1 MUUTOSNOPEUS

1.1 Keskimääräinen muutosnopeus

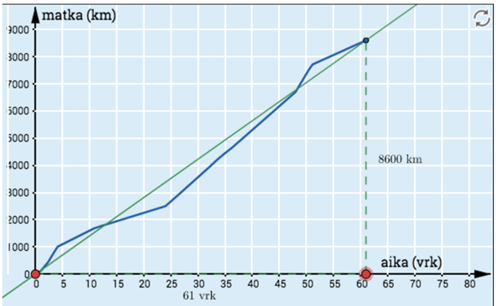
ALOITA PERUSTEISTA

101. Epäyhtälömerkkien merkitys selviää esimerkiksi muistisäännöstä ”suu auki suurempaan” tai ”piikki pistää pienempään”. Jos epäyhtälömerkissä on alaviiva, niin yhtäsuuruus sallitaan.

Vastaus: A: II, B: IV, C: I ja D: III

102. **a)** Ukon keskinopeus koko matkalla on matkan alku- ja loppupisteisiin piirretyn sekantin kulmakerroin. Appletin avulla nähdään, että kulmakerroin on

$$k=\frac{8600\text{ km}}{61\text{ vrk}}\approx 141\text{ km/vrk}.$$

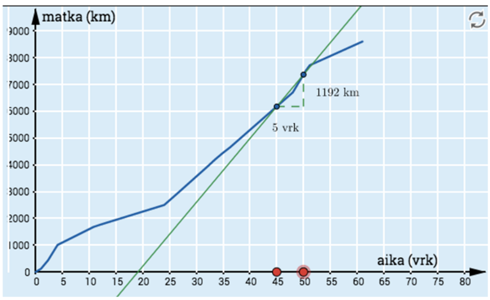


Ukon keskinopeus koko matkalla oli noin 141 km/vrk.

Vastaus: 141 km/vrk

b) Ukon keskinopeus aikavälillä 45 vrk–50 vrk on aikavälin alku- ja loppupisteisiin piirretyn sekantin kulmakerroin. Appletin avulla nähdään, että kulmakerroin on

$$k=\frac{1192\text{ km}}{5\text{ vrk}}\approx 238\text{ km/vrk}.$$



Ukon keskinopeus aikavälillä 45 vrk - 50 vrk oli noin 238 km/vrk.

Vastaus: 238 km/vrk

103. Merkinnässä $[a, b]$ luku a on lukusuoran välin pienin luku ja luku b sen suurin luku.

a) Väli [9, 11] merkitään epäyhtälömerkinnällä $9 \leq x \leq 11$. Välin [9, 11] pienin luku on 9 ja suurin luku 11. Niiden välissä on esimerkiksi luku 10.

Vastaus: $9 \leq x \leq 11$, pienin 9, suurin 11, esim. 10

b) Väli [−9, −5] merkitään epäyhtälömerkinnällä $-9 \leq x \leq -5$. Välin [−9, −5] pienin luku on −9 ja suurin luku −5. Niiden välissä on esimerkiksi luku −7.

Vastaus: $-9 \leq x \leq -5$, pienin −9, suurin −5, esim. −7

c) Väli [0, 1] merkitään epäyhtälömerkinnällä $0 \leq x \leq 1$. Välin [0, 1] pienin luku on 0 ja suurin luku 1. Niiden välissä on esimerkiksi luku $\frac{1}{2}$.

Vastaus: $0 \leq x \leq 1$, pienin 0, suurin 1, esim. $\frac{1}{2}$

104. **a)** Muuttujan arvot välin $1 \leq x \leq 2$ päätepisteissä ovat $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat funktion arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 2$ ja $y_2 = 6$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $1 \leq x \leq 2$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4.$$

Vastaus: 4

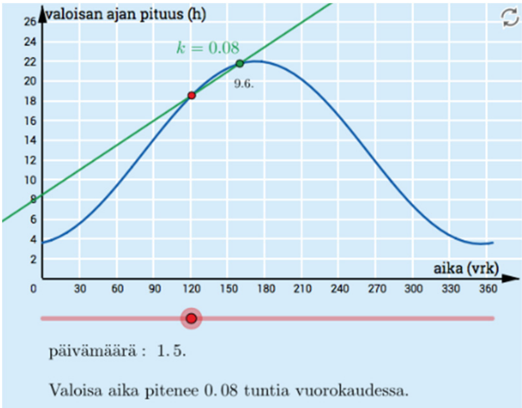
b) Muuttujan arvot välin $2 \leq x \leq 4$ päätepisteissä ovat $x_1 = 2$ ja $x_2 = 4$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat funktion arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 6$ ja $y_2 = 0$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $2 \leq x \leq 4$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-6}{4-2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Vastaus: −3

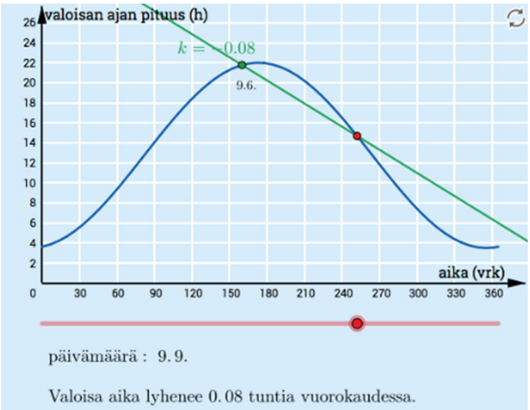
105. **a)** Siirretään liukusäätimellä mittauksen toiseksi päivämääräksi 1.5.



Havaitaan, että valoisa aika pitenee vuorokautta kohti keskimäärin $0{,}08 = 0{,}08 \cdot 60$ min $= 4{,}8$ min ≈ 5 min.

Vastaus: pitenee 5 min/vrk

b) Siirretään liukusäätimellä mittauksen toiseksi päivämääräksi 9.9.



Havaitaan, että valoisa aika lyhenee vuorokautta kohti keskimäärin $0{,}08 = 0{,}08 \cdot 60$ min $= 4{,}8$ min ≈ 5 min.

Vastaus: lyhenee 5 min/vrk

106. Autolla ajettiin 66 021 km − 65 781 km = 240 km.
Aikaa kului 2 h 30 min = 2,5 h.
Automatkan keskinopeus oli $\frac{240\text{ km}}{2{,}5\text{ h}} = 96\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Vastaus: 96 km/h

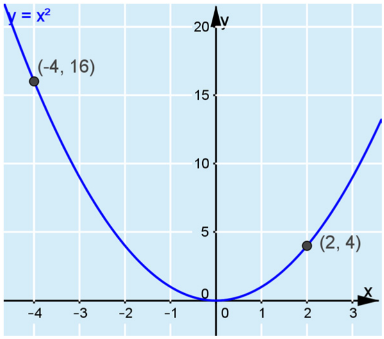
107. **a)** Muuttujan arvot välin [−4, 2] päätepisteissä ovat $x_1 = -4$ ja $x_2 = 2$.
Näitä muuttujan arvoja vastaavat funktion arvot ovat
$y_1 = f(-4) = (-4)^2 = 16$ ja $y_2 = f(2) = 2^2 = 4$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [−4, 2] on

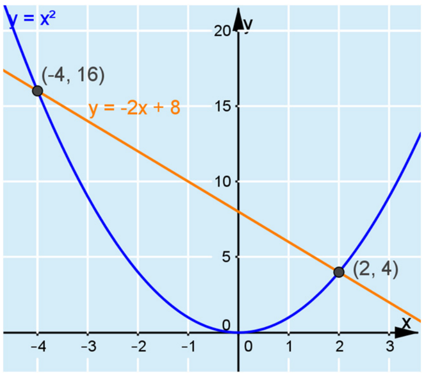
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-16}{2-(-4)} = \frac{-12}{6} = -2.$$

Vastaus: −2

b) Piirretään funktion f kuvaaja ja merkitään sille pisteet kohtiin, joissa $x = -4$ ja $x = 2$.



Piirretään pisteiden kautta suora.



Ohjelma antaa suoran kulmakertoimeksi $k = -2$, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [−4, 2] on −2.

Vastaus: −2

108. Muuttujan x arvot välin [10, 25] päätepisteissä ovat $x_1 = 10$ ja $x_2 = 25$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat sadon y arvot ovat taulukon perusteella $y_1 = 6790$ ja $y_2 = 5830$.

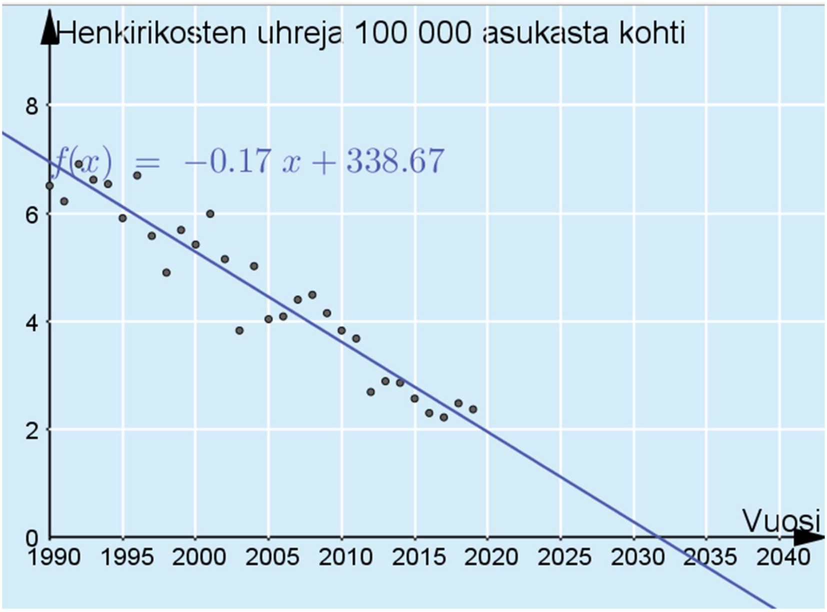
Sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä [10, 25] on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5830\text{ kg} - 6790\text{ kg}}{25\text{ kg} - 10\text{ kg}} = -64.$$

Kun lannoituksen määrä nostetaan 10 kilogrammasta 25 kilogrammaan, sato pienenee jokaista lisättyä typpilannoitekilogrammaa kohti 64 kg.

Vastaus: pieneni 64 kg

109. **a)** Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = -0{,}17x + 338{,}67$.

Vastaus: $f(x) = -0{,}17x + 338{,}67$

b) Funktion kuvaaja on suora, joten kuvaajalle piirretyn sekantin kulmakerroin on sama kuin suoran kulmakerroin $k = –0,17$. Henkirikosuhrien määrä 100 000 asukasta kohti siis vähenee keskimäärin 0,17 hengellä vuotta kohti.

