# 2 DERIVAATTAFUNKTIO

## 2.1 Derivointi

### ALOITA PERUSTEISTA

**201.** **a)** Koska D$b$ = 0, kun $b$ on vakio, niin D3 = 0.

Vastaus: 0

**b)** Koska D$b$ = 0, kun $b$ on vakio, niin D(−3) = 0.

Vastaus: 0

**c)** Koska D($kx$) = $k$, kun $k$ on vakio, niin D(3$x$) = 3.

Vastaus: 3

**202.** Lauseke $2x$ on muotoa $kx$, joten lauseke A ja sääntö II kuuluvat yhteen.

Lauseke $x^2$ on muotoa $x^n$, joten lauseke B ja sääntö III kuuluvat yhteen.

Lauseke 7 on muotoa $b$, joten lauseke C ja sääntö I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III ja C: I

**203.** **a)** $D(3x^2) = 3 \cdot Dx^2 = 3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$.

Vastaus: $6x$

**b)** $D(5x) = 5$.

Vastaus: 5

**c)** $D(-5x^{10}) = -5 \cdot Dx^{10} = -5 \cdot 10x^{10-1} = -50x^9$

Vastaus: $-50x^9$

**204.** **a)** Koska $f(x) = 3$, niin $f'(x) = 0$.

Vastaus: $f'(x) = 0$

**b)** Koska $f(x) = 41x^2$, niin $f'(x) = 41 \cdot 2x^{2-1} = 82x$.

Vastaus: $f'(x) = 82x$

**c)** Koska $f(x) = -x$, niin $f'(x) = -1$.

Vastaus: $f'(x) = -1$

**205.** **a)** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x+7) = 4+0 = 4$

Vastaus: 4

**b)** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+9x) = 2x^{2-1}+9 = 2x+9$

Vastaus: $2x + 9$

**c)** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-3) = 1-0 = 1$

Vastaus: 1

**206.** **a)** Koska $f(x) = -x^3 + 1 = -1x^3 + 1$, niin $f'(x) = -1 \cdot 3x^{3-1} = -3x^2$.

Ohjelma antaa saman tuloksen.

Derivaatta(-x^3+1)

$\rightarrow \quad -3\,x^2$

Vastaus: $f'(x) = -3x^2$

**b)** Derivoidaan funktio $g(x) = 4x^2 - 6x$.
$g'(x) = 4 \cdot 2x^{2-1} - 6 = 8x - 6$

Ohjelma antaa saman tuloksen.

Derivaatta(4x^2-6x)

$\rightarrow$ **8 x − 6**

Vastaus: $g'(x) = 8x - 6$

**c)** Derivoidaan funktio $h(t) = 3t^6 + t - 8 = 3t^6 + 1t - 8$ muuttujan $t$ suhteen.
$f'(t) = 3 \cdot 6t^{6-1} + 1 + 0 = 18t^5 + 1$

Ohjelma antaa saman tuloksen.

Derivaatta(3t^6+t-8)

$\rightarrow$ **$18\,t^5 + 1$**

Vastaus: $h'(t) = 18t^5 + 1$

**207.** Lausekkeen $3x^2 - 1$ derivaatta on

$$\begin{aligned} D(3x^2 - 1) &= 3 \cdot 2x^{2-1} + 0 \\ &= 6x, \end{aligned}$$

joten lauseke A ja derivaatta IV kuuluvat yhteen.

Lausekkeen $x + 4 = 1x + 4$ derivaatta on $1 + 0 = 1$, joten lauseke B ja derivaatta I kuuluvat yhteen.

Lausekkeen $-7$ derivaatta on $D(-7) = 0$, joten lauseke C ja derivaatta V kuuluvat yhteen.

Lausekkeen $4x - 5x^3 + 1$ derivaatta on
$4 - 5 \cdot 3x^{3-1} + 0 = 4 - 15x^2 = -15x^2 + 4$,
joten lauseke D ja derivaatta II kuuluvat yhteen.

Lausekkeen $5x^3 - 4x$ derivaatta on

$$\begin{aligned} D(5x^3 - 4x) &= 5 \cdot 3x^{3-1} - 4 \\ &= 15x^2 - 4, \end{aligned}$$

joten lauseke E ja derivaatta III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV, B: I, C: V, D: II ja E: III

**208.** **a)** Sievennetään funktion $g$ lauseke.
$x(x + 3) = x \cdot x + x \cdot 3 = x^2 + 3x$

Vastaus: $x^2 + 3x$

**b)** Määritetään $g'(x)$.
$g'(x) = 2x^{2-1} + 3 = 2x + 3$

Vastaus: $g'(x) = 2x + 3$

**209.** **a)** Sievennetään lauseke.
$11x - 7x^2 + 9 + 2x = -7x^2 + 13x + 9$

Derivoidaan lauseke.
$-7 \cdot 2x + 13 + 0 = -14x + 13$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla:

11x-7x^2+9+2x

$\rightarrow \ -7x^2 + 13x + 9$

Derivaatta(-7 x² + 13x + 9)

$\rightarrow \ -14x + 13$

Vastaus: $-7x^2 + 13x + 9$, $-14x + 13$

**b)** Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}(4x-2)(x-x^3) &= 4x \cdot x + 4x \cdot (-x^3) + (-2) \cdot x + (-2) \cdot (-x^3) \\ &= 4x^2 - 4x^4 - 2x + 2x^3 \\ &= -4x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x\end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke.

$-4 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 2 = -16x^3 + 6x^2 + 8x - 2$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla:

Sievennä((4x-2)(x-x^3))

$\rightarrow \ -4x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x$

Derivaatta(-4 x⁴ + 2x³ + 4x² - 2x)

$\rightarrow \ -16x^3 + 6x^2 + 8x - 2$

Vastaus: $-4x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x$, $-16x^3 + 6x^2 + 8x - 2$

**c)** Sievennetään lauseke.

$$
\begin{aligned}
(x-2)^2 &= (x-2)(x-2) \\
&= x\cdot x + x\cdot(-2) - 2\cdot x - 2\cdot(-2) \\
&= x^2 - 2x - 2x + 4 \\
&= x^2 - 4x + 4
\end{aligned}
$$

Derivoidaan lauseke.
$2x - 4 + 0 = 2x - 4$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Sievennä((x-2)^2)

$\rightarrow\ \mathbf{x^2 - 4\,x + 4}$

Derivaatta(x² - 4x + 4)

$\rightarrow\ \mathbf{2\,x - 4}$

Vastaus: $x^2 - 4x + 4$, $2x - 4$

**210.** **a)** Sievennetään funktion lauseke.

$f(x) = x - (3x - 2) = x - 3x + 2 = -2x + 2$

Derivoidaan funktio.

$f'(x) = -2 + 0 = -2$

Vastaus: $f'(x) = -2$

**b)** Sievennetään funktion lauseke.

$$\begin{aligned} g(x) &= (5 + x)(1 - 4x) \\ &= 5 \cdot 1 + 5 \cdot (-4x) + x \cdot 1 + x \cdot (-4x) \\ &= 5 - 20x + x - 4x^2 \\ &= -4x^2 - 19x + 5 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio.

$g'(x) = -4 \cdot 2x - 19 + 0 = -8x - 19$

Vastaus: $g'(x) = -8x - 19$

**c)** Sievennetään funktion lauseke.

$$\begin{aligned} h(x) &= (2x + 1)^2 \\ &= (2x + 1)(2x + 1) \\ &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot 1 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 1 \\ &= 4x^2 + 2x + 2x + 1 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio:

$h'(x) = 4 \cdot 2x + 4 + 0 = 8x + 4$

Vastaus: $h'(x) = 8x + 4$

## VAHVISTA OSAAMISTA

**211.** **a)** Polynomifunktion derivaatan asteluku on derivointisäännöstä $\mathrm{D}x^n = n \cdot x^{n-1}$ johtuen yhtä pienempi kuin derivoitavan funktion. Funktion asteluku on 3, joten derivaatan asteluku on $3 - 1 = 2$.

Vastaus: 2

**b)** Funktion asteluku on 5, joten derivaatan asteluku on $5 - 1 = 4$.

Vastaus: 4

**c)** Ensimmäisen asteen polynomifunktion lauseke on muotoa $f(x) = kx + b$, jossa $k$ ja $b$ ovat vakioita. Derivaattafunktio on tällöin $f'(x) = k + 0 = k$ eli vakiofunktio. Vakiofunktion asteluku on 0. Derivaatan asteluku on siis 0.

Vastaus: 0

**212.** **a)** Sievennetään lauseke.
$-5x(x^2 - 4) = -5x \cdot x^2 - 5x \cdot (-4) = -5x^3 + 20x$

Derivoidaan lauseke.
$-5 \cdot 3x^{3-1} + 20 = -15x^2 + 20$

Vastaus: $-15x^2 + 20$

**b)** Sievennetään lauseke.

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 1)(x^2 - 1) &= x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot (-1) + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot (-1) \\
&= x^4 - x^2 + x^2 - 1 \\
&= x^4 - 1
\end{aligned}
$$

Derivoidaan lauseke.
$4x^{4-1} + 0 = 4x^3$

Vastaus: $4x^3$

**c)** Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}3x^2 - (x+2)^2 &= 3x^2 - (x+2)(x+2)\\ &= 3x^2 - (x \cdot x + x \cdot 2 + 2 \cdot x + 2 \cdot 2)\\ &= 3x^2 - (x^2 + 2x + 2x + 4)\\ &= 3x^2 - (x^2 + 4x + 4)\\ &= 3x^2 - x^2 - 4x - 4\\ &= 2x^2 - 4x - 4\end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke.

$2 \cdot 2x - 4 + 0 = 4x - 4$

Vastaus: $4x - 4$

**213.** **a)** Sievennetään lauseke.

$(-2x + 4) \cdot (-6x) = -2x \cdot (-6x) + 4 \cdot (-6x) = 12x^2 - 24x$

Derivoidaan lauseke.

$12 \cdot 2x - 24 = 24x - 24$

Vastaus: $24x - 24$

**b)** Sievennetään lauseke.

$$\frac{9x+15}{3} = \frac{9x}{3} + \frac{15}{3} = 3x + 5$$

Derivoidaan lauseke.

$D(3x + 5) = 3 + 0 = 3$

Vastaus: 3

**c)** Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}(-x^3 - 4)^2 &= (-x^3 - 4)(-x^3 - 4)\\ &= -x^3 \cdot (-x^3) - x^3 \cdot (-4) - 4 \cdot (-x^3) - 4 \cdot (-4)\\ &= x^6 + 4x^3 + 4x^{3+}16\\ &= x^6 + 8x^{3+}16\end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke.

