuun puoleenväliin ja elokuun alkupuolen ajan. Muulloin mehiläisten määrä vähenee.

352. Määritetään funktion $f(t) = -5t^2 + 4t + 10$ nollakohdat ohjelmalla.

Nollakohdat ovat $t = -1{,}069\ldots \approx -1{,}1$ ja $t = 1{,}869\ldots \approx 1{,}9$. Jälkimmäinen nollakohta tarkoittaa, että hyppääjä putoaa veteen noin 1,9 sekunnin kuluttua ponnistuksesta.

Derivoidaan funktio f.
$f'(t) = -10t + 4$

Määritellään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$-10t + 4 = 0$
$-10t = -4 \quad ||:(-8)$
$t = 0{,}4$

Derivaatan nollakohta on $t = 0{,}4$.

Lasketaan derivaatan f' arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan kulkukaavio. (Vaihtoehtoisesti merkit derivaatan merkkikaavioon voi päätellä derivaatan kuvaajan avulla. Derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora, joka saa positiivisia arvoja nollakohdan vasemmalla puolella ja negatiivisia muulloin.)

$f'(0{,}1) = -10 \cdot 0{,}1 + 4 = 3 > 0$
$f'(1) = -10 \cdot 1 + 4 = -6 < 0$

		0,4
$f'(t)$	+	–
$f(t)$	↗	↘

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun $t \leq 0{,}4$ ja vähenevä, kun $t \geq 0{,}4$.

a) Ennen veteen osumistaan uimahyppääjä nousee ylöspäin 0,4 s.

Vastaus: 0,4 s

b) Ennen veteen osumistaan uimahyppääjä putoaa alaspäin 1,9 s – 0,4 s= 1,5 s.

Vastaus: 1,5 s

353. $f(x) = 0{,}00012x^2 - 0{,}50095x + 746$

a) Derivoidaan funktio.

$f'(x) = 0{,}00024x - 0{,}50095$

Lasketaan $f'(1000) = -0{,}26095 \approx -0{,}261$.

Vastaus: $f'(1000) = -0{,}261$

b) Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$0{,}00024x - 0{,}50095 = 0$$
$$0{,}00024x = 0{,}50095 \quad \|: 0{,}00024$$
$$x = 2087{,}291\ldots$$
$$x \approx 2087$$

Lasketaan derivaatan f' arvot ohjelman avulla nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan kulkukaavio välillä [0, 4200].

	0 — 2087	2087 — 4200
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

$f'(1) = -0{,}50071 < 0$

$f'(3000) = 0{,}21905 > 0$

Vastaus:

	0 — 2087	2087 — 4200
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

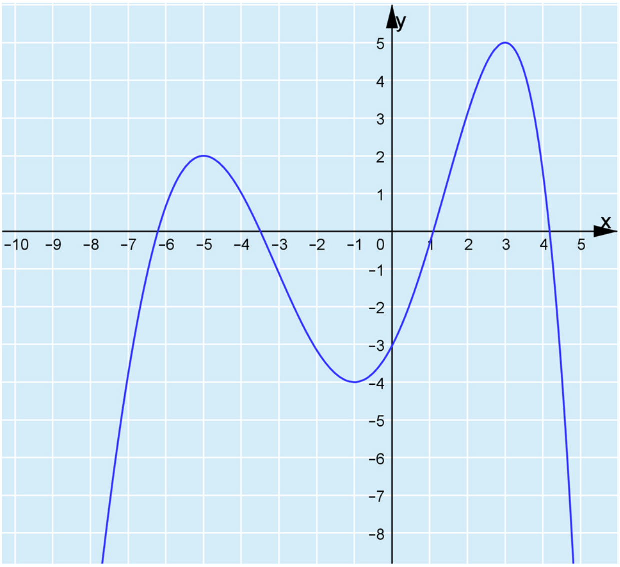
c) Kohdan a tulos tarkoittaa, että 1000 jalan etäisyydellä sillan päästä tukivaijeri laskeutuu 0,261 jalkaa jokaista vaakasuuntaista jalkaa kohden. Kohdan b tulos tarkoittaa, että tukivaijeri laskeutuu välillä $0 \le x \le 2087$ ja nousee välillä $2087 \le x \le 4200$

Vastaus: 1000 jalan etäisyydellä sillan päästä tukivaijeri laskeutuu 0,261 jalkaa jokaista vaakasuuntaista jalkaa kohden. Tukivaijeri laskeutuu välillä $0 \le x \le 2087$ ja nousee välillä $2087 \le x \le 4200$.