Vastaus: Henkirikosuhrien määrä 100 000 asukasta kohti siis vähenee keskimäärin 0,17 hengellä vuotta kohti.

VAHVISTA OSAAMISTA

110. Kun $x = 0$, funktio i saa arvon $i(0) = 3 \cdot 0 – 7 = –7$, joten A ja IV kuuluvat yhteen.

Koska $g(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ ja $g(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$, on funktion g keskimääräinen muutosnopeus $\frac{48-12}{4-2} = \frac{36}{2} = 18$ välillä [2, 4]. Näin ollen B ja II kuuluvat yhteen.

Koska $f(0) = 4 – 5 \cdot 0 = 4$ ja $f(10) = 4 – 5 \cdot 10 = –46$, on funktion f kuvaajalle välille [0, 10] piirretyn sekantin kulmakerroin $\frac{-46-4}{10-0} = \frac{-50}{10} = -5$. Näin ollen C ja I kuuluvat yhteen.

Koska $h(–3) = (–3)^3 + 2 \cdot (–3)^2 – 15 \cdot (–3) + 14 = 50$ ja $h(4) = 4^3 + 2 \cdot 4^2 – 15 \cdot 4 + 14 = 50$, on funktion h kuvaajalle välille [–3, 4] piirretyn sekantin kulmakerroin $\frac{50-50}{4-(-3)} = \frac{0}{7} = 0$. Näin ollen D ja III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV, B: II, C: I ja D: III

111. Lasketaan funktion $f(x) = 3x - 5$ arvot välien päätepisteissä.

$f(1) = 3 \cdot 1 - 5 = -2$
$f(4) = 3 \cdot 4 - 5 = 7$
$f(100) = 3 \cdot 100 - 5 = 295$
$f(200) = 3 \cdot 200 - 5 = 595$
$f(-1000) = 3 \cdot (-1000) - 5 = -3005$
$f(6000) = 3 \cdot 6000 - 5 = 17\,995$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [1, 4] on
$$\frac{7-(-2)}{4-1} = \frac{9}{3} = 3.$$

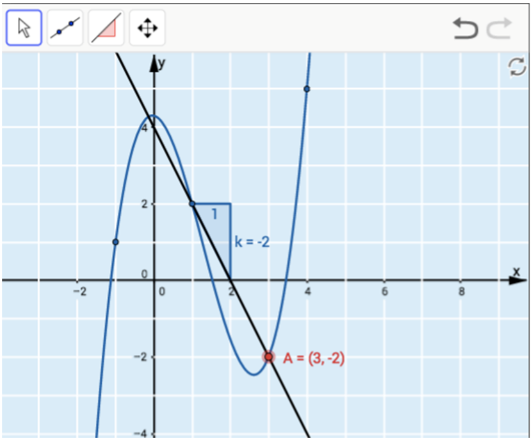
Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [100, 200] on
$$\frac{595-295}{200-100} = \frac{300}{100} = 3.$$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [−1000, 6000] on
$$\frac{17\,995-(-3005)}{6000-(-1000)} = \frac{21\,000}{7000} = 3.$$

Funktion f muutosnopeus on joka välillä 3. Tämä johtuu siitä, että funktion f kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 3, ja suoran pisteiden kautta piirretty suoran sekantti on suoran suuntainen.

Vastaus: 3

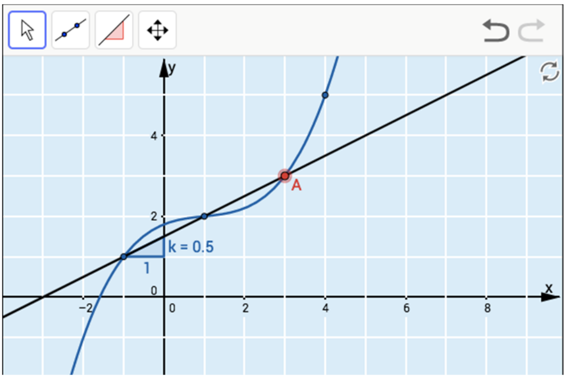
112. **a)** Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 1$ ja $x = 3$ kautta. Siirretään pistettä A y-akselin suuntaisesti niin, että sekantin kulmakertoimeksi saadaan $k = -2$.



Pisteen A koordinaatit ovat $(3, -2)$.

Vastaus: $(3, -2)$

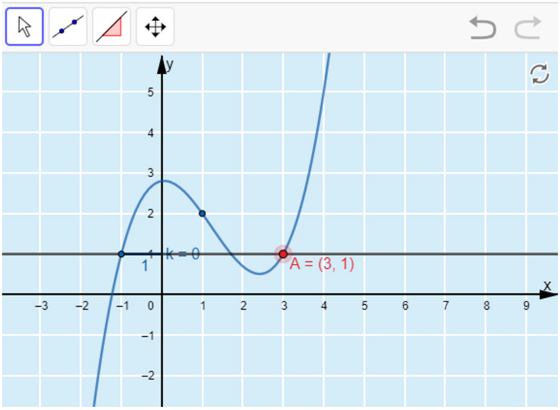
b) Toimitaan vastaavasti kuin a-kohdassa. Piirretään sekantti kohtien $x = -1$ ja $x = 3$ kautta. Siirretään pistettä A y-akselin suuntaisesti niin, että sekantin kulmakertoimeksi saadaan $k = 0{,}5$.



Pisteen A koordinaatit ovat $(3, 3)$.

Vastaus: $(3, 3)$

c) Toimitaan vastaavasti kuin a-kohdassa. Piirretään nyt sekantti kohtien $x = -1$ ja $x = 3$ kautta. Siirretään pistettä A y-akselin suuntaisesti niin, että sekantin kulmakertoimeksi saadaan $k = 0$.



Pisteen A koordinaatit ovat (3, 1).

Vastaus: (3, 1)

113. Funktion f keskimääräinen muutosnopeus saadaan jakamalla funktion arvon muutos muuttujan arvon muutoksella. Keskimääräinen muutosnopeus välillä [5, 9] on siis $\frac{31-19}{9-5} = \frac{12}{4} = 3$.

Tulos tarkoittaa käytännössä, että henkilön iän muuttuessa viidestä vuodesta yhdeksään vuoteen henkilön massa kasvaa vuodessa keskimäärin 3 kg.

Vastaus: 3. Henkilön massa kasvaa viiden ja yhdeksän ikävuoden välillä keskimäärin 3 kg vuodessa.

114. **a)** Kuvaajan x-koordinaatin pienin arvo on 0 ja suurin 4, joten kuvassa on funktion kuvaaja välillä [0, 4]. Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, [0, 4]

b) Muuttujan x arvot välin [0, 3] päätepisteissä ovat $x_1 = 0$ ja $x_2 = 3$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat funktion arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = -3$ ja $y_2 = 0$. Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 3] on $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-3)}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$.
Väite on siis tosi.

Vastaus: tosi

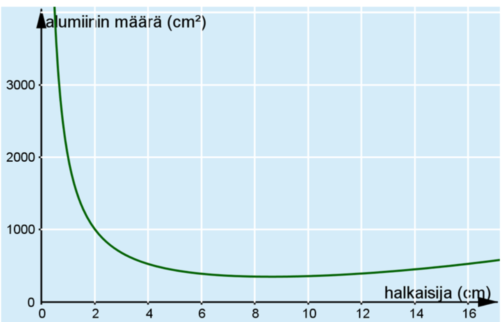
c) Kun kuvaajan pisteen x-koordinaatti on lukujen 1 ja 3 välillä, kuvaaja on x-akselin yläpuolella, joten y-koordinaatti on suurempi kuin nolla. Väite on siis tosi.

Vastaus: tosi

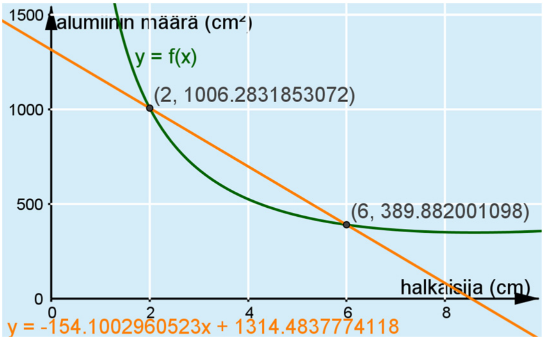
d) Tutkitulla välillä funktion arvo eli kuvaajan y-koordinaatti on vähintään −3 ja korkeintaan 1, eli $-3 \leq f(x) \leq 1$. Väite on siis epätosi. Sen sijaan muuttujan arvo eli kuvaajan x-koordinaatti on vähintään 0 ja korkeintaan 4, eli $0 \leq x \leq 4$.

Vastaus: epätosi, x

115. **a)** Piirretään funktion $f(x) = \frac{2000}{x} + 0,5\pi x^2$ kuvaaja, kun $x > 0$.



b) Merkitään koordinaatistoon pisteet $(2, f(2))$ ja $(6, f(6))$ ja piirretään suora niiden kautta.



Ohjelma antaa suoran kulmakertoimeksi $k = -154{,}100\ldots \approx -154{,}1$.

Vastaus: $k \approx -154{,}1$

c) Kohdan b tulos tarkoittaa, että kun tölkin pohjan halkaisija kasvaa 2 cm:stä 6 cm:iin, tarvittavan alumiinin määrä pienenee keskimäärin noin 154,1 cm^2, kun halkaisija kasvaa yhdellä senttimetrillä.

Vastaus: Tarvittavan alumiinin määrä pienenee keskimäärin n. 154 cm^2, kun halkaisija kasvaa.

116. **a)** Muuttujan x arvot välin [1980, 2020] päätepisteissä ovat $x_1 = 1980$ ja $x_2 = 2020$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat liittymien määrän y arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 23$ ja $y_2 = 9250$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [1980, 2020] on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9250 - 23}{2020 - 1980} = 230{,}675 \approx 231 \text{ tuhatta liittymää/vuosi.}$$

Vastaus: 231 000 liittymää/vuosi

b) Kuvaaja näyttää silmämääräisesti jyrkimmältä aikaväleillä 1995–2000 ja 2005–2010. Lasketaan funktion *f* keskimääräiset muutosnopeudet väleillä [1995, 2000] ja [2005, 2010].

Muuttujan x arvot välin [1995, 2000] päätepisteissä ovat $x_1 = 1995$ ja $x_2 = 2000$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat liittymien määrän y arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 1039$ ja $y_2 = 3729$.

Funktion *f* keskimääräinen muutosnopeus välillä [1995, 2000] on
$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3729 - 1039}{2000 - 1995} = 538$ tuhatta liittymää/vuosi.