$6x^{6-1} + 8 \cdot 3x^{3-1} + 0 = 6x^5 + 24x^2$

Vastaus: $6x^5 + 24x^2$

**214.** **a)** Derivoidaan lauseke.
$D(3{,}4x^2 - 1{,}7x + 11{,}8)$
$= 3{,}4 \cdot 2x^{2-1} - 1{,}7 + 0$
$= 6{,}8x - 1{,}7$

Vastaus: $6{,}8x - 1{,}7$

**b)** Derivoidaan lauseke.
$D(-0{,}07x^6 + 0{,}02x^5 + 8{,}1x^2)$
$= -0{,}07 \cdot 6x^{6-1+} 0{,}02 \cdot 5x^{5-1} + 8{,}1 \cdot 2x^{2-1}$
$= -0{,}42x^5 + 0{,}1x^4 + 16{,}2x$

Vastaus: $-0{,}42x^5 + 0{,}1x^4 + 16{,}2x$

**215.** **a)** Derivoidaan lauseke.
$D(6x^5 + 4x^3 + 3x^2 + x)$
$= 6 \cdot 5x^4 + 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + 1$
$= 30x^4 + 12x^2 + 6x + 1$

Vastaus: $30x^4 + 12x^2 + 6x + 1$

**b)** Derivoidaan lauseke.
$$D\left(\frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7\right)$$
$$= \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4}x^3 + \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x^2 - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x + 0$$
$$= 3x^3 + 4x^2 - x$$

Vastaus: $3x^3 + 4x^2 - x$

**c)** Derivoidaan lauseke.
$$\frac{1}{3} \cdot 7x^6 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{7}{3}x^6 + \frac{1}{2}$$

Vastaus: $\frac{7}{3}x^6 + \frac{1}{2}$

**216.** **a)** Derivoidaan funktio $f(t) = t^2 - 5t$ muuttujan $t$ suhteen.
$f'(t) = 2t - 5$

Vastaus: $f'(t) = 2t - 5$

**b)** Derivoidaan funktio $f(y) = -y^4 + 3y$ muuttujan $y$ suhteen.
$f'(y) = -4y^3 + 3$

Vastaus: $f'(y) = -4y^3 + 3$

**c)** Derivoidaan funktio $f(a) = 0{,}5a^2 - 9$ muuttujansa $a$ suhteen.
$f'(a) = 0{,}5 \cdot 2a + 0 = a$

Vastaus: $f'(a) = a$

**217.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = x^7 - 9x^6 + 8x - 1$.
$f'(x) = 7x^{7-1} - 9 \cdot 6x^{6-1} + 8 + 0 = 7x^6 - 54x^5 + 8$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Derivaatta(x^7-9x^6+8x-1)

$\rightarrow$ $\mathbf{7\,x^6 - 54\,x^5 + 8}$

Vastaus: $f'(x) = 7x^6 - 54x^5 + 8$

**b)** Sievennetään funktion lauseke.

$$\begin{aligned} g(z) &= (z^3 - 5z^2)(-7z+2) \\ &= z^3 \cdot (-7z) + z^3 \cdot 2 - 5z^2 \cdot (-7z) - 5z^2 \cdot 2 \\ &= -7z^4 + 2z^3 + 35z^3 - 10z^2 \\ &= -7z^4 + 37z^3 - 10z^2 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio muuttujan $z$ suhteen.

$$g'(z) = -7 \cdot 4z^{4-1} + 37 \cdot 3z^{3-1} - 10 \cdot 2z^{2-1} = -28z^3 + 111z^2 - 20z$$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

PoistaSulkeet((z^3-5z^2)(-7z+2))

$\rightarrow \ -7\,z^4 + 37\,z^3 - 10\,z^2$

Derivaatta(-7 z⁴ + 37z³ - 10z²)

$\rightarrow \ -28\,z^3 + 111\,z^2 - 20\,z$

Vastaus: $g'(z) = -28z^3 + 111z^2 - 20z$

**218.** Lausekkeen $6(x-2) = 6x - 12$ derivaatta on $D(6x - 12) = 6$, joten lausekkeen A derivaatta on lauseke D.

Lausekkeen $12(3x^2 - 4x + 2) = 36x^2 - 48x + 24$ derivaatta on $72x - 48$. Mikään muu lauseke ei ole ensimmäisen asteen polynomi, joten lausekkeelle B ei ole derivaattaa.

Lausekkeen $4(x-2)^3$ derivaatta on $12(x-2)^3$. Mikään muu lauseke ei ole lausekkeen C derivaatta.

1 Derivaatta$\left(4(x-2)^3\right)$

$\rightarrow$ $\mathbf{12(x-2)^2}$

Lausekkeen $x^2(x+1)(5x+3)$ derivaatta on $20x^3 + 24x^2 + 6x$. Mikään muu lauseke ei ole lausekkeen E derivaatta.

1 Derivaatta$\left(x^2(x+1)(5x+3)\right)$

$\rightarrow$ $\mathbf{5x^2(x+1) + x^2(5x+3) + 2x(x+1)(5x+3)}$

2 PoistaSulkeet$\left(5x^2(x+1) + x^2(5x+3) + 2x(x+1)(5x+3)\right)$

$\rightarrow$ $\mathbf{20x^3 + 24x^2 + 6x}$

Lausekkeen $(x-2)^4$ derivaatta on $4(x-2)^3$. Lausekkeen F derivaatta on lauseke C.

1 Derivaatta$\left((x-2)^4\right)$

$\rightarrow$ $\mathbf{4(x-2)^3}$

Lausekkeen $x^3(x+1)^2$ derivaatta on $5x^4 + 8x^3 + 3x^2$, joka on sama kuin lausekkeen E sievennetty muotoa. Lausekkeen G derivaatta on lauseke E.

| | |
|---|---|
| 1 | Derivaatta$\left(x^3\ (x+1)^2\right)$<br>$\rightarrow\ \mathbf{3\,x^2\,(x+1)^2 + 2\,x^3\,(x+1)}$ |
| 2 | PoistaSulkeet$\left(3x^2\ (x\ +\ 1)^2\ +\ 2x^3\ (x\ +\ 1)\right)$<br>$\rightarrow\ \mathbf{5\,x^4 + 8\,x^3 + 3\,x^2}$ |
| 3 | PoistaSulkeet$\left(x^2(x+1)(5x+3)\right)$<br>$\rightarrow\ \mathbf{5\,x^4 + 8\,x^3 + 3\,x^2}$ |

Lausekkeen $12x(x^2 - 2x + 2)$ derivaatta on $36\,x^2 - 48x + 24$, joka on sama kuin lausekkeen B sievennetty muotoa. Lausekkeen H derivaatta on lauseke B.

| | |
|---|---|
| 1 | Derivaatta$\left(12\,x\ (x^2 - 2\,x + 2)\right)$<br>$\rightarrow\ \mathbf{12\ (x^2 - 2\,x + 2) + 12\,x\ (2\,x - 2)}$ |
| 2 | PoistaSulkeet$\left(12\ (x^2\ -\ 2x\ +\ 2)\ +\ 12x\ (2x\ -\ 2)\right)$<br>$\rightarrow\ \mathbf{36\,x^2 - 48\,x + 24}$ |
| 3 | PoistaSulkeet$\left(12(3x^2\ - 4x + 2)\right)$<br>$\rightarrow\ \mathbf{36\,x^2 - 48\,x + 24}$ |

Vastaus: A ja D, F ja C, H ja B, G ja E

**219.** **a)** Jos funktion kuvaaja on suora, niin funktio on ensimmäisen asteen polynomifunktio ja muotoa $f(x) = kx + b$. Tällöin derivaattafunktion $f'(x) = k$ asteluku on 0, ja sen kuvaaja on vaakasuora suora.

Vastaus: epätosi, vaakasuora suora

**b)** Jos derivoitava polynomifunktio ei ole vakiofunktio, niin sen asteluku on yhtä suurempi kuin derivaattafunktion. Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, suurempi

**c)** Esimerkiksi funktiolla $f(x) = 5x$ ja $g(x) = 5x + 1$ on sama derivaattafunktio: $f'(x) = 5 = g'(x)$. Väite on siis tosi.

Vastaus: tosi

**220.** Sami derivoi tulon tekijät $-2x$ ja $5x - 3$ erikseen ja kertoi saamansa derivaatat keskenään. Tällainen laskusääntö ei kuitenkaan ole voimassa. Ennen derivoimista lauseke on sievennettävä.

Lilja sievensi lausekkeen väärin. Hän kertoi termillä $-2x$ lausekkeesta $5x - 3$ vain ensimmäisen termin. Derivointi meni kyllä oikein, mutta koska sievennys oli väärin, niin hän derivoi väärää lauseketta.

Pinja sievensi ja derivoi oikein.

Vastaus: Sami käytti tulon derivaatan laskukaavaa, joka ei ole voimassa. Lilja sievensi lausekkeen väärin ennen derivoimista. Pinjan ratkaisu on oikein.

**221.** Derivoidaan funktiot ja päätellään derivaattojen lausekkeista kuvaajien muodot.

Kohdassa A funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x$, jonka kuvaaja on nouseva suora. Kohta A ja kuvaaja III kuuluvat siis yhteen.

Kohdassa B funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ derivaattafunktio on $f'(x) = x^2$, jonka kuvaaja on paraabeli. Kohta B ja kuvaaja II kuuluvat siis yhteen.

Kohdassa C funktion $f(x) = x + 2$ derivaattafunktio on $f'(x) = 1$, jonka kuvaaja on vaakasuora suora. Kohta C ja kuvaaja I kuuluvat siis yhteen.

Vastaus: A: III, B: II ja C: I

**222.** **a)** Sievennetään funktion lauseke.
$g(t) = t^5(t - 5) = t^5 \cdot t + t^5 \cdot (-5) = t^6 - 5t^5$

Derivoidaan funktio muuttujan $t$ suhteen.
$g'(t) = 6t^5 - 5 \cdot 5t^4 = 6t^5 - 25t^4$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Sievennä(t^5(t-5))

→ $t^6 - 5\,t^5$

Derivaatta(t⁶ - 5t⁵)

→ $6\,t^5 - 25\,t^4$

Vastaus: $g'(t) = 6t^5 - 25t^4$

**b)** Sievennetään funktion lauseke.

$$\begin{aligned} f(y) &= (4y^5+1)(y^3-1) \\ &= 4y^5\cdot y^3+4y^5\cdot(-1)+1\cdot y^3+1\cdot(-1) \\ &= 4y^8-4y^5+y^3-1 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio muuttujan $y$ suhteen.

$f'(y) = 4 \cdot 8y^7 - 4 \cdot 5y^4 + 3y^2 + 0 = 32y^7 - 20y^4 + 3y^2$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Sievennä((4y^5+1)(y^3-1))

$\rightarrow \; \mathbf{4\,y^8 - 4\,y^5 + y^3 - 1}$

Derivaatta($4y^8$ - $4y^5$ + $y^3$ - 1)

$\rightarrow \; \mathbf{32\,y^7 - 20\,y^4 + 3\,y^2}$

Vastaus: $f'(y) = 32y^7 - 20y^4 + 3y^2$

**c)** Derivoidaan funktio $r(s)=\frac{1}{5}s^3-\frac{2}{5}s^2$ muuttujan $s$ suhteen.

$r'(s)=\frac{1}{5}\cdot 3s^2-\frac{2}{5}\cdot 2s=\frac{3}{5}s^2-\frac{4}{5}s$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Derivaatta((1/5)s^3-(2/5)s^2)

$\rightarrow \; \mathbf{\frac{3}{5}\,s^2 - \frac{4}{5}\,s}$

Vastaus: $r'(s)=\frac{3}{5}s^2-\frac{4}{5}s$

**223.** **a)** Kirjoitetaan funktion lauseke polynomina.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x^2+6x-9}{3} \\
&= \frac{3x^2}{3}+\frac{6x}{3}+\frac{-9}{3} \\
&= x^2+2x-3
\end{aligned}
$$

Derivoidaan funktio.
$f'(x) = 2x + 2$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Sievennä((3x^2+6x-9)/3)

$\rightarrow\ x^2 + 2x - 3$

Derivaatta(x² + 2x - 3)

$\rightarrow\ 2x + 2$

Vastaus: $f'(x) = 2x + 2$

**b)** Kirjoitetaan funktion lauseke polynomina.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4x^3+2x^2-2}{-9} \\ &= \frac{4x^3}{-9}+\frac{2x^2}{-9}+\frac{-2}{-9} \\ &= -\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{9} \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio.