354. Havaitaan, että, kun funktio g vähenee, funktio f saa negatiivisia arvoja. Kun funktio g kasvaa, funktio f saa positiivisia arvoja. Näin ollen funktio f on funktion g derivaattafunktio.

Vastaus: Funktio f on funktion g derivaattafunktio.

355. Tietojen $f(–5) = 2$, $f(–1) = –4$ ja $f(3) = 5$ perusteella tiedetään, että funktion kuvaaja kulkee pisteiden $(–5, 2)$, $(–1, –4)$ ja $(3, 5)$ kautta. Kulkukaavion avulla nähdään milloin funktio kasvaa ja milloin vähenee. Funktion kuvaaja voi olla esimerkiksi seuraava.



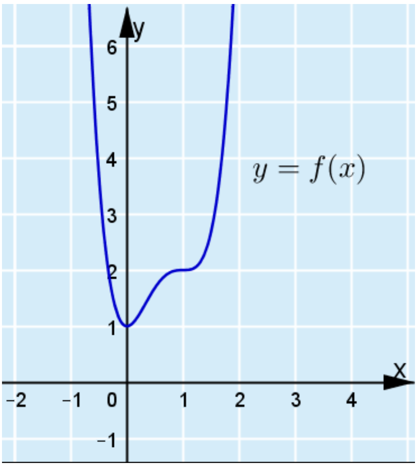
356. Laaditaan funktion kulkukaavio kuvaajan hahmotelman pohjaksi.

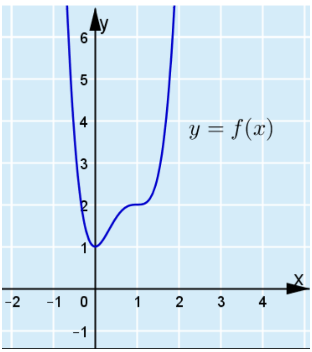
		0	1
$f'(x)$	–	+	+
$f(x)$	↘	↗	↗

Kuvaaja siis vaihtaa kulkusuuntaa vain kohdassa $x = 0$.
Lisäksi tiedetään, että $f'(0) = f'(1) = 0$ eli funktiolla on terassikohta kohdassa $x = 1$.

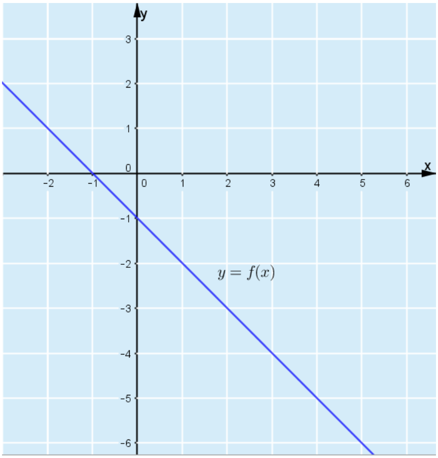
Tiedetään, että $f(0) = 1$ ja $f(1) = 2$.

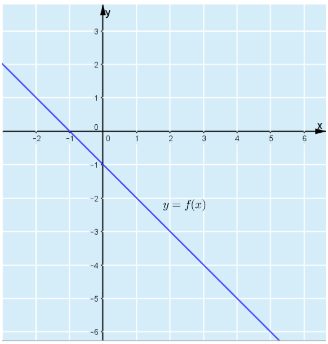
Hahmotellaan kuvaaja tietoihin sopiva kuvaaja.