Muuttujan x arvot välin [2005, 2010] päätepisteissä ovat $x_1 = 2005$ ja $x_2 = 2010$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat liittymien määrän y arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 5385$ ja $y_2 = 8390$.

Funktion *f* keskimääräinen muutosnopeus välillä [2005, 2010] on
$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8390 - 5385}{2010 - 2005} = 601$ tuhatta liittymää/vuosi.

Muutosnopeus oli siis suurin vuodesta 2005 vuoteen 2010. Tuolloin matkapuhelinliittymien määrä kasvoi vuodessa keskimäärin 601 tuhannella.

Vastaus: aikavälillä [2005, 2010], 601 000 liittymää/vuosi

c) Muutosnopeus oli kuvaajan perusteella pienin vuosina 1980–1985. Lasketaan funktion f muutosnopeus välillä [1980, 1985].

Muuttujan x arvot välin [1980, 1985] päätepisteissä ovat $x_1 = 1980$ ja $x_2 = 1985$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat liittymien määrän y arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 23$ ja $y_2 = 68$. Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [1980, 1985] on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{68 - 23}{1985 - 1980} = 9 \text{ tuhatta liittymää/vuosi.}$$

Muutosnopeus oli pienin vuodesta 1980 vuoteen 1985. Tuolloin matkapuhelinliittymien määrä kasvoi vuodessa keskimäärin 9000 liittymällä.

Vastaus: aikavälillä [1980, 1985], 9000 liittymää/vuosi

117. **a)** Pisteet $D = (3, 3)$ ja $E = (4, 0)$ ovat kuvaajalla, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [3, 4] on $\frac{0-3}{4-3} = \frac{-3}{1} = -3$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus on −3 ainakin välillä [3, 4].

Vastaus: esim. [3, 4]

b) Pisteet $C = (1, -1)$ ja $D = (3, 3)$ ovat kuvaajalla, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [1, 3] on $\frac{3-(-1)}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$.
Funktion f keskimääräinen muutosnopeus on 2 ainakin välillä [1, 3].

Vastaus: esim. [1, 3]

c) Pisteet $A = (-2, -2)$ ja $D = (3, 3)$ ovat kuvaajalla, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [−2, 3] on $\frac{3-(-2)}{3-(-2)} = \frac{5}{5} = 1$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus on 2 ainakin välillä [−2, 3].

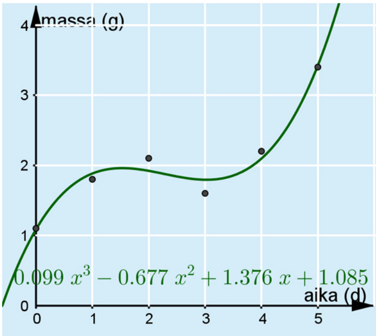
Vastaus: esim. [−2, 3]

d) Pisteet $B = (-1, 2)$ ja $C = (1, -1)$ ovat kuvaajalla, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[-1, 1]$ on $\dfrac{-1-2}{1-(-1)} = \dfrac{-3}{2} = -1{,}5$.

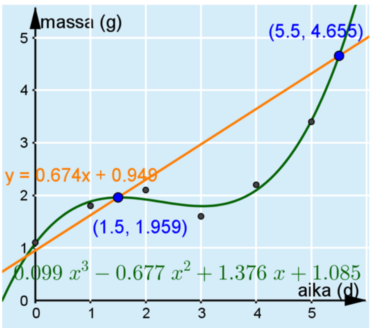
Funktion f keskimääräinen muutosnopeus on $-1{,}5$ ainakin välillä $[-1, 1]$.

Vastaus: esim. $[-1, 1]$

118. **a)** Sovitetaan aineistoon 3. asteen polynomifunktio sopivalla ohjelmalla.



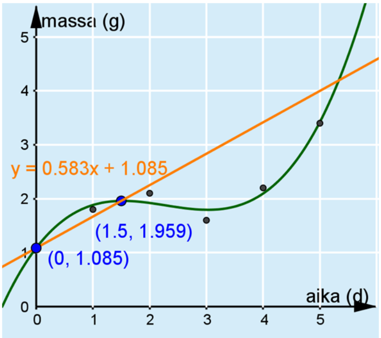
Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = 0{,}099x^3 - 0{,}677x^2 + 1{,}376x + 1{,}085$. Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 1{,}5$ ja $x = 5{,}5$ kautta.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = 0{,}674$, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1{,}5; 5{,}5]$ on $0{,}674$ g/vrk $\approx 0{,}67$ g/vrk.

Vastaus: $f(x) = 0{,}099x^3 - 0{,}677x^2 + 1{,}376x + 1{,}085$; 0,67 g/vrk

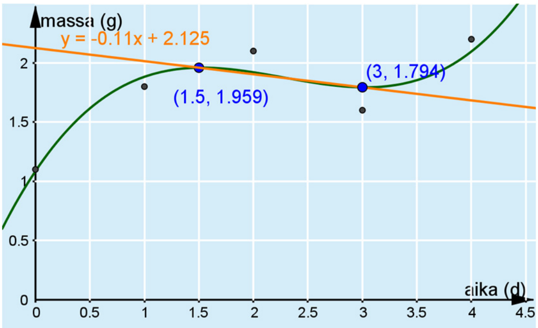
b) Kuvaajan perusteella populaatio kasvaa noin hetkeen 1,5 vrk asti. Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 0$ ja $x = 1{,}5$ kautta.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k \approx 0{,}583$, joten populaation keskimääräinen kasvunopeus välillä [0; 1,5] on noin 0,58 g/vrk.

Vastaus: 1,5 vrk; 0,58 g/vrk

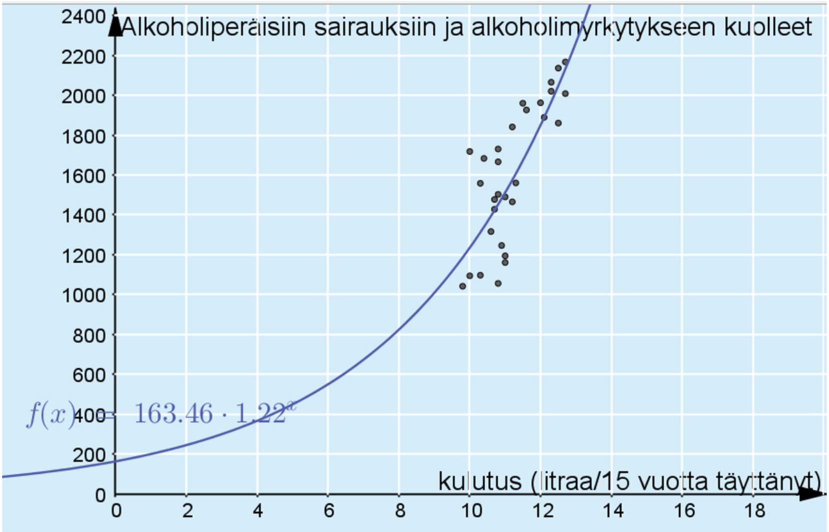
c) Kuvaajan perusteella populaation koko on pienimmillään noin 3 vuorokauden kohdalla. Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 1{,}5$ ja $x = 3$ kautta.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k \approx -0{,}11$, joten populaation keskimääräinen kasvunopeus välillä [1,5; 3] on noin −0,11 g/vrk.

Vastaus: 3,0 vrk:n kuluttua; −0,11 g/vrk

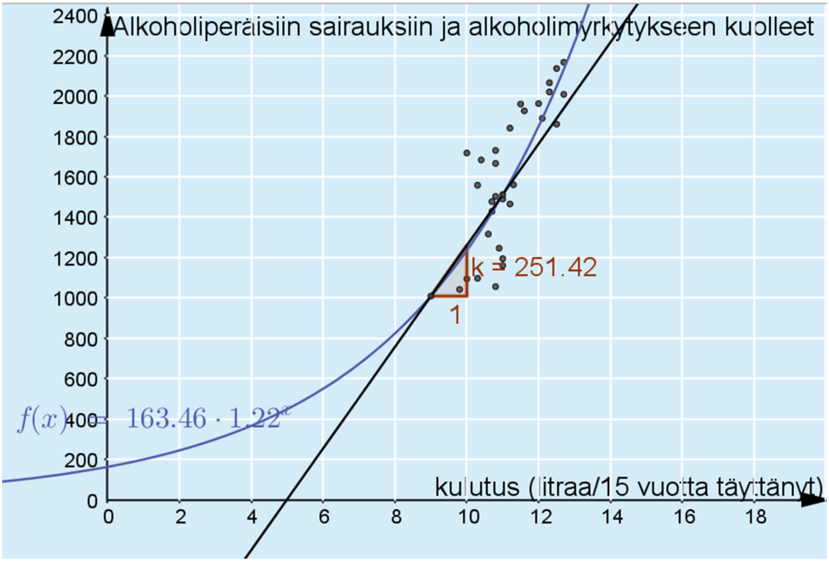
119. **a)** Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = 163{,}46 \cdot 1{,}22^x$.

Vastaus: $f(x) = 163{,}46 \cdot 1{,}22^x$

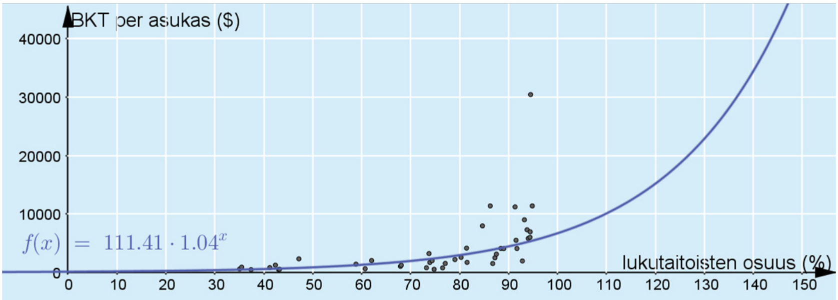
b) Piirretään funktion *f* kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 9$ ja $x = 11$ kautta, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.