$$g'(x) = -\frac{4}{\underset{3}{\cancel{9}}}\cdot\overset{1}{\cancel{3}}x^2-\frac{2}{9}\cdot 2x+0=-\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{9}x$$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

(4x^3+2x^2-2)/(-9)

$\rightarrow\ -\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{9}$

Derivaatta((-4) / 9 x³ - 2 / 9 x² + 2 / 9)

$\rightarrow\ -\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{9}x$

Vastaus: $g'(x)=-\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{9}x$

**c)** Kirjoitetaan funktion lauseke polynomina.

$$h(s)=\frac{s^8}{4}+\frac{s^4}{2}+\frac{3}{5}=\frac{1}{4}s^8+\frac{1}{2}s^4+\frac{3}{5}$$

Derivoidaan funktio.

$$h'(s)=\frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}s^7+\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}s^3+0=2s^7+2s^3$$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Derivaatta(s^8/4+s^4/2+3/5)

$\rightarrow\ 2s^7+2s^3$

Vastaus: $h'(s)=2s^7+2s^3$

**224.** **a)** Kirjoitetaan funktion lauseke polynomina.

$$f(x) = \frac{x^2+6x}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{6x}{x} = x+6$$

Derivoidaan funktio.
$f'(x) = 1$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

(x^2+6x)/x
→ $x + 6$

Derivaatta(x + 6)
→ $1$

Vastaus: $f'(x) = 1$

**b)** Kirjoitetaan funktion lauseke polynomina.

$$g(x) = \frac{8x^3+20x^2-16x}{-4x}$$
$$= \frac{8x^3}{-4x} + \frac{20x^2}{-4x} + \frac{-16x}{-4x}$$
$$= -2x^2 - 5x + 4$$

Derivoidaan funktio.
$g'(x) = -2 \cdot 2x - 5 + 0 = -4x - 5$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

(8x^3+20x^2-16x)/(-4x)
→ $-2x^2 - 5x + 4$

Derivaatta(-2 x² - 5x + 4)
→ $-4x - 5$

Vastaus: $g'(x) = -4x - 5$

**c)** Kirjoitetaan funktion lauseke polynomina.

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x^{25}+x^{20}}{10x^{10}} \\
&= \frac{x^{25}}{10x^{10}} + \frac{x^{20}}{10x^{10}} \\
&= \frac{1}{10}x^{15} + \frac{1}{10}x^{10}
\end{aligned}
$$

Derivoidaan funktio.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1}{10}\cdot 15x^{14} + \frac{1}{10}\cdot 10x^{9} \\
&= \frac{15}{10}x^{14} + x^{9} \\
&= \frac{3}{2}x^{14} + x^{9}
\end{aligned}
$$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

(x^25+x^20)/(10x^10)

$\rightarrow \frac{1}{10}x^{15} + \frac{1}{10}x^{10}$

---

Derivaatta(1 / 10 x¹⁵ + 1 / 10 x¹⁰)

$\rightarrow \frac{3}{2}x^{14} + x^{9}$

Vastaus: $h'(x) = \frac{3}{2}x^{14} + x^{9}$

**225.** **a)** Muodostetaan funktion $h$ lauseke.

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (4x - 1) + (x^2 + x) \\ &= 4x - 1 + x^2 + x \\ &= x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $h$.

$h'(x) = 2x + 5$

Vastaus: $h'(x) = 2x + 5$

**b)** Muodostetaan funktion $h$ lauseke.

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= (x^2 + x) - (4x - 1) \\ &= x^2 + x - 4x + 1 \\ &= x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $h$.

$h'(x) = 2x - 3$

Vastaus: $h'(x) = 2x - 3$

**c)** Muodostetaan funktion $h$ lauseke.

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= (4x - 1)(x^2 + x) \\ &= 4x \cdot x^2 + 4x \cdot x - 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x \\ &= 4x^3 + 4x^2 - x^2 - x \\ &= 4x^3 + 3x^2 - x \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $h$.

$h'(x) = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 1 = 12x^2 + 6x - 1$

Vastaus: $h'(x) = 12x^2 + 6x - 1$

**226.** **a)** Luku π on vakio, joten sen derivaatta on 0. Siis $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\pi = 0$.

Vastaus: 0

**b)** Luku π on vakio, joten myös luvut $-\pi^5$ ja $6^\pi$ ovat vakioita, ja niiden derivaatta on 0. Siis $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\pi^5 + 6^\pi\right) = 0$.

Vastaus: 0

**c)** Derivoidaan.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\pi x^4 + 5\pi^2 x\right) = -\pi \cdot 4x^3 + 5\pi^2 = -4\pi x^3 + 5\pi^2$$

Vastaus: $-4\pi x^3 + 5\pi^2$

**227.** Kuvan A funktio on kasvava, kun $-3 \leq x \leq 0$, ja vähenevä, kun $0 \leq x < 3$. Siten funktion derivaatta on positiivinen, kun $-3 < x < 0$, ja negatiivinen, kun $0 < x < 3$. Kuvan II derivaattafunktio täyttää nämä ehdot, joten kuvat A ja II kuuluvat yhteen.

Kuvan B funktio on vähenevä, kun $-1 \leq x \leq 3$, joten sen derivaatta on negatiivinen, kun $-1 < x < 3$. Kuvan I derivaattafunktio täyttää tämän ehdon, joten kuvat B ja I kuuluvat yhteen.

Kuvan C funktio on vähenevä, kun $-3 \leq x \leq 0$, ja kasvava, kun $0 \leq x < 3$. Siten funktion derivaatta on negatiivinen, kun $-3 < x < 0$, ja positiivinen, kun $0 < x < 3$. Kuvan III derivaattafunktio täyttää nämä ehdot, joten kuvat C ja III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: I ja C: III

## SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

**228.** Sievennetään funktion lauseke.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{7x+5}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(7x+5)^2}{2^2} \\
&= \frac{(7x+5)(7x+5)}{4} \\
&= \frac{7x\cdot 7x+7x\cdot 5+5\cdot 7x+5\cdot 5}{4} \\
&= \frac{49x^2+35x+35x+25}{4} \\
&= \frac{49x^2+70x+25}{4} \\
&= \frac{49}{4}x^2+\frac{70}{4}^{(2}x+\frac{25}{4} \\
&= \frac{49}{4}x^2+\frac{35}{2}x+\frac{25}{4}
\end{aligned}
$$

Derivoidaan funktio.

$$f'(x)=\frac{49}{\cancel{4}_{2}}\cdot \cancel{2}^{1}x+\frac{35}{2}+0=\frac{49}{2}x+\frac{35}{2}$$

Vastaus: $\frac{49}{4}x^2+\frac{35}{2}x+\frac{25}{4}$, $f'(x)=\frac{49}{2}x+\frac{35}{2}$

**229.** **a)** Esimerkiksi funktion $f(x) = 3x$ derivaatta on $f'(x) = 3$.

Vastaus: Esim. $f(x) = 3x$

**b)** Esimerkiksi funktion $f(x) = 2x^2 - x + 1$ derivaatta on $f'(x) = 4x - 1$.

Vastaus: Esim. $f(x) = 2x^2 - x + 1$

**c)** Esimerkiksi funktion $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+99$ derivaatta on

$$f'(x)=\frac{1}{\cancel{5}_1}\cdot \cancel{5}^1 x^4-\frac{1}{\cancel{4}_1}\cdot \cancel{4}^1 x^3+0=x^4-x^3.$$

Vastaus: Esim. $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+99$

**230.** Derivoidaan funktio $f(x) = 2ax^3 + bx^2$.
$f'(x) = 2a \cdot 3x^2 + b \cdot 2x = 6ax^2 + 2bx$

Derivaattafunktion on oltava $f'(x) = -12x^2 + 14x$. Muodostetaan yhtälö.

$6ax^2 + 2bx = -12x^2 + 14x$

Jotta yhtälön vasemman ja oikean puolen lausekkeet olisivat yhtä suuret riippumatta muuttujan $x$ arvosta, on toisen asteen termin kertomien oltava molemmilla puolilla keskenään samat ja ensimmäisen asteen termin kertomien oltava molemmilla puolilla keskenään samat. Muodostetaan tämän tiedon avulla yhtälöpari ja ratkaistaan siitä vakiot $a$ ja $b$.

$$\begin{cases} 6a=-12 & \|:6 \\ 2b=14 & \|:2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=7 \end{cases}$$

Vastaus: $a = -2$ ja $b = 7$

**231.** **a)** Derivoidaan lauseke tulon derivointisäännön avulla.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\left[5x^2(3x+2)\right]\\
&=\mathrm{D}\left(5x^2\right)\cdot(3x+2)+5x^2\cdot\mathrm{D}(3x+2)\\
&=5\cdot 2x\cdot(3x+2)+5x^2\cdot 3\\
&=10x(3x+2)+15x^2\\
&=30x^2+20x+15x^2\\
&=45x^2+20x
\end{aligned}$$

Tarkistetaan sieventämällä lauseke ja derivoimalla lauseke tavalliseen tapaan.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\left[5x^2(3x+2)\right]\\
&=\mathrm{D}\left(15x^3+10x^2\right)\\
&=15\cdot 3x^2+10\cdot 2x\\
&=45x^2+20x
\end{aligned}$$

Tulos ovat sama molemmilla laskutavoilla.

Vastaus: $45x^2 + 20x$

**b)** Derivoidaan lauseke tulon derivointisäännön avulla.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}[(x-2)(7-x)]\\
&=\mathrm{D}(x-2)\cdot(7-x)+(x-2)\cdot\mathrm{D}(7-x)\\
&=1\cdot(7-x)+(x-2)\cdot(-1)\\
&=7-x-x+2\\
&=-2x+9
\end{aligned}$$

Tarkistetaan sieventämällä lauseke ja derivoimalla lauseke tavalliseen tapaan.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}[(x-2)(7-x)]\\
&=\mathrm{D}\left(7x-x^2-14+2x\right)\\
&=\mathrm{D}\left(-x^2+9x-14\right)\\
&=-2x+9
\end{aligned}$$

Tulos ovat sama molemmilla laskutavoilla.

Vastaus: $-2x + 9$

**c)** Derivoidaan lauseke tulon derivointisäännön avulla.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\left[(x+3)^2\right] \\
&= \mathrm{D}[(x+3)(x+3)] \\
&= \mathrm{D}(x+3)\cdot(x+3)+(x+3)\cdot\mathrm{D}(x+3) \\
&= 1\cdot(x+3)+(x+3)\cdot 1 \\
&= x+3+x+3 \\
&= 2x+6
\end{aligned}$$

Tarkistetaan sieventämällä lauseke ja derivoimalla lauseke tavalliseen tapaan.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\left[(x+3)^2\right] \\
&= \mathrm{D}[(x+3)(x+3)] \\
&= \mathrm{D}\left(x^2+3x+3x+9\right) \\
&= \mathrm{D}\left(x^2+6x+9\right) \\
&= 2x+6
\end{aligned}$$

Tulos ovat sama molemmilla laskutavoilla.