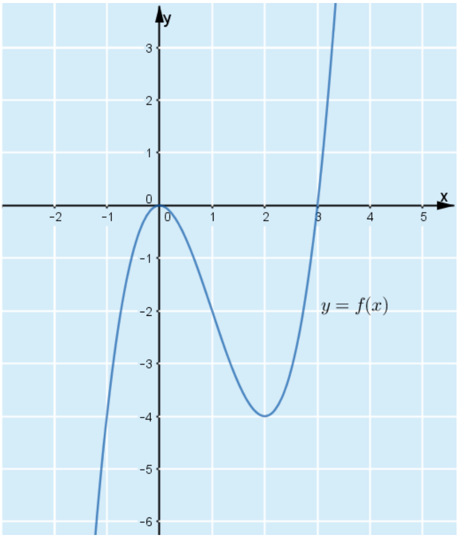
Vastaus: esim. 

357. **a)** Funktion arvon tulee olle negatiivinen välillä [0, 5] eli kuvaajan tulee kulkea x-akselin alapuolella tällä välillä. Väheneväksi funktioksi kelpaa esimerkiksi laskeva suora. Funktioksi kelpaa esimerkiksi $f(x) = -x - 1$.

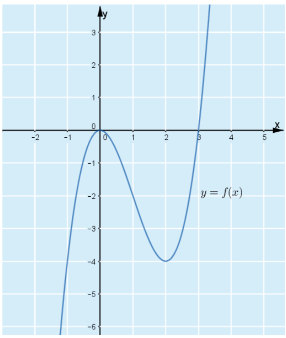


Vastaus: esim. 

b) Funktion tulee kääntyä kasvavastaväheneväksi ja vähenevästä kasvavaksi eli funktion tulee muuttaa kulkusuuntaa vähintään kahdesti, koska funktiolla on derivaatan nollakohdat kohdissa $x = 0$ ja $x = 2$. Hahmotellaan ehtoihin sopiva kuvaaja.



Esimerkiksi funktio $f(x) = -x^3 - 3x^2$.

Vastaus: esim. 

c) Väitteen perusteella funktion tulisi olla kasvava välillä [1, 9] ja funktiolla tulisi päteä ehto $f(1) > f(9)$. Ehto on ristiriidassa kasvavuuden kanssa, joten kuvaajan piirtäminen on mahdotonta.

Vastaus: mahdoton

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

358. **a)** Jos funktio on vähenevä, mikä tahansa muuttujan arvoa 0,011 suurempi muuttujan arvo vastaa funktion arvoa $f(0{,}011)$ pienempää funktion arvoa.
Tutkitaan funktion vähenevyyttä kulkukaavion avulla.
Derivoidaan funktio.
$f'(x) = -210x^{41}$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$-210x^{41} = 0 \quad \| :(-210)$$
$$x^{41} = 0$$
$$x = 0$$

Derivaatan nollakohta on $x = 0$.
Laaditaan kulkukaavio.
$f'(-1) = 210$
$f'(1) = -210$

	0	
$f'(x)$	+	–
$f(x)$	↗	↘

Kulkukaaviosta havaitaan, että funktio on vähenevä, kun $x \geq 0$, joten nollaa suuremmilla muuttujan arvoilla pätee ”mitä suurempi muuttujan arvo, sitä pienempi funktion arvo”. Väite on siis totta, koska funktion on vähenevä välillä [0,011; 0,1], jolle molemmat tarkasteltavat muuttujan arvot kuuluvat.

Vastaus: –

b) Muodostetaan funktion kulkukaavio ja päätellään ratkaisu kulkukaavion avulla.
$f'(x) = x^2 - 8x + 12$

Ratkaistaan ohjelmalla derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
Derivaatan nollakohdat ovat $x = 2$ tai $x = 6$.

Lasketaan kulkukaaviota varten derivaatan arvot derivaatan nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä.
$f'(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 12 = 12 > 0$
$f'(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 12 = -3 < 0$
$f'(7) = 7^2 - 8 \cdot 7 + 12 = 5 > 0$

Laaditaan kulkukaavio.

	2	6	
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Koska funktio on vähenevä välillä [2, 6] ja 3 < 4, funktion arvoista $f(3) > f(4)$.
$f(3)$ on suurempi.

Vastaus: $f(3)$

359. Tutkitaan funktion kulkua kulkukaavion avulla.
Derivoidaan funktio $f(x) = 3x^5 + x^3 + 4x$.
$f'(x) = 15x^4 + 3x^2 + 4$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat ohjelmalla yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$15x^4 + 3x^2 + 4 = 0$
Havaitaan, että yhtälöllä ei ole ratkaisuja eli derivaatalla ei ole nollakohtia.