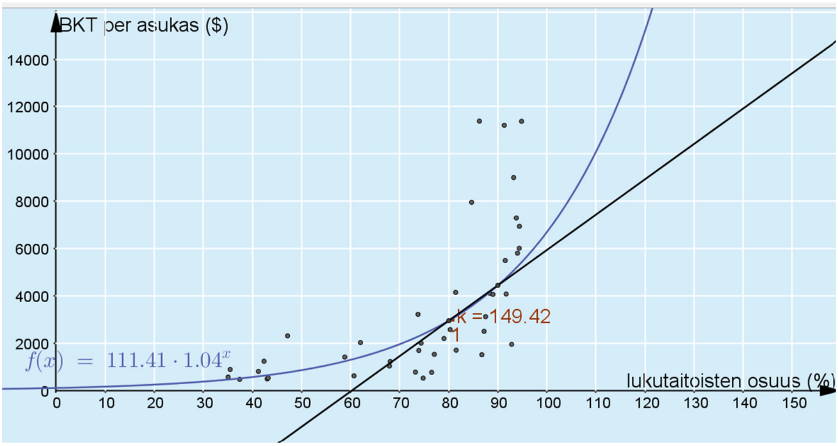
Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi 251,42, joten a-kohdan mallin mukaan alkoholiperäisiin sairauksiin ja alkoholimyrkytykseen kuolleiden määrä kasvaa litran kulutuksen kasvua kohti keskimäärin 251,42≈ 251:llä.

Vastaus: kasvaa 251:llä

120. Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 80$ ja $x = 90$ kautta.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = 149{,}42$, joten yhden prosenttiyksikön nousu lukutaitoisten osuudessa kasvattaa mallin mukaan bruttokansantuotetta 149,42 \$ ≈ 149 \$.

Vastaus: 149 dollarilla

121. **a)** Funktion f lausekkeessa muutoskerroin on $q = 0{,}994$, joten joka minuutti isotoopin määrästä on jäljellä 99,4 % edellisen minuutin määrästä. Isotooppia hajoaa siis minuutissa 100 % − 99,4 % = 0,6 %.

Vastaus: 0,6 %

b) Lasketaan funktion $f(x) = 2 \cdot 0{,}994x$ arvot välien päätepisteissä.
$f(0) = 2 \cdot 0{,}994^0 = 2$
$f(100) = 2 \cdot 0{,}994^{100} = 1{,}095\ldots$
$f(200) = 2 \cdot 0{,}994^{200} = 0{,}600\ldots$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 100] on

$$\frac{1{,}095...-2}{100-0} = -0{,}00904...$$

Aikavälillä [0, 100] isotooppia hajoaa minuutissa keskimäärin 0,00904… µg ≈ 0,0090 µg.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [100, 200] on

$$\frac{0{,}600...-1{,}095...}{200-100} = -0{,}00495...$$

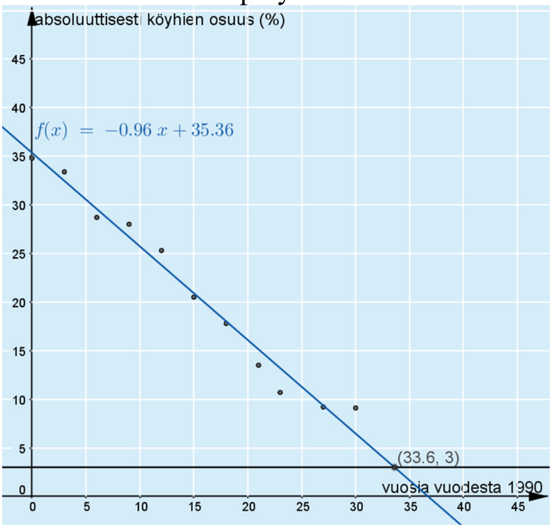
Aikavälillä [100, 200] isotooppia hajoaa minuutissa keskimäärin 0,00495… µg ≈ 0,0050 µg.

Vastaus: 0,0090 µg ja 0,0050 µg

c) Isotoopin määrä vähenee ajan kuluessa. Kun suuremmasta ja pienemmästä grammamäärästä hajoaa sama prosenttiosuus, niin suuremmasta määrästä hajoaa grammoina mitattuna suurempi määrä isotooppia.

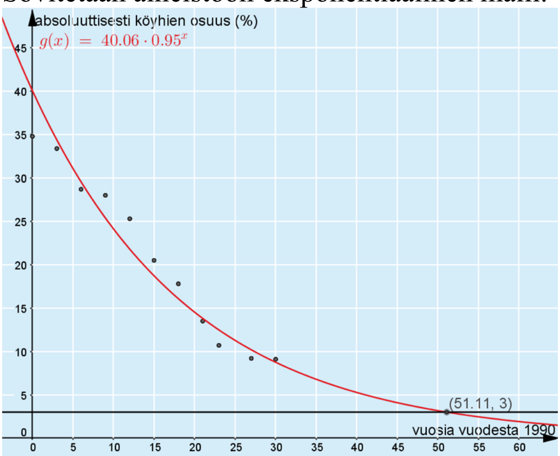
SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

122. **a)** Valitaan muuttujaksi aika vuosina vuodesta 1990. Sovitetaan aineistoon 1. asteen polynomifunktio.



Ohjelma antaa malliksi funktion $f(x) = -0{,}96x + 35{,}36$. Funktion kuvaaja kulkee pisteen (33,6; 3) kautta, joten mallin mukaan absoluuttisessa köyhyydessä elävien suhteellinen osuus olisi 3 % vuonna 1990 + 33,6 = 2023,6 ≈ 2024.

Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



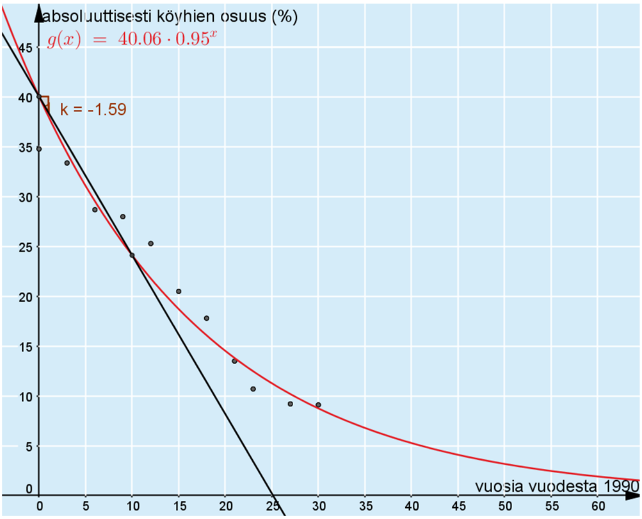
Ohjelma antaa malliksi funktion $g(x) = 40{,}06 \cdot 0{,}95^x$. Funktion kuvaaja kulkee pisteen (51,11; 3) kautta, joten mallin mukaan absoluuttisessa köyhyydessä elävien suhteellinen osuus olisi 3 % vuonna 1990 + 51,11 = 2041,11 ≈ 2041.

Vastaus: $f(x) = -0{,}96x + 35{,}36$, vuonna 2024 ja $g(x) = 40{,}06 \cdot 0{,}95^x$, vuonna 2041.

b) Ensimmäisen asteen polynomisen mallin kuvaaja on suora, joten kuvaajalle piirrettyjen sekanttien kulmakerroin on sama kuin suoran kulmakerroin $k = -0{,}96$.

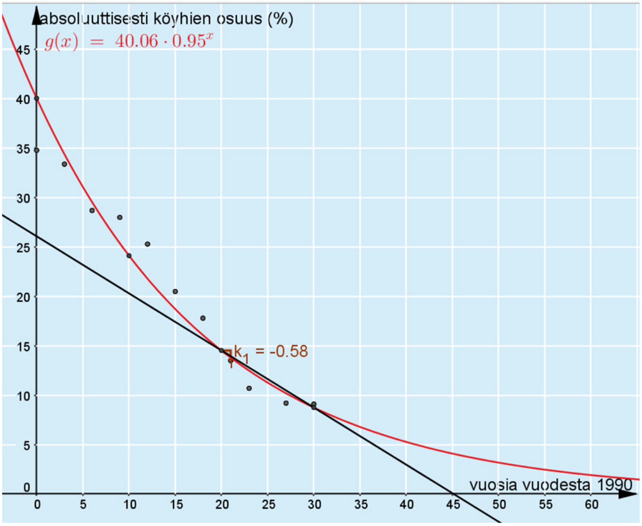
Ensimmäisen asteen polynomisen mallin mukaan köyhien osuus aleni sekä aikavälillä 1990–2000 että aikavälillä 2010–2020 vuosittain keskimäärin 0,96 prosenttiyksiköllä.

Vuosina 1990 ja 2000 oli kulunut 0 ja 10 vuotta vuodesta 1990, joten ajankohtia vastaavat muuttujan x arvot ovat $x = 0$ ja $x = 10$. Piirretään funktion g kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 0$ ja $x = 10$ kautta, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = -1{,}59$, joten köyhien määrä aleni eksponentiaalisen mallin mukaan ajanjaksolla 1990–2000 keskimäärin 1,59 prosenttiyksiköllä vuodessa.

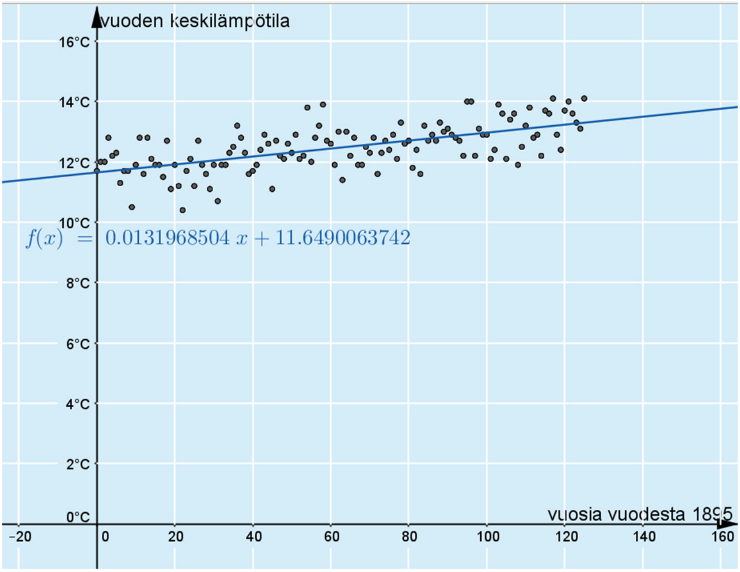
Vuosina 2010 ja 2020 oli kulunut 20 ja 30 vuotta aikaa vuodesta 1990, joten ajankohtia vastaavat muuttujan x arvot ovat $x = 20$ ja $x = 30$. Piirretään funktion g kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 20$ ja $x = 30$ kautta, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.