Vastaus: $2x + 6$

**232.** **a)** Derivoidaan muuttujan $x$ suhteen. Muut kirjaimet ovat vakioita.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-3ax^4+bx^3\right) \\
&= -3a\cdot 4x^3+b\cdot 3x^2 \\
&= -12ax^3+3bx^2
\end{aligned}$$

Vastaus: $-12ax^3 + 3bx^2$

**b)** Derivoidaan muuttujan $a$ suhteen. Muut kirjaimet ovat vakioita.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(-3ax^4+bx^3\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(-3x^4a+bx^3\right) \\
&= -3x^4+0 \\
&= -3x^4
\end{aligned}$$

Vastaus: $-3x^4$

**c)** Derivoidaan muuttujan $b$ suhteen. Muut kirjaimet ovat vakioita.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(-3ax^4 + bx^3\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(-3ax^4 + x^3b\right)$$
$$= 0 + x^3$$
$$= x^3$$

Vastaus: $x^3$

**233.** **a)** Derivoidaan lauseke yhdistetyn funktion derivointisäännön avulla.

$$\mathrm{D}(3x^2 + 3)^{12}$$
$$= 12 \cdot (3x^2 + 3)^{12-1} \cdot \mathrm{D}(3x^2 + 3)$$
$$= 12(3x^2 + 3)^{11} \cdot 3 \cdot 2x$$
$$= 72x(3x^2 + 3)^{11}$$

Vastaus: $72x(3x^2 + 3)^{11}$

**b)** Derivoidaan lauseke yhdistetyn funktion derivointisäännön avulla.

$$\mathrm{D}(5x^4 + 2x - 7)^8$$
$$= 8 \cdot (5x^4 + 2x - 7)^{8-1} \cdot \mathrm{D}(5x^4 + 2x - 7)$$
$$= 8(5x^4 + 2x - 7)^7 \cdot (5 \cdot 4x^3 + 2 + 0)$$
$$= 8(5x^4 + 2x - 7)^7 (20x^3 + 2)$$

Vastaus: $8(5x^4 + 2x - 7)^7 (20x^3 + 2)$

**c)** Jos a-kohdan lauseke sievennetään, on purettava potenssi kahdentoista lausekkeen kertolaskuksi. Joka lausekkeessa on 2 termiä, joten tulossa on $2^{12} = 4096$ termiä, joista jokainen on yhden kertolaskun tulos. Jooseppi tuskin pystyy laskemaan 4096 kertolaskua virheettömästi ja yhdistämään vielä sen jälkeen kaikki samanmuotoiset termit oikein.

Kohdassa b termejä tulee $3^8 = 6561$ eli vielä enemmän kuin a-kohdassa.

Vastaus: Lausekkeesta tulee niin pitkä, että laskeminen on mahdotonta.

# 2.2 Derivaatan arvo

## ALOITA PERUSTEISTA

**234.** **a)** Koska $f(x) = x^2 + 4x$, niin $f'(x) = 2x + 4$.

Vastaus: $f'(x) = 2x + 4$

**b)** $f'(1) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$

Vastaus: $f'(1) = 6$

**235.** **a)** Koska $f(x) = x^2 - 5x + 4$, niin $f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 4 = 9 - 15 + 4 = -2$.

Vastaus: $f(3) = -2$

**b)** Derivoidaan funktio $g$.
$f'(x) = 2x - 5$

Vastaus: $f'(x) = 2x - 5$

**c)** $f'(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

Vastaus: $f'(3) = 1$

**236.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = -x^2 + 6x$.
$f'(x) = -2x + 6$

Sijoitetaan derivaattafunktion lausekkeeseen $x = 2$.
$f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$

Vastaus: $f'(2) = 2$

**b)** Derivoidaan funktio $g(x) = x^3 - 3x$.
$g'(x) = 3x^2 - 3$

Sijoitetaan derivaattafunktion lausekkeeseen $x = 2$.
$g'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = 9$

Vastaus: $g'(2) = 9$

**c)** Derivoidaan funktio $h(x) = 8x - 1$.
$h'(x) = 8$

Funktion $h$ derivaatta on 8 joka kohdassa, myös kohdassa $x = 2$.
Siis $h'(2) = 8$.

Vastaus: $h'(2) = 8$

**237.** Funktion $f$ derivaatan arvo kohdassa $x = 5$ merkitään $f'(5)$, joten ilmaisu A ja merkintä V kuuluvat yhteen.

Funktion $f$ arvo kohdassa $x = 5$ merkitään $f(5)$, joten ilmaisu B ja merkintä IV kuuluvat yhteen.

Funktion $f$ derivaattafunktio merkitään $f'(x)$, joten ilmaisu C ja merkintä I kuuluvat yhteen.

Funktion $f$ nollakohta on se muuttujan $x$ arvo, jolla $f(x) = 0$. Ilmaisu D ja merkintä III kuuluvat yhteen.

Funktion $f$ derivaatan nollakohta on se muuttujan $x$ arvo, jolla $f'(x) = 0$. Ilmaisu E ja merkintä II kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: V, B: IV, C: I, D: III ja E: II

**238.** **a)** Määritetään funktion $f(x) = x^5 - 2x^3$ derivaatan arvo kohdassa $x = 4$ sopivalla ohjelmalla.

```
f(x):=x^5-2x^3
```

$\rightarrow\ f(x) := x^5 - 2\,x^3$

```
f'(4)
```

$\rightarrow\ \mathbf{1184}$

Tulokseksi saadaan $f\,'(4) = 1184$.

Vastaus: $f\,'(4) = 1184$.

**b)** Määritetään funktion $g(x) = x^6 + 9x - 7$ derivaatta kohdassa $x = -2$ sopivalla ohjelmalla.

```
g(x):=x^6+9x-7
```

$\rightarrow\ g(x) := x^6 + 9\,x - 7$

```
g'(-2)
```

$\rightarrow\ \mathbf{-183}$

Tulokseksi saadaan $g'(-2) = -183$.

Vastaus: $g'(-2) = -183$.

**239.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = -x^2 + 3x$.
$f\,'(x) = -2x + 3$

Vastaus: $f\,'(x) = -2x + 3$

**b)** Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muuttujan $x$ arvo, jolla $f'(x) = 5$.

$$\begin{aligned} -2x+3 &= 5 \\ -2x &= 2 \qquad \| :(-2) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -1$

**c)** Tarkistetaan a- ja b-kohtien tulokset sopivalla ohjelmalla.

Derivaatta(-x^2+3x)

→ $-2\,x + 3$

Ratkaise(-2 x + 3=5)

→ $\{x = -1\}$

Vastaus: −

**240.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = -3x^2 + 12x$.
$f'(x) = -3 \cdot 2x + 12 = -6x + 12$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 0$.
$f'(0) = -6 \cdot 0 + 12 = 12$

Vastaus: $f'(0) = 12$

**b)** Määritetään derivaatan nollakohta yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} -6x+12 &= 0 \\ -6x &= -12 \qquad \| :(-6) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 2$

**241.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = 5x^2 + 9$.
$f'(x) = 5 \cdot 2x + 0 = 10x$

Vastaus: $f'(x) = 10x$

**b)** Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 30$.

$$\begin{aligned} 10x &= 30 \qquad \|:10 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 3$

**242.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 - 28x^2 + 140x + 15\,408$.
$f'(x) = 3x^2 - 28 \cdot 2x + 140 + 0 = 3x^2 - 56x + 140$

Lasketaan derivaatan arvo kohdissa $x = 2$ ja $x = 10$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 56 \cdot 2 + 140 \\ &= 3 \cdot 4 - 112 + 140 \\ &= 12 - 112 + 140 \\ &= -100 + 140 \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(10) &= 3 \cdot 10^2 - 56 \cdot 10 + 140 \\ &= 3 \cdot 100 - 560 + 140 \\ &= 300 - 560 + 140 \\ &= 440 - 560 \\ &= -120 \end{aligned}$$

Tarkistetaan tulokset sopivalla ohjelmalla.

f(x):=x^3-28x^2+140x+15408

$\rightarrow$ $f(x) := x^3 - 28x^2 + 140x + 15408$

f'(2)

$\rightarrow$ **40**

f'(10)

$\rightarrow$ **−120**

Vastaus: $f'(2) = 40$ ja $f'(10) = -120$

**b)** a-kohdan perusteella $f'(2) = 40 > 0$, joten henkilöasukkaiden määrä kasvoi helmikuun alussa nopeudella 40 asiakasta /kk.
a-kohdan perusteella $f'(10) = -120 < 0$, joten henkilöasukkaiden määrä väheni lokakuun alussa nopeudella 120 asiakasta/kk.

Vastaus: Helmikuun lopussa kasvoi nopeudella 40 asiakasta /kk, lokakuun lopussa väheni nopeudella 120 asiakasta/kk.

## VAHVISTA OSAAMISTA

**243.** **a)** Lasketaan funktion $f(x) = 2x^2 - x - 5$ arvo kohdassa $x = -3$.
$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 - (-3) - 5 = 2 \cdot 9 + 3 - 5 = 16$

Vastaus: $f(-3) = 16$

**b)** Derivoidaan funktio $f$.
$f'(x) = 2 \cdot 2x - 1 + 0 = 4x - 1$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = -3$.
$f'(-3) = 4 \cdot (-3) - 1 = -12 - 1 = -13$

Vastaus: $f'(-3) = -13$

**244.** **a)** Kuvan perusteella funktion $f$ kuvaajalle kohtaan $x = -3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $-2$. Derivaatta tarkoittaa tangentin kulmakerrointa, joten $f'(-3) = -2$. Väite on tosi.

Vastaus: tosi

**b)** Kohdat, joissa $f'(x) = 0$ ovat kohtia, joissa derivaatta eli kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on 0. Kuvassa näkyy vain yksi kohta, jossa tangentti on $x$-akselin suuntainen, $x = -2$. Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, $x = -2$

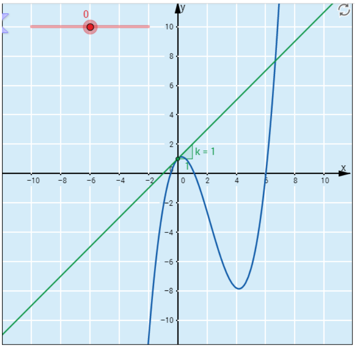
**c)** Kuvan perusteella funktion $f$ arvo kohdassa $-2$ on $-1$, joten väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, $-1$

**d)** Kuvan perusteella funktion $f$ arvo on 0, kun $x = -3$ tai $x = -1$, joten väite on tosi.

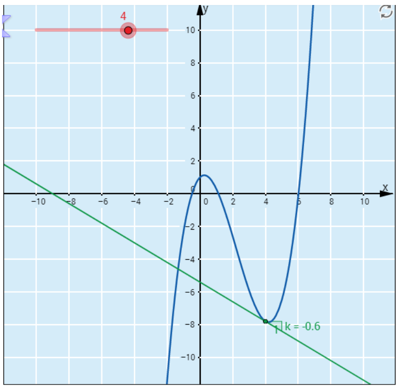
Vastaus: tosi

**245.** **a)** Appletin avulla nähdään, että $f(4) \approx -7{,}8 \neq 0$, joten väite on epätosi.



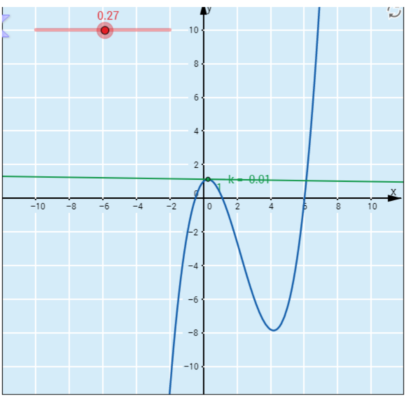

Vastaus: epätosi; $-7{,}8$

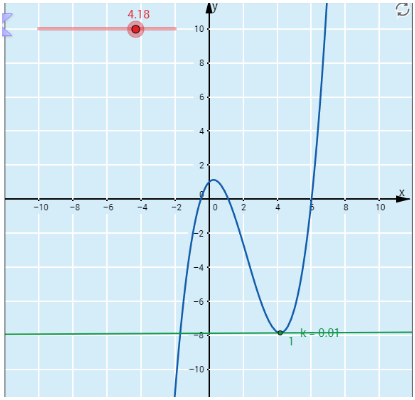
**b)** Appletin avulla nähdään, että $f\,'(4) \approx -0{,}6$. Väite on siis epätosi.