Lasketaan derivaatan arvo jollakin muuttujan arvolla.
$f'(0) = 15 \cdot 0^4 + 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 > 0$
Laaditaan kulkukaavio.

$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

Kulkukaavion perusteella funktio on kasvava kaikkialla.

Vastaus: –

360. $f(x) = x^3 + x^2 + 0{,}05x - 1$ on polynomifunktio.
Jos polynomifunktion arvoista $f(0)$ ja $f(1)$ toinen on negatiivinen ja toinen positiivinen, on polynomifunktiolla oltava *ainakin* yksi nollakohta välillä $[0, 1]$. Lasketaan funktion arvot $f(0)$ ja $f(1)$.

$f(0) = 0^3 + 0^2 + 0{,}05 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$
$f(1) = 1^3 + 1^2 + 0{,}05 \cdot 1 - 1 = 1{,}05 > 0$

Siis polynomifunktiolla f on *ainakin* yksi nollakohta välillä $[0, 1]$.

Tutkitaan funktion kulkua kulkukaavion avulla.

Derivoidaan funktio.
$f'(x) = 3x^2 + 2x + 0{,}05$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat ohjelmalla yhtälöstä $f'(x) = 0$.
Derivaatan nollakohdat ovat
$x \approx -0{,}026$ tai $x \approx -0{,}641$.

Laaditaan kulkukaavio välillä $[0, 1]$. Kumpikaan derivaatan nollakohdista ei ole välillä $[0 ,1]$, joten lasketaan derivaatan arvo jollakin muuttujan arvolla annetulla välillä funktion kulun tutkimiseksi.
$f'(0{,}5) = 3 \cdot 0{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}5 + 0{,}05 = 1{,}8 > 0$

	0 ... 1
$f'(x)$	+
$f(x)$	↗

Kulkukaavion perusteella funktio ei muuta kulkuaan välillä $[0, 1]$, joten polynomifunktiolla f voi leikata x-akselin korkeintaan kerran eli sillä on *korkeintaan* yksi nollakohta välillä $[0, 1]$

Koska polynomifunktiolla f on *ainakin* yksi ja *korkeintaan* yksi nollakohta välillä $[0, 1]$, on sillä *täsmälleen* yksi nollakohta välillä $[0, 1]$.

Vastaus: –

361. **a)** Jotta funktio olisi konveksi, on funktion derivaatan oltava kasvava.
Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.
$f'(x) = 3x^2 + 4x$
Tutkitaan derivaatan kasvavuutta. Derivoidaan derivaatta eli muodostetaan toinen derivaatta.
$f''(x) = 6x + 4$

Toisen derivaatan kuvaaja on nouseva suora, joten se vaihtaa merkkiään nollakohdassa. Tällöin alkuperäinen derivaattafunktio ei ole kasvava kaikkialla, joten funktio f ei ole konveksi.

Vastaus: –

b) Jotta funktio olisi konveksi, on funktion derivaatan oltava kasvava. Derivoidaan funktio.
$g'(x) = 4x^3 + 2ax$

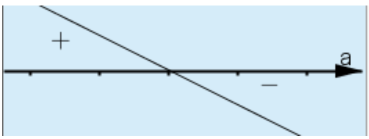
Tutkitaan derivaatan kasvavuutta. Derivoidaan derivaatta eli muodostetaan toinen derivaatta.
$g''(x) = 12x^2 + 2a$

Jotta derivaatta olisi kasvava, kaikilla muuttujan arvoilla on oltava voimassa epäyhtälö $g''(x) \geq 0$.

$12x^2 + 2a \geq 0$
Koska yhtälön vasen puoli on ylöspäin aukeava paraabeli, epäyhtälö pätee kaikilla muuttujan arvoilla, jos paraabelilla ei ole nollakohtia tai on tasan yksi nollakohta.

Nollakohtia ei ole tai niitä on tasan yksi, jos nollakohtia ratkaistaessa toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan neliöjuuren alle (eli diskriminantiksi) tulee nolla tai negatiivinen luku. Muodostetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan juuren alainen osa.
$0^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2a \leq 0$
$-96a \leq 0$

Epäyhtälön vasemmalla puolella oleva lauseke on ensimmäisen asteen polynomifunktio a:n suhteen. Tämän kuvaaja on laskeva suora. Näin ollen vasemman puolen lauseke saa negatiivisia arvoja nollakohdan oikealla puolella ja positiivisia vasemmalla puolella.