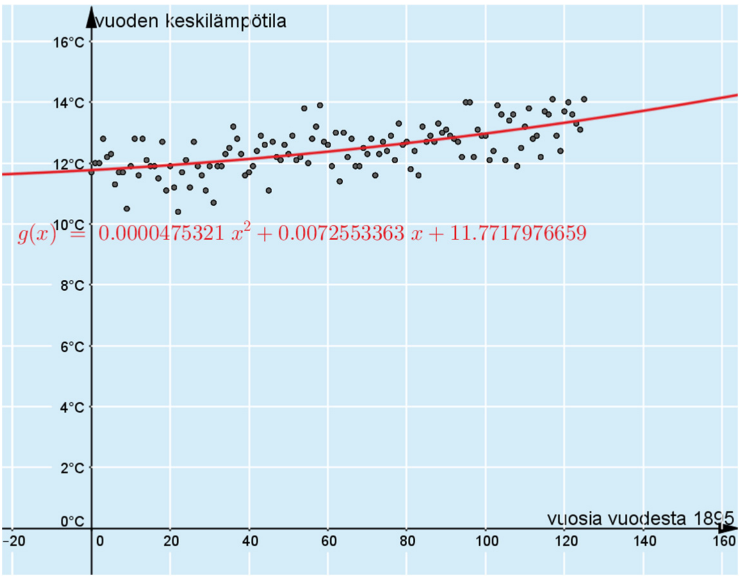
Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = -0{,}58$, joten köyhien määrä aleni toisen asteen polynomisen mallin mukaan ajanjaksolla 2010–2020 keskimäärin 0,58 prosenttiyksiköllä vuodessa.

Vastaus: lineaarinen malli: 0,96 prosenttiyksiköllä vuodessa ja 0,96 prosenttiyksiköllä vuodessa; eksponentiaalinen malli:
1,59 prosenttiyksiköllä vuodessa ja 0,58 prosenttiyksiköllä vuodessa

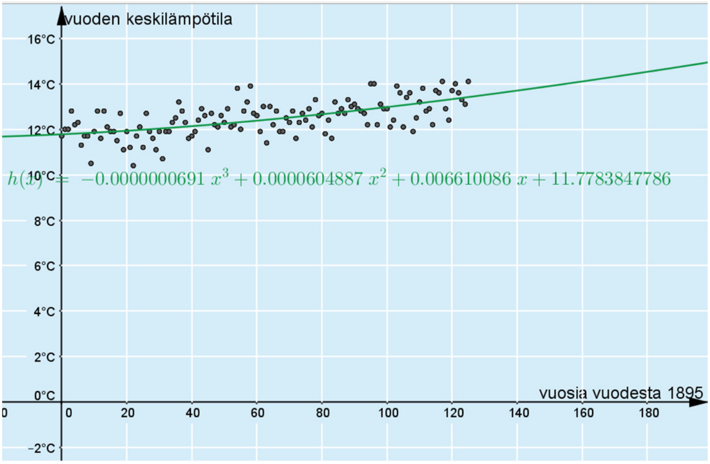
123. **a)** Mallinnetaan keskilämpötiloja polynomifunktioilla, joiden asteluvut ovat 1-4 ja muuttujana on vuodesta 1895 kulunut aika vuosina.



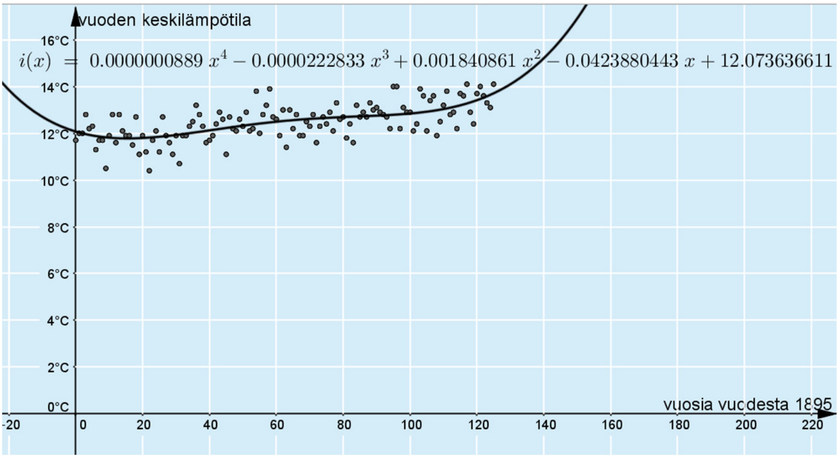
1. asteen polynomifunktion lauseke on $f(x) = 0{,}013197x + 11{,}649$.



2. asteen polynomifunktion lauseke on
$g(x) = 0{,}00004753x^2 + 0{,}007255x + 11{,}772$.



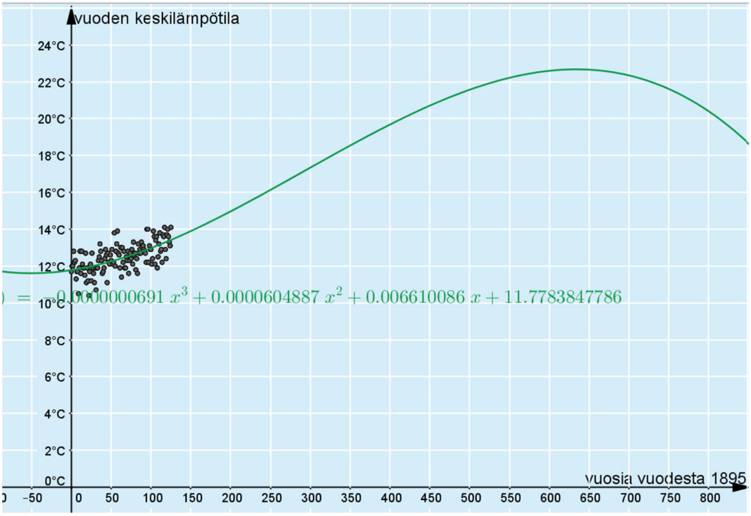
3. asteen polynomifunktion lauseke on
$h(x) = -0{,}0000000691x^3 + 0{,}0000604887x^2 + 0{,}006610086x$
$+ 11{,}778385$.



4. asteen polynomifunktion lauseke on
$i(x) = 0{,}0000000889x^4 - 0{,}000022833x^3 + 0{,}0018409x^2$
$- 0{,}04238804x + 12{,}0736366$.

Vastaus: $f(x) = 0{,}013197x + 11{,}649$;
$g(x) = 0{,}00004753x^2 + 0{,}007255x + 11{,}772$;
$h(x) = -0{,}0000000691x^3 + 0{,}0000604887x^2 + 0{,}006610086x$
$+ 11{,}778385$ ja
$i(x) = 0{,}0000000889x^4 - 0{,}000022833x^3 + 0{,}0018409x^2$
$- 0{,}04238804x + 12{,}0736366$

b) Kolmannen asteen polynomifunktio ennustaa lämpötilojen lähtevän pitkällä aikavälillä laskuun, vaikka nousuvaihe on kestänyt koko mittaushistorian ajan. Tämän vuoksi malli ei ole kovin uskottava.

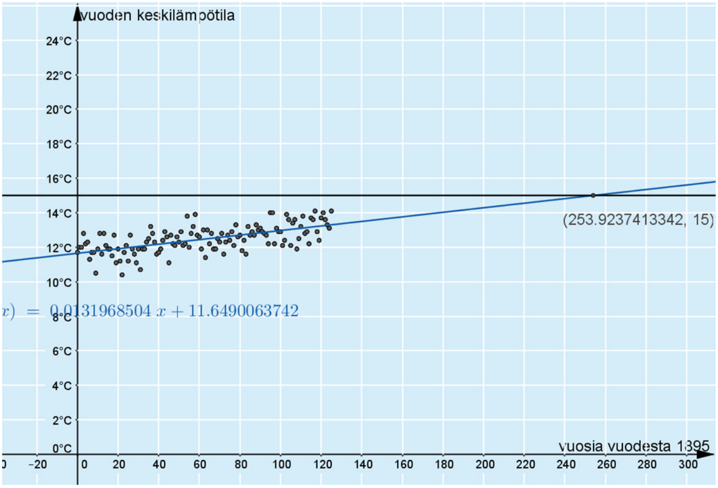


Neljännen asteen polynomifunktio ennustaa lämpötilojen lähtevän pian tunnetun mittaushistorian jälkeen huomattavasti jyrkempään nousuun kuin tähän asti on mitattu. Tämän vuoksi malli ei ole kovin uskottava.

Uskottavimmat neljästä mallista ovat 1. ja 2. asteen polynomifunktio, jotka molemmat ennustavat lämpötilojen nousevan suurin piirtein nykyisellä vauhdilla.

Tutkitaan 1. asteen polynomifunktion antamat ennusteet.
Funktion kuvaaja on suora, joten kuvaajalle piirretyn sekantin kulmakerroin on sama kuin suoran kulmakerroin k = 0,013197.
Lämpötila nousee siis 1. asteen polynomimallin mukaan keskimäärin 0,013197°C ≈ 0,013 °C vuosittain.

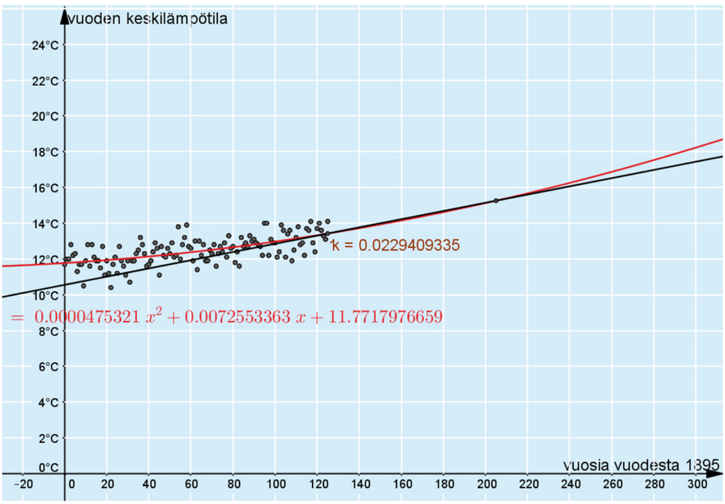
Etsitään ohjelman avulla funktion kuvaajan ja suoran y = 15 leikkauspiste.



Ohjelma antaa leikkauspisteeksi (253,923…; 15), joten 1. asteen polynomisen mallin mukaan keskilämpötila ylittää 15 °C vuonna 1895 + 253,923… = 2148,923… ≈ 2149.