Vastaus: epätosi; $-0{,}6$

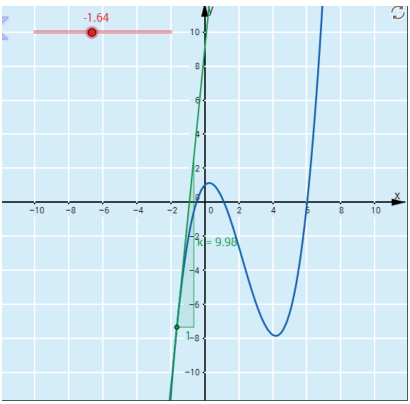
**c)** Appletin avulla nähdään, että $f'(x) = 0$, kun $x \approx 0{,}3$ tai $x \approx 4{,}2$. Väite on siis tosi.

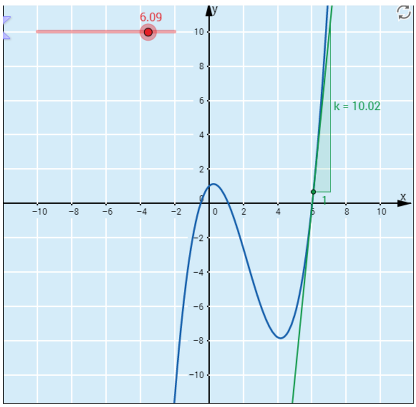





Vastaus: tosi

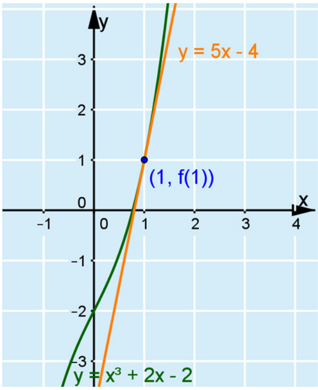
**d)** Appletin avulla nähdään, että $f'(x) = 10$, kun $x \approx -1{,}6$ tai $x \approx 6{,}1$. Väite on siis epätosi.





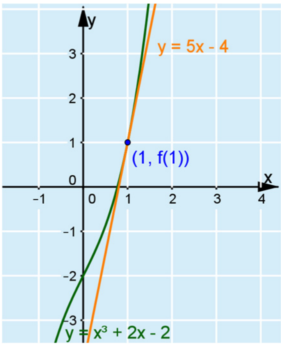

Vastaus: epätosi, $x \approx -1{,}6$ tai $x \approx 6{,}1$

**246.** **a)** Piirretään funktion $f(x) = x^3 + 2x - 2$ kuvaaja ja sille tangentti kohtaan $x = 1$.




Ohjelma antaa tangentin yhtälöksi $y = 5x - 4$. Tangentin kulmakerroin on siis $k = 5$.

Vastaus: $k = 5$




**b)** Funktion kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion $f$ derivaatta kohdassa $x = 1$. Määritetään sopivalla ohjelmalla funktion $f$ derivaatta kohdassa $x = 1$.

f(x):=x^3+2x-2

→ $f(x) := x^3 + 2x - 2$

f'(1)

→ **5**

Ohjelma antaa arvoksi 5, joten tangentin kulmakerroin on $k = 5$.

Vastaus: $k = 5$

**247.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = 2x^2 - 4x$.
$f'(x) = 2 \cdot 2x - 4 = 4x - 4$

Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 4x - 4 &= 0 \\ 4x &= 4 \quad \| :4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 1$

**b)** Derivoidaan funktio $f(x) = 8x^2 - 32$.
$f'(x) = 8 \cdot 2x + 0 = 16x$

Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 16x &= 0 \quad \| :16 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 0$

**c)** Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$.
$f'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 9 = 3x^2 + 6x - 9$

Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$.

$$3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \| :3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 4}{2}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

Vastaus: $x = 1$ tai $x = -3$

**248.** **a)** Ratkaistaan sopivalla ohjelmalla yhtälö $f'(x) = 0$.

f(x):=x^5-x^4

$\rightarrow\ f(x) := x^5 - x^4$

Ratkaise(f'(x)=0)

$\rightarrow\ \left\{x = 0, x = \frac{4}{5}\right\}$

Ratkaisuksi saadaan $x = 0$ tai $x = \frac{4}{5}$.

Vastaus: $x = 0$ tai $x = \frac{4}{5}$

**b)** Ratkaistaan sopivalla ohjelmalla yhtälö $f'(x) = 0$.

g(x):=1/7*x^7+x^3+2

$\rightarrow\ g(x) := \frac{1}{7}x^7 + x^3 + 2$

Ratkaise(g'(x)=0)

$\rightarrow\ \{x = 0\}$

Ratkaisuksi saadaan $x = 0$.

Vastaus: $x = 0$

**c)** Ratkaistaan sopivalla ohjelmalla yhtälö $h'(x) = 0$.

h(x):=2x^5+x^3+4x

$\rightarrow\ h(x) := 2x^5 + x^3 + 4x$

Ratkaise(h'(x)=0)

$\rightarrow\ \{\}$

Ohjelma antaa tulokseksi, että ratkaisua ei ole. Funktiolla $f$ ei siis ole derivaatan nollakohtia.

Vastaus: ei ole

**249.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 5x$.

$$f'(x) = -\frac{1}{\cancelto{1}{2}} \cdot \cancelto{2}{4}x^3 + 5 = -2x^3 + 5$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = -1$.

$$f'(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + 5 = -2 \cdot (-1) + 5 = 7$$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

f(x):=(-1/2)x^4+5x

$\rightarrow \ f(x) := -\frac{1}{2}x^4 + 5x$

f'(-1)

$\rightarrow \ 7$

Vastaus: $f'(-1) = 7$

**b)** Sievennetään funktion $f$ lauseke.

$$f(x) = \frac{4x-8}{2} = 2x - 4$$

Derivoidaan funktio $f$.

$f'(x) = 2$

Funktion $f$ derivaatan arvo on 2 joka kohdassa, myös kohdassa $x = -1$.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

f(x):=(4x-8)/2

$\rightarrow \ f(x) := 2x - 4$

f'(-1)

$\rightarrow \ 2$

Vastaus: $f'(-1) = 2$

**c)** Sievennetään funktion $f$ lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)^2 \\ &= (x+2)(x+2) \\ &= x\cdot x + x\cdot 2 + 2\cdot x + 2\cdot 2 \\ &= x^2 + 2x + 2x + 4 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $f$.
$f'(x) = 2x + 4$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = -1$.
$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = 2$

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

f(x):=(x+2)^2

→ $f(x) := (x+2)^2$

f'(-1)

→ **2**

Vastaus: $f'(-1) = 2$

**250.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = 3x^2 + 11x - 5$.
$f'(x) = 3 \cdot 2x + 11 + 0 = 6x + 11$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $f'(x) = 0$ avulla.

$$\begin{aligned} 6x + 11 &= 0 \\ 6x &= -11 \qquad \| :6 \\ x &= -\frac{11}{6} \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohta on $x = -\frac{11}{6}$.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

f(x):=3x^2+11x-5

$\rightarrow\ f(x) := 3x^2 + 11x - 5$

Ratkaise(f'(x)=0)

$\rightarrow\ \left\{x = -\frac{11}{6}\right\}$

Vastaus: $x = -\frac{11}{6}$.

**b)** Derivoidaan funktio $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x+7.$

$$g'(x)=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}x^2-\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x-1+0=x^2-3x-1$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $g'(x)=0$ avulla.

$$x^2-3x-1=0$$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ja $x=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$. Tulos voidaan ilmaista plusmiinus-merkin avulla muodossa $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

g(x):=(1/3)x^3-(3/2)x^2-x+7

$\rightarrow\ g(x) := \frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x+7$

---

Ratkaise(g'(x) = 0)

$\rightarrow\ \left\{x=\frac{-\sqrt{13}+3}{2}, x=\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right\}$

Vastaus: $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

**c)** Derivoidaan funktio $h(x) = -x^3 + 6x^2 - 15x$.
$h'(x) = -3x^2 + 12x - 15$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $h'(x) = 0$ avulla.

$$-3x^2 + 12x - 15 = 0 \qquad \| : 3$$

$$-x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{-2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

Negatiivisella luvulla ei ole neliöjuurta, joten yhtälöllä $f'(x) = 0$ ei ole ratkaisua. Funktiolla $h$ ei siis ole derivaatan nollakohtia.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

h(x):=-x^3+6x^2-15x

→ $h(x) := -x^3 + 6x^2 - 15x$

Ratkaise(h'(x) = 0)

→ {}

Vastaus: ei ole

**251.** **a)** Sievennetään funktion lauseke.
$f(x) = 2x(2 - 3x) = 2x \cdot 2 + 2x \cdot (-3x) = 4x - 6x^2$

Derivoidaan.
$f'(x) = 4 - 6 \cdot 2x = 4 - 12x$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 0$.

$f'(0) = 4 - 12 \cdot 0 = 4$

Derivaatan arvo kohdassa 0 on 4.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

f(x):=2x(2-3x)

$\rightarrow$ $f(x) := -6x^2 + 4x$

f'(0)

$\rightarrow$ **4**

Vastaus: $f'(0) = 4$

**b)** Määritetään derivaattafunktion nollakohta ratkaisemalla yhtälö $f'(x) = 0$.

$$4 - 12x = 0$$
$$-12x = -4 \quad \| :(-12)$$
$$x = \frac{4}{12}^{(4}$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Derivaatan nollakohta on $x = \frac{1}{3}$.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Ratkaise(f'(x)=0)

$\rightarrow \left\{ x = \frac{1}{3} \right\}$

Vastaus: $x = \frac{1}{3}$

**252.** **a)** Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 10$.

$$-3x^2 + 12x + 1 = 10$$

$$-3x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad \| : (-3)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = 1 \text{ tai } x = 3$$

Muuttujan $x$ arvot, joille $f(x) = 10$, ovat $x = 1$ ja $x = 3$.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

f(x):=-3x^2+12x+1

$\rightarrow\ f(x) := -3x^2 + 12x + 1$

---

Ratkaise(f(x)=10)

$\rightarrow\ \{x = 1, x = 3\}$

Vastaus: $x = 1$ ja $x = 3$

**b)** Derivoidaan funktio $f$.

$f'(x) = -3 \cdot 2x + 12 + 0 = -6x + 12$

Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 10$.

$$\begin{aligned} -6x + 12 &= 10 \\ -6x &= -2 \qquad \| : (-6) \\ x &= \frac{2}{6}^{(2} \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Muuttujan $x$ arvo, jolle $f'(x) = 10$, on $x = \frac{1}{3}$.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Ratkaise(f'(x)=10)

$\rightarrow \left\{ x = \frac{1}{3} \right\}$

Vastaus: $x = \frac{1}{3}$

**253.** Merkintä $f'(7)$ tarkoittaa funktion $f$ derivaattaa kohdassa $x = 7$, ja derivaatta ilmaisee funktion hetkellisen muutosnopeuden eli tässä tapauksessa tilavuuden hetkellisen muutosnopeuden. Merkintä $f'(7) = 5$ tarkoittaa siis, että tilavuuden hetkellinen muutosnopeus klo 7 on 5. Siis tilanne A ja merkintä II kuuluvat yhteen.