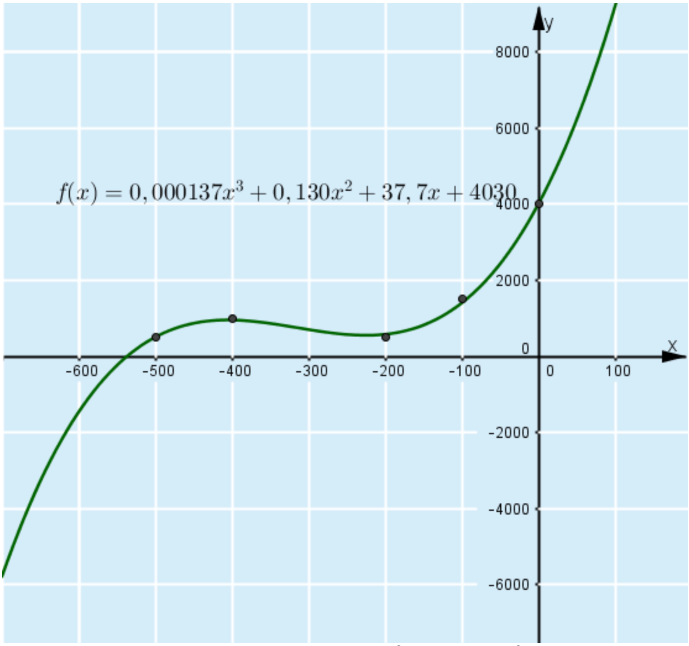


Ratkaistaan funktion nollakohta.
$-96a = 0 \quad \|:(-96)$
$a = 0$

Näin ollen funktio g on konveksi, kun $a \geq 0$.

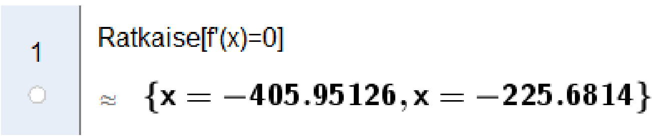
Vastaus: $a \geq 0$

362. Kopioidaan taulukko ohjelmaan ja sovitetaan aineistoon kolmannen asteen polynomifunktio.



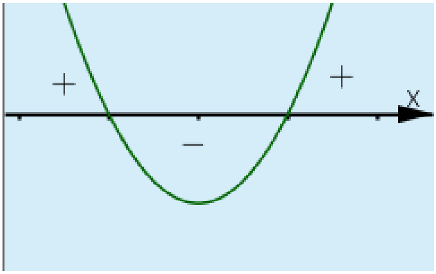
Saadaan funktio $f(x) = 0{,}000137x^3 + 0{,}130x^2 + 37{,}7x + 4030$.

Määritetään derivaatan nollakohdat ohjelmalla yhtälöstä $f'(x) = 0$.



Pyöristetään derivaatan nollakohdat kokonaisluvuiksi kulkukaaviota varten.

Koska derivaattafunktio on ylöspäin aukeava paraabeli, saa derivaattafunktio negatiivisia arvoja nollakohtien välissä ja positiivisia muulloin.



Laaditaan kulkukaavio.

	–406	–226	
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Kulkukaavion perusteella lajien määrä väheni 226–406 miljoonaa vuotta sitten ja kasvoi muulloin.

Vastaus: $f(x) = 0{,}000137x^3 + 0{,}130x^2 + 37{,}7x + 4030$

	–406	–226	
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Väheni 226–406 miljoonaa vuotta sitten, kasvoi muulloin.

363. **a)** Toisen asteen polynomifunktion derivaatta on ensimmäisen asteen polynomifunktio eli suora.

Koska paraabeli on alaspäin aukeava, funktio on kasvava huipun vasemmalla puolella ja vähenevä huipun oikealla puolella. Tällöin derivaatta saa positiivisia arvoja huippukohdan $x = 2$ vasemmalla puolella ja negatiivisia oikealla puolella. Derivaatta on siis laskeva suora, jonka nollakohta on $x = 2$.