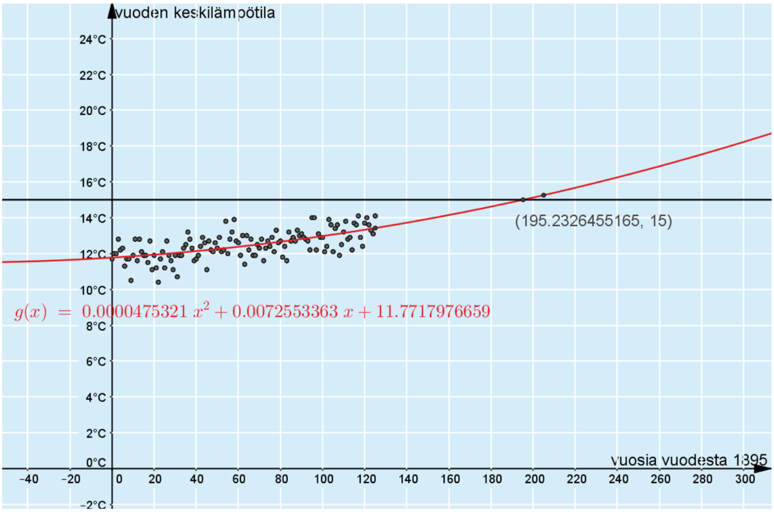
Tutkitaan 2. asteen polynomifunktion antamat ennusteet.
Vuonna 2020 vuodesta 1895 oli kulunut 2020 − 1895 = 125 vuotta ja vuonna 2100 vuodesta 1895 on kulunut 2100 − 1895 = 205 vuotta.

Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee pisteiden $x = 125$ ja $x = 205$ kautta, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.



Sekantin kulmakerroin on $k = 0{,}0229\ldots$, joten keskilämpötila nousee 2. asteen polynomisen mallin mukaan ajanjaksolla 2020–2100 keskimäärin 0,0229… °C ≈ 0,023 °C vuosittain.

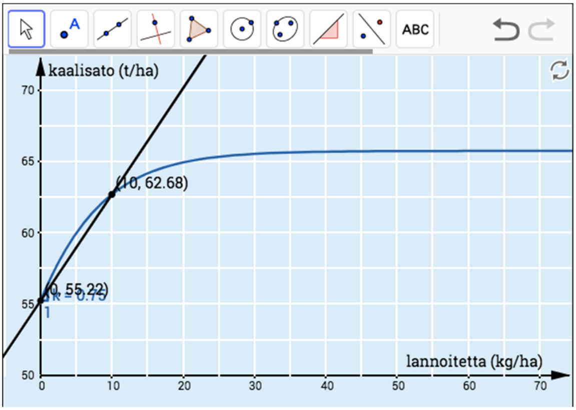
Etsitään ohjelman avulla funktion kuvaajan ja suoran $y = 15$ leikkauspiste.



Ohjelma antaa leikkauspisteeksi (195,232…; 15), joten 2. asteen polynomisen mallin mukaan keskilämpötila ylittää 15 °C vuonna 1895 + 195,232… = 2090,232… ≈ 2090.

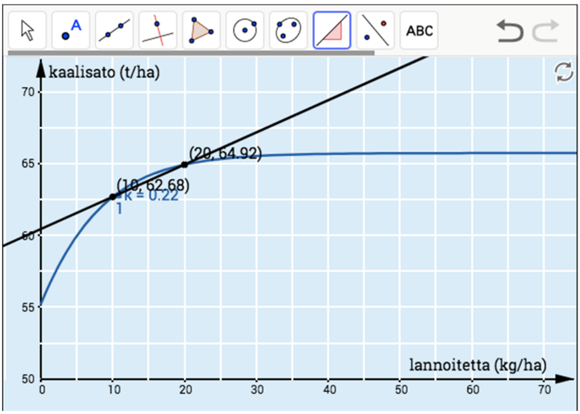
Vastaus: 1. asteen polynomifunktio: 0,013 °C/vuosi, vuonna 2149;
2. asteen polynomifunktio: 0,023 °C/vuosi, vuonna 2090

124. **a)** Määritetään appletin avulla sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 10]. Muutosnopeus on kohtien $x = 0$ ja $x = 10$ kautta piirretyn sekantin kulmakerroin.



Appletin avulla kulmakertoimeksi saadaan $k = 0{,}75$, joten sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 10] on 0,75 tonnia/kg.

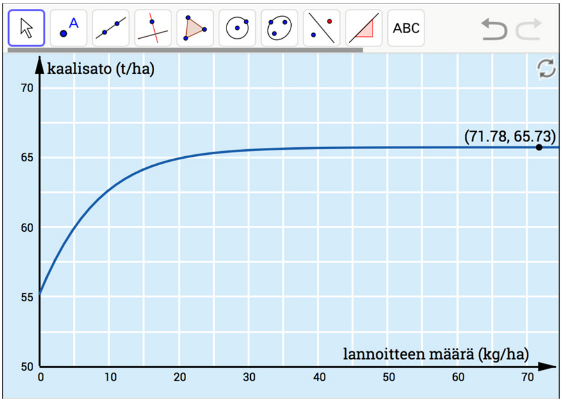
Määritetään vastaavalla tavalla sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä [10, 20].



Appletin avulla kohtien $x = 10$ ja $x = 20$ kautta kulkevan sekantin kulmakertoimeksi saadaan $k = 0{,}22$, joten sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä [10, 20] on 0,22 tonnia/kg.

Vastaus: 0,75 tonnia/kg ja 0,22 tonnia/kg

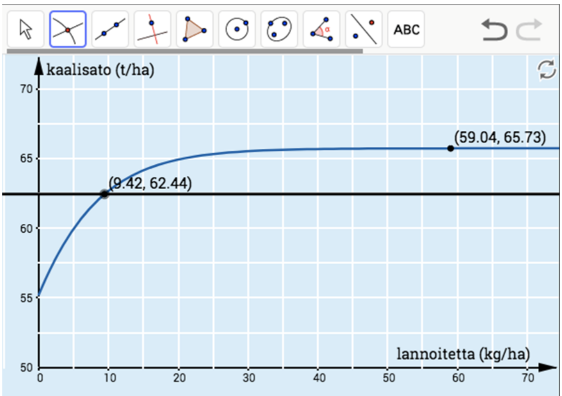
b) Funktion kuvaajan perusteella sadon suurin mahdollinen määrä näyttäisi olevan 65,73 tonnia/ha ≈ 66 tonnia/ha.



Vastaus: n. 66 tonnia/ha

c) Tavoitesato on 95 % maksimaalisesta sadosta, eli
0,95 · 65,73 tonnia/ha = 62,443… tonnia/ha.

Piirretään suora $y = 62{,}443\ldots$ ja määritetään appletin avulla suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste.

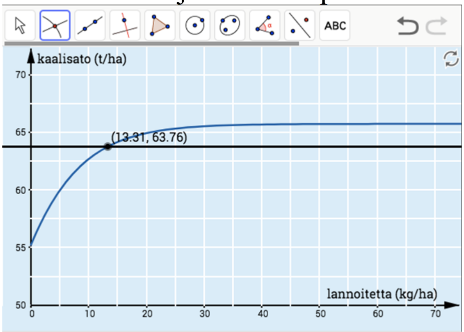


Leikkauspisteen x-koordinaatti on 9,42, joten jotta tavoitesato saataisiin, pitäisi lannoittaa 9,42 kg/ha ≈ 9,4 kg/ha.

Vastaus: 9,4 kg/ha

d) Tavoitesato on 97 % maksimaalisesta sadosta, eli
0,97 · 65,73 tonnia/ha = 63,758… tonnia/ha.

Piirretään suora y = 63,758 ja määritetään appletin avulla suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste.



Leikkauspisteen x-koordinaatti on 13,31, joten jotta tavoitesato saataisiin, pitäisi lannoittaa 13,31 kg/ha ≈ 13,3 kg/ha.

Vastaus: 13,3 kg/ha

e) Tuotto saadaan vähentämällä tuloista menot. Tulot saadaan kaalin myynnistä. Kaalitonnin hinta on 550 €. Menot aiheutuvat fosforilannoitteen määrästä. Lannoitekilo maksaa 2 €.

Tarkastellaan ensin 95 %:n tavoitesatoa.
Tulot: 62,443… · 550 € = 34 343,925 € ≈ 34 343,93 €
Menot: 9,42 · 2 € = 18,84 €

Tuotto on siis 34 343,93 € − 18,84 € = 34 325,09 €.

Tarkastellaan sitten 97 %:n tavoitesatoa.
Tulot: 63,758… · 550 € = 35 066,955 € ≈ 35 066,96 €
Menot: 13,31 · 2 € = 26,62 €

Tuotto on siis 35 066,96 € − 26,62 € = 35 040,34 €.

Lannoitusmäärän nostamisella saadaan
35 040,34 € − 34 325,09 € = 715,25 €:n tuotto.

Vastaus: 715,25 €

125. **a)** Koska funktion f keskimääräinen muutosnopeus on kaikilla väleillä 2, niin funktion f kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 2. Funktion f lauseke on siis muotoa $f(x) = 2x + b$.

Sijoitetaan funktion f lausekkeeseen $x = 5$ ja $f(5) = -1$. Ratkaistaan vakiotermi b yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} -1 &= 2 \cdot 5 + b \\ -1 &= 10 + b \\ b &= -1 - 10 \\ b &= -11 \end{aligned}$$

Vastaus: $f(x) = 2x - 11$

b) Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, joten sen lauseke on muotoa $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Koska $f(0) = -1$, joten sijoitetaan funktion f lausekkeeseen $x = 0$ ja $f(0) = -1$ ja muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} -1 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ c &= -1 \end{aligned}$$

Funktion f lauseke on siis muotoa $f(x) = ax^2 + bx - 1$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 2] on 1, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} &= 1 \quad |\cdot 2 \\ f(2) - f(0) &= 2 \\ (a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 1) - (a \cdot 0^2 + b \cdot 0 - 1) &= 2 \\ 4a + 2b - 1 + 1 &= 2 \\ 4a + 2b &= 2 \end{aligned}$$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [2, 4] on 4, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} &= 4 \quad |\cdot 2 \\ f(4) - f(2) &= 8 \\ (a \cdot 4^2 + b \cdot 4 - 1) - (a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 1) &= 8 \\ 12a + 2b - 1 + 1 &= 8 \\ 12a + 2b &= 8 \end{aligned}$$

Muodostetaan edellä saaduista yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan siitä a ja b.

$$\begin{cases} 4a + 2b = 2 \\ 12a + 2b = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Funktion f lauseke on siis $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$.

Vastaus: $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$.

1.2 Hetkellinen muutosnopeus

ALOITA PERUSTEISTA

126. **a)** Kuvasta nähdään, että kuvaajalle kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 2. Funktion f derivaatta kohdassa $x = 3$ on siis 2.

Vastaus: 2

b) Kuvasta nähdään, että kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on −2. Funktion f derivaatta kohdassa $x = -1$ on siis −2.