Merkintä $f(7)$ tarkoittaa funktion $f$ arvoa kohdassa $x = 7$ eli veden tilavuutta klo 7. Merkintä $f(7) = 5$ tarkoittaa, että veden tilavuus klo 7 on 5. Siis tilanne B ja merkintä I kuuluvat yhteen.

Derivaatta ilmaisee tangentin kulmakertoimen, joten tilanne C ja merkintä II kuuluvat yhteen.

Ilmaisu $f(5)$ tarkoittaa funktion $f$ arvoa kohdassa $x = 5$ eli veden tilavuutta klo 5. Tällöin veden tilavuuden muutos klo 5-7 saadaan lausekkeella $f(7) - f(5)$ ja niin tilavuuden keskimääräinen muutosnopeus klo 5-7 saadaan lausekkeella $\frac{f(7)-f(5)}{7-5}$. Tilanne D ja merkintä V kuuluvat yhteen.

Merkintä $f'(7)$ tarkoittaa funktion $f$ derivaattaa kohdassa $x = 7$, joten tilanne E ja merkintä II kuuluvat yhteen.

Koska veden tilavuuden muutos klo 5-7 saadaan lausekkeella $f(7) - f(5)$, niin tilanne F ja merkintä IV kuuluvat yhteen.

Jos veden määrä vähenee, tilavuuden muutosnopeus on negatiivinen. Siis tilanne G ja merkintä III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: I, C: II, D: V, E: II, F: IV ja G: III

**254.** **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = -4{,}9x^2 + 8{,}5x$.
$f'(x) = -4{,}9 \cdot 2x + 8{,}5 = -9{,}8x + 8{,}5$

Lasketaan $f'(1)$.

$f'(1) = -9{,}8 \cdot 1 + 8{,}5 = -1{,}3$

Koska derivaatta kohdassa $x = 1$ on negatiivinen, pallo putoaa sekunnin kuluttua heittämisestä maata kohti nopeudella 1,3 m/s.

Vastaus: $f'(1) = -1{,}3$, pallo putoaa alaspäin nopeudella 1,3 m/s

**b)** Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -9{,}8x + 8{,}5 &= 0 \\ -9{,}8x &= -8{,}5 \quad \|:(-9{,}8) \\ x &= 0{,}8673\ldots \\ x &\approx 0{,}87 \end{aligned}$$

Kun derivaatan arvo on 0, muutosnopeus on 0. Funktio kuvaa kappaleen paikkaa ajan funktiona. Kun paikan muutosnopeus ajan funktion on 0, tällöin kappaleen nopeus on 0, joten kappale on hetkellisesti paikallaan. Tällainen hetki on heittoliikkeessä liikeradan lakipisteessä. Ratkaisu siis kertoo, että 0,87 sekunnin kuluttua heiton lähdöstä pallo on saavuttanut lakipisteen.

Vastaus: $x \approx 0{,}87$, pallo on saavuttanut heiton lakipisteen 0,87 sekunnin kuluttua.

**255.** **a)** Nopeus on matkan muutosnopeus eli derivaatta, joten kappaleen nopeutta metreinä sekunnissa kuvaa derivaattafunktio
$f'(x) = 2 \cdot 4{,}91x = 9{,}82x$.
Lasketaan derivaattafunktion arvo, kun $x = 2$.
$f'(2) = 9{,}82 \cdot 2 = 19{,}64$
Kiven nopeus 2 sekunnin kuluttua putoamisen alusta on siis 19,64 m/s ≈ 19,6 m/s.

Vastaus: 19,6 m/s

**b)** Kappaleen nopeutta metreinä sekunnissa kuvaa derivaattafunktio
$g'(x) = 2 \cdot 1{,}87x = 3{,}74x$.
Lasketaan derivaattafunktion arvo, kun $x = 2$.
$g'(2) = 3{,}74 \cdot 2 = 7{,}48$
Kiven nopeus 2 sekunnin kuluttua putoamisen alusta on siis 7,48 m/s.

Vastaus: 7,48 m/s

**256.** **a)** Koska käyrä $y = f'(x)$ kulkee pisteen $(1, -3)$ kautta, niin $f'(1) = -3$.
Funktion $f$ hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on siis $-3$.

Vastaus: voidaan

**b)** Tehtävänannossa ei ole kerrottu mitään funktion $f$ arvoista, joten ei voida päätellä, että olisi $f(1) = -3$.

Vastaus: ei voida

**c)** Tehtävänannossa ei ole kerrottu derivaattafunktion $f'$ arvoista muualla kuin kohdassa $x = 1$, joten ei voida päätellä, että derivaattafunktion kuvaaja olisi suora.

Vastaus: ei voida

**d)** Koska käyrä $y = f'(x)$ kulkee pisteen $(1, -3)$ kautta, niin $f'(1) = -3$.
Funktion $f$ kuvaajalle kohdaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on siis $-3$.

Vastaus: voidaan

**257.** **a)** Sievennetään funktion $f(t) = (t + 1)^2 - 2t^2$ lauseke.

$$\begin{aligned} f(t) &= (t+1)^2 - 2t^2 \\ &= (t+1)(t+1) - 2t^2 \\ &= t \cdot t + t \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot 1 - 2t^2 \\ &= t^2 + t + t + 1 - 2t^2 \\ &= -t^2 + 2t + 1 \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälön $f(t) = 1$ avulla muuttujan $t$ arvo, jossa funktion $f(t) = (t + 1)^2 - 2t^2$ arvo on 1.

$$\begin{aligned} -t^2 + 2t + 1 &= 1 \\ -t^2 + 2t &= 0 \\ t &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)} \\ t &= \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{-2} \\ t &= \frac{-2 \pm 2}{-2} \\ t &= \frac{-2+2}{-2} \text{ tai } t = \frac{-2-2}{-2} \\ t &= 0 \quad\quad \text{tai } t = 2 \end{aligned}$$

Funktion $f(t) = (t + 1)^2 - 2t^2$ arvo on 1, kun $t = 0$ tai $t = 2$.

Vastaus: $t = 0$ tai $t = 2$

**b)** Funktion $f(t) = (t + 1)^2 - 2t^2$ sievennetty lauseke on a-kohdan perusteella $-t^2 + 2t + 1$. Derivoidaan funktio $f$, jossa on muuttujana $t$.
$f'(t) = -2t + 2$

Ratkaistaan yhtälön $f'(t) = 1$ avulla kohta, jossa derivaatan arvo on 1.

$$\begin{aligned} -2t + 2 &= 1 \\ -2t &= 1 - 2 \\ -2t &= -1 \quad\quad \| : (-2) \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Funktion $f$ derivaatta on 1 kohdassa $t = \frac{1}{2}$.

Vastaus: $t = \frac{1}{2}$

**258.** **a)** Funktion $f(x) = x^2 - 5$ kuvaajan pisteeseen (3, 4) piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion $f$ derivaatta kohdassa $x = 3$. Derivoidaan funktio $f$.

$f'(x) = 2x$

Lasketaan derivaatta kohdassa $x = 3$.

$f'(x) = 2 \cdot 3 = 6$

Tangentin kulmakerroin on $k = 6$.

Vastaus: $k = 6$

**b)** Tangentin yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Tiedetään, että kulmakerroin $k = 6$, ja että piste $(x, y) = (3, 4)$ on tangentilla. Sijoitetaan nämä tiedot yhtälöön $y = kx + b$ ja ratkaistaan vakiotermi $b$.

$$4 = 6 \cdot 3 + b$$
$$4 = 18 + b$$
$$b = -14$$

Tangentin yhtälö on $y = 6x - 14$.

Vastaus: $y = 6x - 14$

**259.** Käyrälle $y = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x - 3$ piirretty tangentti on $x$-akselin suuntainen, jos sen kulmakerroin on 0. Kohdat, joihin piirretyt tangentit ovat $x$-akselin suuntaisia, ovat siis derivaatan nollakohtia.

Derivoidaan funktio $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x - 3$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x^2 + 2x + 2 + 0 = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$$

Määritetään derivaatan nollakohdat ratkaisemalla yhtälö $f'(x) = 0$.

$$-\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{2}_1}\right)\cdot \cancel{2}_1}}{\cancel{2}_1\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{2}_1}\right)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-3}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-3}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{-3}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{-3} \text{ tai } x = \frac{-2 - 4}{-3}$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ tai } x = 2$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = -\frac{2}{3}$ ja $x = 2$. Niihin kohtiin kuvaajalle piirretyt tangentit ovat $x$-akselin suuntaisia.

Vastaus: $x = -\frac{2}{3}$ ja $x = 2$

**260.** Funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ kuvaajalle kohtaan $x = 4$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion $f$ derivaatta kohdassa $x = 4$.
Derivoidaan funktio $f$.
$f'(x) = -2x + 2$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = 4$.
$f'(4) = -2 \cdot 4 + 2 = -6$
Tangentin kulmakerroin on siis $k = -6$.

Tangentin yhtälön määrittämistä varten on tunnettava kulmakertoimen lisäksi yksi tangentilla oleva piste. Muuttujan arvoa $x = 4$ vastaava funktion arvo on $f(4) = -4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = -7$, joten piste $(4, -7)$ on tangentilla.

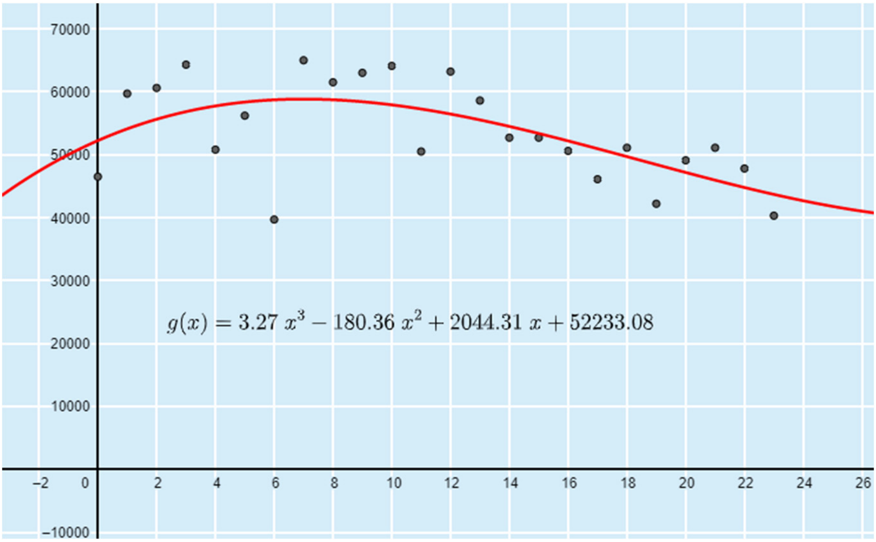
Tangentin yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Tiedetään, että kulmakerroin $k = -6$, ja että piste $(x, y) = (4, -7)$ on tangentilla. Sijoitetaan nämä tiedot yhtälöön $y = kx + b$ ja ratkaistaan vakiotermi $b$.

$$\begin{aligned} -7 &= -6 \cdot 4 + b \\ -7 &= -24 + b \\ b &= 17 \end{aligned}$$

Tangentin yhtälö on $y = -6x + 17$.

Vastaus: $y = -6x + 17$

**261.** Kopioidaan taulukko sopivaan ohjelmaan, luodaan pistelista ja sovitetaan pisteisiin 3. asteen polynomi.




Ohjelma antaa funktion $f$ lausekkeeksi
$f(x) = 3{,}27x^3 - 180{,}36x^2 + 2044{,}31x + 52233{,}08$.