Paraabelin yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$.
Koska huippu on pisteessä (2, 2) ja funktion nollakohta on (4, 0), on symmetrian perusteella toinen nollakohta (0, 0) eli $c = 0$. Sijoitetaan kaksi muuta pistettä paraabelin yhtälöön ja muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 4a+2b=2 \\ 16a+4b=0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari ohjelmalla.

1

Ratkaise[{4a+2b=2,16a+4b=0}, {a,b}]

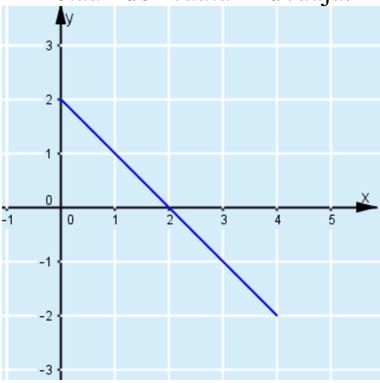
$$\rightarrow \left\{\left\{\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{b} = \mathbf{2}\right\}\right\}$$

Paraabeli on siis

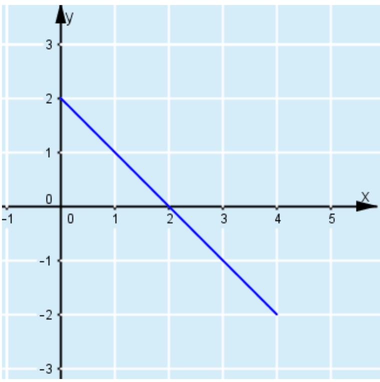
$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$
$$f'(x) = -x + 2$$

Piirretään derivaatan kuvaaja.



Vastaus:



b) Jos derivaatta on suora, on funktion oltava toisen asteen polynomifunktio eli kuvaaja on paraabeli.

Koska derivaatta on nouseva suora, saa derivaatta nollakohtansa vasemmalla puolella negatiivisia arvoja ja oikealla positiivisia. Näin ollen funktion on oltava derivaatan nollakohdan $x=-\frac{1}{2}$ vasemmalla puolella vähenevä ja oikealla kasvava. Siis funktio on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on kohdassa $x=-\frac{1}{2}$.
Lisäksi tiedetään, että derivaatta saa arvon 1 kohdassa $x = 0$, joten funktiolle asetetun tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 0$ on 1.

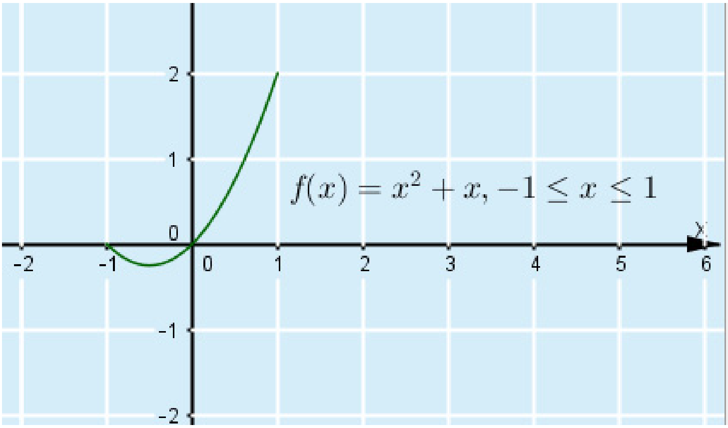
Nyt siis tiedetään, että
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$

$f'(0) = b = 1$
Ja edelleen tiedetään, että
$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=2a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$$

Ratkaistaan a.
$$\begin{aligned}-a+1&=0\\ -a&=-1 \quad \|:(-1)\\ a&=1\end{aligned}$$

Koska funktiolle ei ole ainoatakaan tunnettua pistettä, funktion vakiotermistä ei voida sanoa mitään. Näin ollen ylöspäin aukeavan paraabelin voi piirtää mille korkeudelle tahansa.

Valitaan esimerkiksi $c = 0$ ja piirretään funktion $f(x) = x^2 + x$ kuvaaja välillä $[–1, 1]$.



Vastaus: esim.