Vastaus: −2

127. **a)** Kuvan perusteella pisteet $(-1, -2)$ ja $(0, 4)$ ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on $\frac{4-(-2)}{0-(-1)} = \frac{6}{1} = 6$, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = -1$ on 6.

Vastaus: 6

b) Kuvan perusteella pisteet $(1, 0)$ ja $(2, -2)$ ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on $\frac{-2-0}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 1$ on −2.

Vastaus: −2

128. **a)** Kuvan perusteella pisteet (100, 5) ja (120, 6) ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 55$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on siis

$$\frac{6-5}{120-100}=\frac{1}{20}=0{,}05,$$

joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 55$ on 0,05.

Kuvan perusteella pisteet (40, 0) ja (60, 2) ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 105$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on siis

$$\frac{2-0}{60-40}=\frac{2}{20}=0{,}1,$$

joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 105$ on 0,1.

Vastaus: 0,05 ja 0,1

b) Tulokset tarkoittavat, että vuonna 1955 maailman väkiluvun kasvunopeus oli 0,05 miljardia eli 50 miljoonaa vuodessa, ja vuonna 2005 kasvunopeus oli 0,1 miljardia eli 100 miljoonaa vuodessa.

Vastaus: Vuonna 1955 maailman väkiluvun kasvunopeus oli 50 miljoonaa vuodessa, ja vuonna 2005 kasvunopeus oli 100 miljoonaa vuodessa.

129. Kuvaajalle kohtiin $x = -2$ ja $x = 1$ piirretyt tangentit ovat x-akselin suuntaisia, joten niiden kulmakerroin on 0. Funktion f derivaatta on siis molemmissa kohdissa 0.

Vastaus: 0 ja 0

130. **a)** Kuvaajan perusteella lämpötila laskee noin klo 0–6 ja 17–24 ja nousee noin klo 6–17.

Vastaus: laskee n. klo 0–6 ja n. klo 17–24, nousee n. klo 6–17

b) Kuvan perusteella pisteet (7; 13,9) ja (17, 20) ovat funktion *f* kuvaajalle kohtaan $x = 7$ piirretyllä tangentilla.

Tangentin kulmakerroin on $k = \dfrac{20-13{,}9}{17-7} = \dfrac{6{,}1}{10} = 0{,}61$,
joten funktion *f* derivaatta kohdassa $x = 7$ on 0,61.

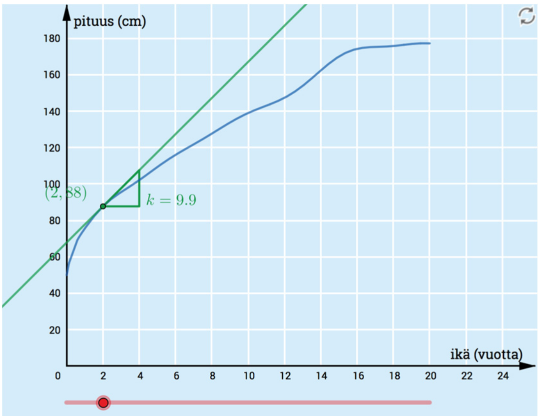
Kuvan perusteella pisteet (18, 20) ja (21; 14,6) ovat funktion *f* kuvaajalle kohtaan $x = 21$ piirretyllä tangentilla.

Tangentin kulmakerroin on $k = \dfrac{14{,}6-20}{21-18} = \dfrac{-5{,}4}{3} = -1{,}8$,
joten funktion *f* derivaatta kohdassa $x = 21$ on −1,8.

Tulokset tarkoittavat, että klo 7.00 lämpötila nousi 0,61 °C/ h ja klo 21.00 lämpötila laski 1,8 °C/h.

Vastaus: 0,61 ja −1,8; klo 7.00 lämpötila nousi 0,61 °C/h ja klo 21.00 lämpötila laski 1,8 °C/h

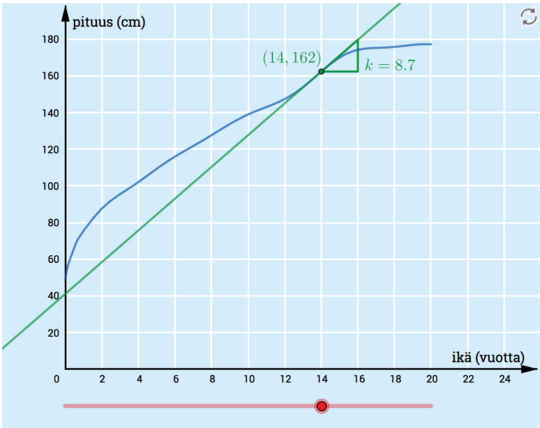
131. **a)** Siirretään tangentti kohtaan $x = 2$.



Henkilön pituus 2-vuotiaana oli noin 88 cm.
Kohdassa $x = 2$ tangentin kulmakerroin on $k = 9{,}9 \approx 10$. Henkilön kasvunopeus 2-vuotiaana on noin 10 cm/vuosi.

Vastaus: 88 cm, 10 cm/vuosi

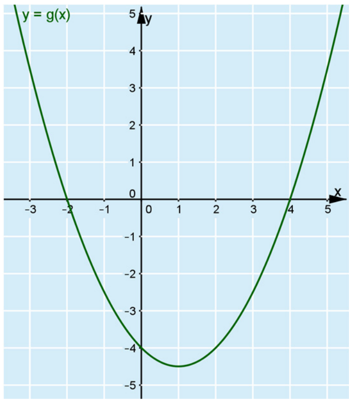
b) Ikävuosien 10 ja 20 välillä henkilö näyttäisi kasvavan nopeimmin noin 14-vuotiaana. Siirretään tangentti kohtaan $x = 14$.



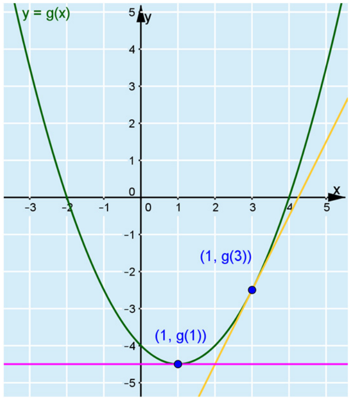
Kohdassa $x = 14$ tangentin kulmakerroin on $k = 8{,}7 \approx 9$. Henkilö kasvoi nopeimmin noin 14-vuotiaana, jolloin kasvunopeus oli noin 9 cm/vuosi.

Vastaus: 14-vuotiaana, 9 cm/vuosi

132. **a)** Piirretään funktion $g(x) = 0{,}5x^2 - x - 4$ kuvaaja sopivalla ohjelmalla.



b) Piirretään ohjelman avulla funktion g kuvaajalle tangentit kohtiin $x = 1$ ja $x = 3$.

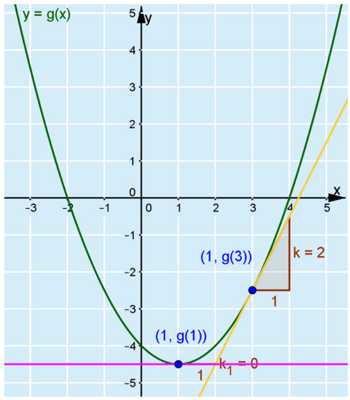


c) Määritetään b-kohdassa piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ohjelman avulla.

Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 0. Funktion f derivaatta kohdassa $x = 1$ on siis 0.

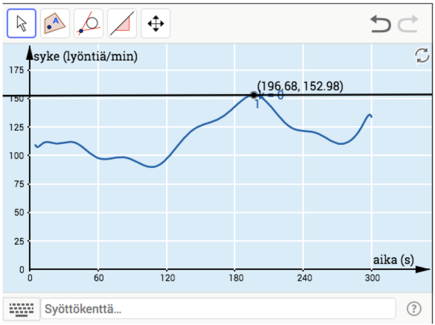
Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin 2. Funktion f derivaatta kohdassa $x = 3$ on siis 2.

Vastaus: 0 ja 2



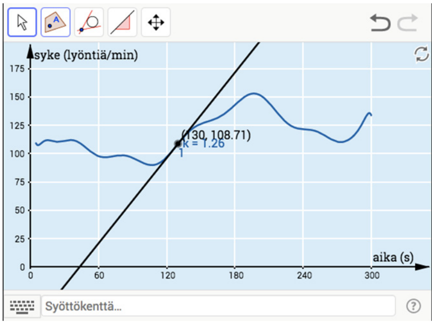
VAHVISTA OSAAMISTA

133. **a)** Syke on korkeimmillaan noin 153 lyöntiä/minuutti.



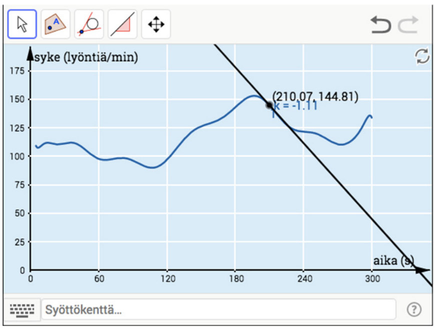
Vastaus: n. 153 lyöntiä/min

b) Aika sekunteina on 2 min 10 s = 2 · 60 s + 10 s = 130 s.
Syke nousee hetkellä 130 s noin 1,3 lyöntiä minuutissa.



Vastaus: n. 1,3 lyöntiä/min

c) Aika sekunteina on 3 min 30 s = 3 · 60 s + 30 s = 210 s.
Syke alenee hetkellä 210 s noin 1,1 lyöntiä minuutissa.



Vastaus: n. 1,1 lyöntiä/min

134. **a)** Kuvaaja nousee kohdassa A jyrkemmin kuin kohdassa B, joten Hilla kulkee nopeammin hetkellä A.

Vastaus: ajanhetkellä A

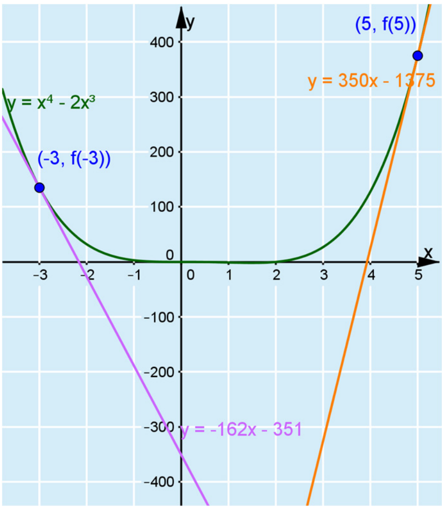
b) Juuri ennen hetkeä C kuvaaja nousee eli Hilla liikkuu. Hetken C jälkeen kuvaaja on x-akselin suuntainen, joten Hilla ei liiku. Hetkellä C Hilla siis pysähtyy.