Määritetään ohjelman avulla $f\,'(4)$ ja $f\,'(10)$.

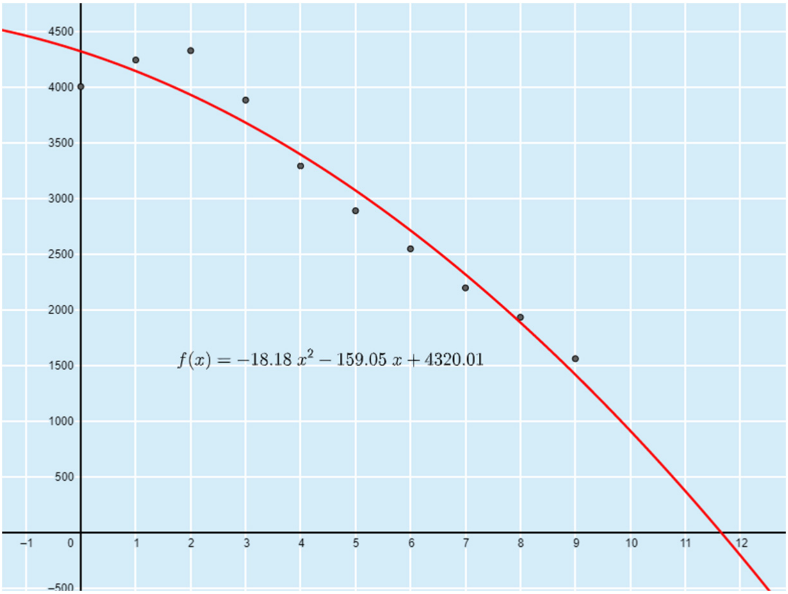
| | |
|---|---|
| 1 | f′(4) |
| | ≈ **758.63** |
| 2 | f′(10) |
| | ≈ **−580.47** |

Ohjelma antaa derivaatan arvoiksi $f\,'(4) \approx 758{,}63$ ja $f\,'(10) \approx -580{,}47$. Tämä tarkoittaa, että kun aikaa oli kulunut 4 vuotta ajanjakson alusta eli vuonna 2000, metsästettyjen kettujen määrän muutosnopeus oli mallin mukaan 758,63, eli metsästettyjen kettujen määrä kasvoi noin 760:llä vuodessa. Vastaavasti metsästettyjen kettujen määrä väheni vuonna 2006 mallin mukaan noin 580:llä.

Vastaus: $f(x) = 3{,}27x^3 - 180{,}36x^2 + 2044{,}31x + 52233{,}08$; $f\,'(4) \approx 758{,}63$ ja $f\,'(10) \approx -580{,}47$. Metsästettyjen kettujen määrä kasvoi mallin mukaan vuonna 2000 noin 760:llä ja väheni vuonna 2006 noin 580:llä.

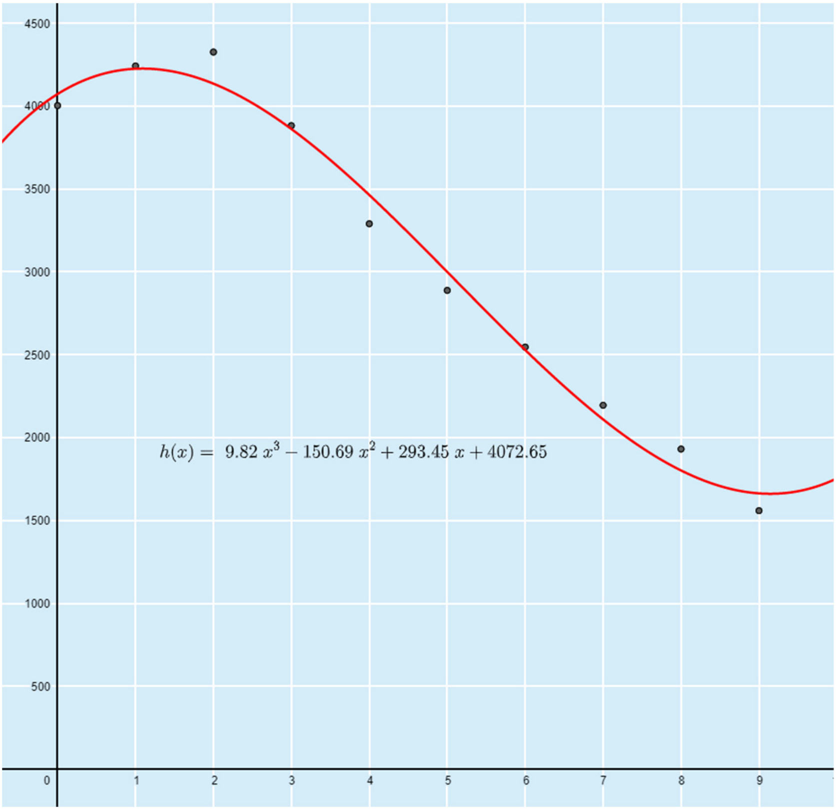
**262.** **a)** Kopioidaan taulukko sopivaan ohjelmaan ja luodaan pistelista. Jätetään huomiotta vuoden 2020 tieto, koska se ei sisällä koko vuotta.

Mallinnetaan aineistoa 2. asteen polynomifunktiolla.




Ohjelma antaa toisen asteen polynomifunktion lausekkeeksi
$f(x) = -18{,}18x^2 - 159{,}05x + 4320{,}01$.

Mallinnetaan aineistoa 3. asteen polynomifunktiolla.




Ohjelma antaa kolmannen asteen polynomifunktion lausekkeeksi $h(x) = 9{,}82x^3 - 150{,}69x^2 + 293.45x + 4072{,}65$.

Määritetään mallien mukaiset funktion derivaatat kohdissa $x = 0$, $x = 7$ ja $x = 9$, jotka vastaavat vuosia 2010, 2017 ja 2019.

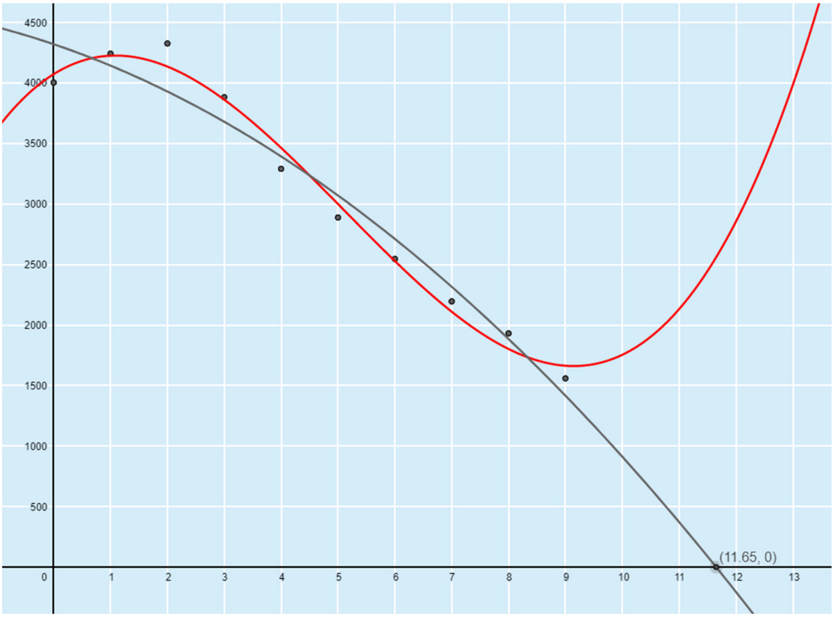
| | |
|---|---|
| 1 | $f'(0)$ <br> $\approx$ **−159.05** |
| 2 | $f'(7)$ <br> $\approx$ **−413.54** |
| 3 | $f'(9)$ <br> $\approx$ **−486.26** |
| 4 | $h'(0)$ <br> $\approx$ **293.45** |
| 5 | $h'(7)$ <br> $\approx$ **−373.3** |
| 6 | $h'(9)$ <br> $\approx$ **−33.76** |

Toisen asteen mallin mukaan derivaatat ovat $f\,'(0) \approx -159{,}05$, $f\,'(7) = -413{,}54$ ja $f\,'(9) = -486{,}26$. Lähetettyjen viestin määrä väheni mallin mukaan vuonna 2010 noin 159 miljoonalla vuodessa, vuonna 2017 noin 414 miljoonalla vuodessa ja vuonna 2019 noin 486 miljoonalla vuodessa.

Vastaavat tulokset kolmannen asteen mallin mukaan ovat $h'(0) \approx 293{,}45$, $h'(7) = -373{,}3$ ja $h'(9) = -33{,}76$. Lähetettyjen viestin määrä kasvoi mallin mukaan vuonna 2010 noin 293 miljoonalla vuodessa, määrä väheni mallin mukaan vuonna 2017 noin 373 miljoonalla ja väheni vuonna 2019 noin 34 miljoonalla.

Vastaus:
$18{,}18x^2 - 159{,}05x + 4320{,}01$ ja $9{,}82x^3 - 150{,}69x^2 + 293.45x + 4072{,}65$.
Toisen asteen polynomimallin mukaan lähetettyjen viestien määrä väheni vuonna 2010 noin 159 miljoonalla vuodessa, vuonna 2017 noin 414 miljoonalla vuodessa ja vuonna 2019 noin 486 miljoonalla vuodessa, kolmannen asteen polynomimallin mukaan määrä kasvoi vuonna 2010 noin 293 miljoonalla, väheni vuonna 2017 noin 373 miljoonalla ja väheni vuonna 2019 noin 34 miljoonalla.

**b)** Määritetään mallin mukaisten funktioiden kuvaajien ja *x*-akselin leikkauspisteet.




Toisen asteen polynomimallin mukaan leikkauspiste on (11,65; 0), joten tekstiviestien lähettäminen loppuu mallin mukaan vuonna 2021. Kolmannen asteen polynomimallin mukaan tekstiviestien määrä lähtee uuteen nousuun vuonna 2019, eikä tekstiviestien lähettäminen lopu koskaan.

Vastaus: 2. asteen polynomimallin mukaan vuonna 2021, 3. asteen polynomimallin mukaan ei lopu koskaan

## SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

**263.** Derivoidaan funktio $f(x) = 2x^2 - 3x$.
$f'(x) = 2 \cdot 2x - 3 = 4x - 3$.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = f'(x)$.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 3x &= 4x - 3 \\
2x^2 - 3x - 4x + 3 &= 0 \\
2x^2 - 7x + 3 &= 0 \\
x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \\
x &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \\
x &= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \\
x &= \frac{7 \pm 5}{4} \\
x &= \frac{7 + 5}{4} \quad \text{tai } x = \frac{7 - 5}{4} \\
x &= 3 \qquad\quad \text{tai } x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Yhtälö $f(x) = f'(x)$ toteutuu kohdissa $x = \frac{1}{2}$ ja $x = 3$.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

f(x):=2x^2-3x

$\approx\ f(x) := 2x^2 - 3x$

Ratkaise(f(x)=f'(x))

$\rightarrow\ \left\{x = \frac{1}{2}, x = 3\right\}$

Vastaus: on

**264.** Määritetään funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^3$ kuvaajalle pisteeseen $\left(1,\ \frac{1}{10}\right)$ piirretyn tangentin yhtälö. Tangentin yhtälöä varten tarvitaan tangentin kulmakerroin ja yksi tangentin piste. Piste $\left(1,\ \frac{1}{10}\right)$ tunnetaan, ja tangentin kulmakerroin on funktion $f$ derivaatta kohdassa $x = 1$.
Derivoidaan funktio $f$.

$$f'(x) = \frac{1}{10} \cdot 3x^2 = \frac{3}{10}x^2$$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = 1$.

$$f'(1) = \frac{3}{10} \cdot 1^2 = \frac{3}{10}$$

Tangentin kulmakerroin on siis $k = \frac{3}{10}$.
Tangentin yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Sijoitetaan yhtälöön kulmakerroin $k = \frac{3}{10}$ ja pisteen $(x,\ y) = \left(1,\ \frac{1}{10}\right)$ koordinaatit. Ratkaistaan yhtälöstä vakiotermi $b$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10} &= \frac{3}{10} \cdot 1 + b \\
\frac{1}{10} &= \frac{3}{10} + b \\
b &= \frac{1}{10} - \frac{3}{10} \\
b &= -\frac{2}{10} \\
b &= -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Tangentin yhtälö on siis $y = \frac{3}{10}x - \frac{1}{5}$.

Tutkitaan, onko piste $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ tangentilla sijoittamalla $x = 2$ tangentin yhtälöön.

$\frac{3}{10} \cdot 2 - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}$ joten piste $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$ ei ole tangentilla. Auto ei siis osu puuhun.

Vastaus: ei osu

**265.** Derivoidaan funktiot $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x-4$ ja

$g(x)=-\frac{1}{4}x^3+2x^2-x.$

$$f'(x)=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}x^2-\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x-1+0=x^2-3x-1$$

$$g'(x)=-\frac{1}{4}\cdot 3x^2+2\cdot 2x-1=-\frac{3}{4}x^2+4x-1$$

Etsitään derivaattafunktioiden kuvaajien leikkauspisteet yhtälön $f'(x)=g'(x)$ avulla.

$$x^2-3x-1=-\frac{3}{4}x^2+4x-1$$

$$\frac{4}{4}x^2+\frac{3}{4}x^2-3x-4x-1+1=0$$

$$\frac{7}{4}x^2-7x=0 \qquad \| \cdot 4$$

$$7x^2-28x=0 \qquad \| :7$$

$$x^2-4x=0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16}}{2}$$

$$x=\frac{4\pm 4}{2}$$

$$x=\frac{4+4}{2} \text{ tai } x=\frac{4-4}{2}$$

$$x=4 \text{ tai } x=0$$

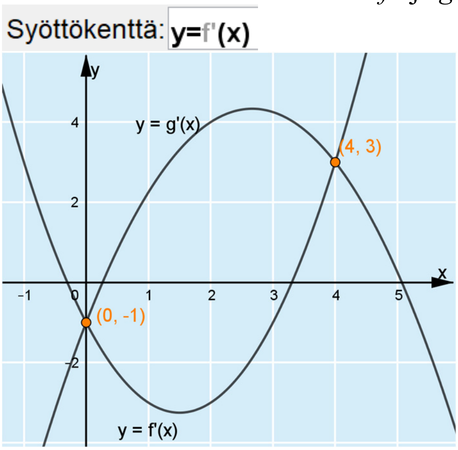
Derivaattafunktioiden kuvaajien leikkauskohdat ovat $x = 0$ ja $x = 4$. Lasketaan vastaavat $y$-koordinaatit.

$f'(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 1 = -1$
$f'(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 3$

Derivaattafunktioiden kuvaajien leikkauspisteet ovat $(0, -1)$ ja $(4, 3)$.

Tarkistetaan sopivalla ohjelmalla.

Piirretään derivaattafunktioiden $f'$ ja $g'$ kuvaajat.




Derivaattafunktioiden kuvaajat leikkaavat pisteissä $(0, -1)$ ja $(4, 3)$.

Vastaus: $(0, -1)$ ja $(4, 3)$

**266.** Funktion $g(x) = x^3 - x^2 - 2x + 4$ kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion $g$ derivaatta kohdassa $x = -1$.
Derivoidaan funktio $g$.
$g'(x) = 3x^2 - 2x - 2$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = -1$.
$g'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 2 = 3$

On etsittävä toinen funktion $g$ kuvaajan kohta, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on $k = 3$. Etsitään kyseinen kohta ratkaisemalla yhtälö $g'(x) = 3$.

$$3x^2 - 2x - 2 = 3$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{6}$$

$$x = \frac{2+8}{6} \text{ tai } x = \frac{2-8}{6}$$

$$x = \frac{10^{(2}}{6} \text{ tai } x = \frac{-6}{6}$$

$$x = \frac{5}{3} \quad \text{ tai } x = -1$$

Kuvaajan kohtaan $x = \frac{5}{3}$ piirretty tangentti on yhdensuuntainen suoran $s$ kanssa.

Vastaus: kohtaan $x = \frac{5}{3}$

**267.** Tiedetään, että funktiolle $f(x) = ax^3 - bx^2$ on $f(1) = -1$. Muodostetaan tämän tiedon avulla yhtälö.

$$\begin{aligned} a \cdot 1^3 - b \cdot 1^2 &= -1 \\ a - b &= -1 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $f(x) = ax^3 - bx^2$.
$f'(x) = 3ax^2 - 2bx$

Tiedetään, että $f'(1) = 0$. Muodostetaan tämän tiedon avulla toinen yhtälö.

$$\begin{aligned} 3a \cdot 1^2 - 2b \cdot 1 &= 0 \\ 3a - 2b &= 0 \end{aligned}$$

Muodostetaan edellisistä yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} a - b = -1 & \| \cdot (-3) \\ 3a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -3a + 3b = 3 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad\qquad b = 3}$$

Sijoitetaan yhtälöön $a - b = -1$ edellä saatu $b = 3$ ja ratkaistaan $a$.

$$\begin{aligned} a - 3 &= -1 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus: $a = 2$, $b = 3$

**268.** **a)** Derivoidaan funktio $A(r) = \pi r^2$.
$A'(r) = 2\pi r$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $r = 5$.
$A'(5) = 2\pi \cdot 5 = 10\pi = 31{,}415\ldots \approx 31{,}4$

Funktio $A(r) = \pi r^2$ ilmoittaa $r$-säteisen ympyrän pinta-alan. Funktion $A$ derivaatta on pinta-alan hetkellinen muutosnopeus säteen kasvaessa. Tulos $A'(5) \approx 31{,}4$ tarkoittaa siis sitä, että ympyrän säteen kasvaessa ympyrän pinta-ala kasvaa hetkellisesti 31,4 $m^2$ säteen yhden metrin kasvua kohti, kun säde on 5 m.

Vastaus: $A'(5) \approx 31{,}4$. Ympyrän säteen kasvaessa ympyrän pinta-ala kasvaa hetkellisesti 31,4 $m^2$ säteen yhden metrin kasvua kohti, kun säde on 5 m.

**b)** Derivoidaan funktio $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

$$V'(r) = \frac{4}{\cancel{3}}\pi \cdot \cancel{3} r^2 = 4\pi r^2$$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $r = 5$.
$V'(5) = 4\pi \cdot 5 = 20\pi = 62{,}831\ldots \approx 62{,}8$

Funktio $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ ilmoittaa $r$-säteisen pallon tilavuuden. Funktion $V$ derivaatta on tilavuuden muutosnopeus. Tulos $V'(5) \approx 62{,}8$ tarkoittaa siis sitä, että pallon säteen kasvaessa pallon tilavuus kasvaa hetkellisesti 62,8 $m^3$ säteen yhden metrin kasvua kohti, kun säde on 5 m.

Vastaus: $V'(5) \approx 62{,}8$. Pallon säteen kasvaessa pallon tilavuus kasvaa hetkellisesti 62,8 $m^3$ säteen yhden metrin kasvua kohti, kun säde on 5 m.

**269.** Pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn funktion $f$ kuvaajan tangentin kulmakerroin on funktion $f$ derivaatan arvo $f\,'(a)$.

**a)** Jotta nähtäisiin suoran $4y + 5x = 2$ kulmakerroin, ratkaistaan suoran yhtälöstä muuttuja $y$.

$$\begin{aligned} 4y+5x&=2 \\ 4y&=-5x+2 \qquad \|:4 \\ y&=-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Suoran $4y + 5x = 2$ kulmakerroin on $-\frac{5}{4}$ ja kyseinen suora on funktion $f$ kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretty tangentti, joten $f\,'(1) = -\frac{5}{4}$.

Vastaus: $f\,'(1) = -\frac{5}{4}$

**b)** Jotta suora $y = x - 2$ olisi funktion $f(x) = x^2$ kuvaajan eli paraabelin $y = x^2$ tangentti, suoralla ja paraabelilla on oltava yhteinen piste, ja funktion $f$ derivaatan on oltava suoran $y = x - 2$ kulmakerroin $k = 1$, kun muuttujan $x$ arvo on yhteisen pisteen $x$-koordinaatti. Etsitään yhteiset pisteet ratkaisemalla yhtälö $x^2 = x - 2$.

$$\begin{aligned} x^2&=x-2 \\ x^2-x+2&=0 \\ x&=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} \\ x&=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2} \end{aligned}$$

Negatiivisella luvulla $-7$ ei ole neliöjuurta, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua. Suoralla ja paraabelilla ei siis ole yhtään yhteistä pistettä.

Vastaus: ei voi

**270.** Kulmakertoimen ja suuntakulman välillä on yhtälö $k = \tan(\alpha)$, jossa $\alpha$ on suoran suuntakulma ja $k$ on suoran kulmakerroin.

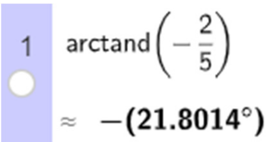
**a)** Jotta nähtäisiin suoran $2x + 5y = 8$ kulmakerroin, ratkaistaan suoran yhtälöstä muuttuja $y$.

$$\begin{aligned} 2x+5y&=8 \\ 5y&=-2x+8 \qquad \| :5 \\ y&=-\frac{2}{5}x+\frac{8}{8} \end{aligned}$$

Suoran $2x + 5y = 8$ kulmakerroin on $-\frac{2}{5}$.

Määritetään suuntakulma.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= -\frac{2}{5} \\ \alpha &= -21{,}804...° \end{aligned}$$




Kun suora on laskeva, on suuntakulma negatiivinen, mutta suuntakulman suurus on yhtä suuri kuin akselin ja suoran välinen kulma. Näin ollen suora $2x + 5y = 8$ leikkaa x-akselin noin 21,8 asteen kulmassa.

Vastaus: -

**b)** Muodostetaan tangentti suoran yhtälö.
Määritetään tangentin kulmakerroin derivaatan avulla.
$f(x) = 3x^3 - 6x + 1$
$f'(x) = 9x^2 - 6$
$f'(1) = 9 \cdot 1^2 - 6 = 3$
Tangentin kulmakerroin on 3.

Tangentti kulkee sivuamispisteen kautta, sivuamispisteen x-koordinaatti on 1. Määritetään sivuamispisteen $y$-koordinaatti funktion $f$ avulla.
$f(1) = 3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 1 = -2$
Tangentti siis kulkee pisteen (1, –2) kautta.
Tangentin yhtälön vakiotermi:

$$
\begin{aligned}
y &= kx + b \\
-2 &= 3 \cdot 1 + b \\
b &= -5
\end{aligned}
$$

Tangentin yhtälö on siis $y = 3x - 5$.

Määritetään tangentin ja $x$-akselin välinen kulma.

$$
\begin{aligned}
\tan \alpha &= 3 \\
\alpha &= 71{,}565...^\circ
\end{aligned}
$$

1 arctand(3)
≈ **71.56505°**

Tangentti siis leikkaa x-akselin 71,6 asteen kulmassa.

Vastaus: $y = 3x - 5$, 71,6°