Vastaus: Hilla pysähtyy.

c) Hetkestä C hetkeen D kuvaaja on aika-akselin suuntainen, eli kuljettu matka ei muutu. Hilla on siis tuon ajan paikallaan.

Vastaus: Hilla ei liiku.

135. Piirretään funktion $g(x) = x^4 - 2x^3$ kuvaaja ja sille tangentit kohtiin $x = 5$ ja $x = -3$.



Kohtaan $x = 5$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 350, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 5$ on 350.

Kohtaan $x = -3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on -162, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = -3$ on -162.

Vastaus: 350 ja -162

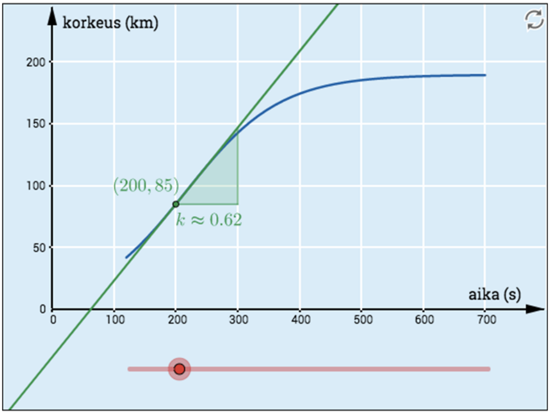
136. **a)** Kuvan perusteella pisteet (0, 6) ja (1, 0) ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 0$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on $k = \frac{0-6}{1-0} = -6,$ joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 0$ on −6.

Vastaus: −6

b) Kuvan perusteella kohtiin $x = -2$ ja $x = 3$ piirretyt tangentit ovat x-akselin suuntaisia, joten niiden kulmakerroin on 0. Siis funktion f derivaatta on 0 kohdissa $x = -2$ ja $x = 3$.

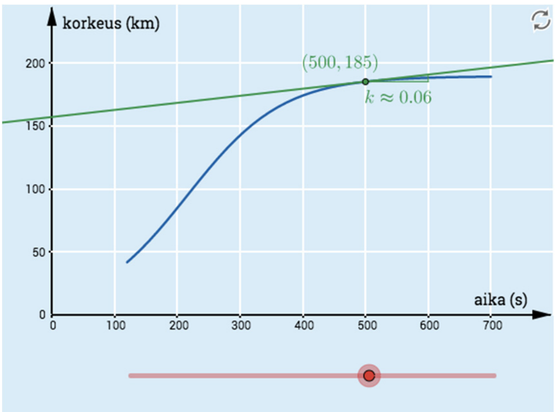
Vastaus: $x = -2$ ja $x = 3$

137. **a)** Siirretään tangentti kohtaan $x = 200$.



Funktion derivaatta kohdassa $x = 200$ on tangentin kulmakerroin $k \approx 0{,}62$.

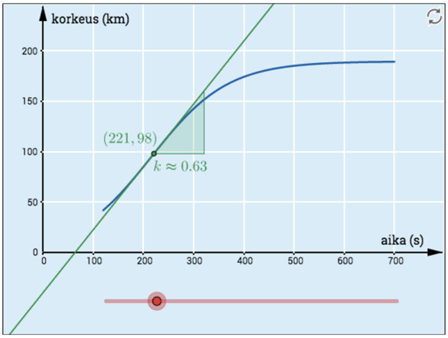
Siirretään tangentti kohtaan $x = 500$.

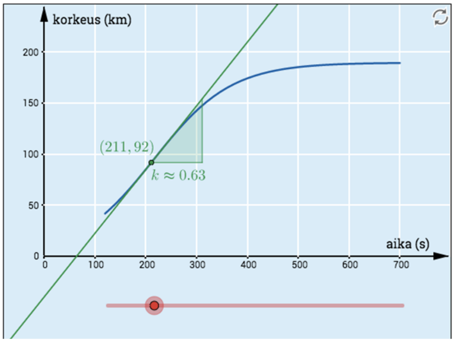


Funktion derivaatta kohdassa $x = 500$ on tangentin kulmakerroin $k \approx 0{,}06$.

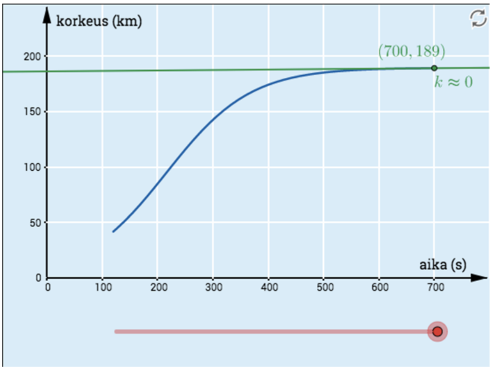
Vastaus: n. 0,62 ja n. 0,06

b) Funktion *f* derivaatta on suurin siinä kohdassa, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on suurin. Appletin mukaan tangentin kulmakerroin on suurin, kun tangentti on piirretty kuvaajan pisteeseen, jonka *x*-koordinaatti on välillä [211, 221].





Funktion *f* derivaatta on pienin siinä kohdassa, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on pienin. Appletin mukaan tangentin kulmakerroin on pienin, kun tangentti on piirretty kuvaajan pisteeseen, jonka *x*-koordinaatti on suurempi kuin 687.



Vastaus: suurin aikavälillä 211 s–221 s, pienin, kun aikaa on kulunut yli 687 s

c) Derivaatta näyttää ajan kuluessa lähestyvän arvoa 0.

Vastaus: lähestyy nollaa

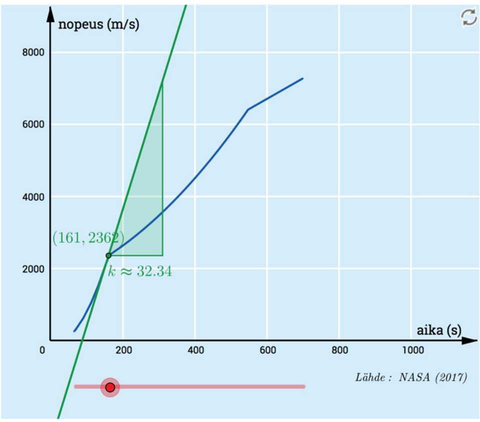
d) Kohdan a tulos tarkoittaa, että ajanhetkellä 200 s raketti etääntyy maasta 0,62 km sekunnissa ja ajanhetkellä 500 s 0,06 km sekunnissa.

Kohdan b tulos tarkoittaa, että raketin korkeus maanpinnasta kasvaa nopeimmin aikavälillä 211 s–220 s ja hitaimmin, kun aikaa on kulunut yli 687 s.

Kohdan c mukaan raketti ei enää etäänny maanpinnasta.

Vastaus: a-kohta: Ajanhetkellä 200 s raketti etääntyy maasta 0,62 km sekunnissa ja ajanhetkellä 500 s 0,06 km sekunnissa. b-kohta: Raketin etäisyys maanpinnasta kasvaa nopeimmin aikavälillä 211 s–221 s ja hitaimmin, kun aikaa on kulunut yli 687 s. c-kohta: Raketti ei enää etäänny maanpinnasta.

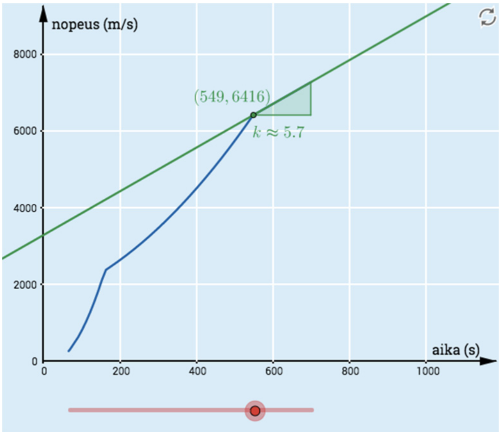
138. **a)** Nopeuden kasvu on suurin kohdassa, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on suurin. Appletin mukaan tämä kohta on $x \approx 161$.



Nopeuden kasvu on suurin ajanhetkellä noin 161 s.

Vastaus: n. 161 s

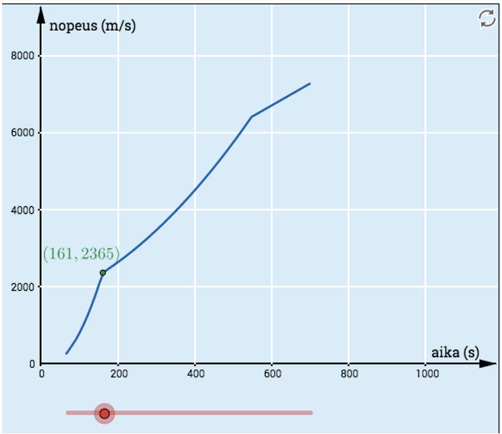
b) Nopeuden kasvu on pienin kohdassa, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on pienin. Appletin mukaan pienin kulmakerroin on tangenteilla ajanhetken x = 549 jälkeen.

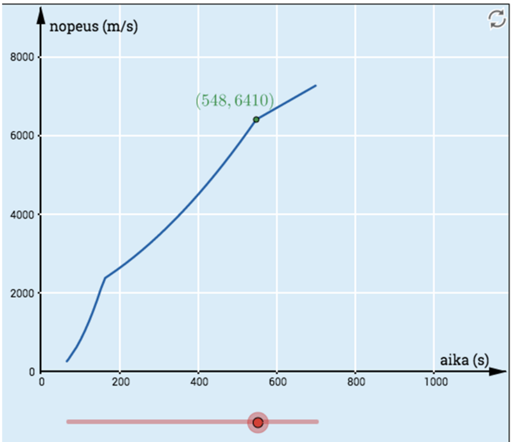


Nopeuden kasvu on pienin ajanhetkestä 549 s eteenpäin.

Vastaus: ajanhetkestä 549 s eteenpäin

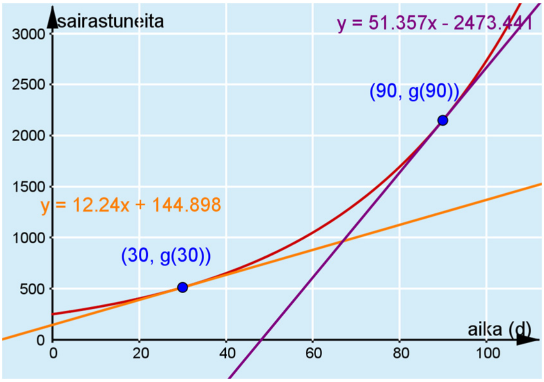
c) Ajanhetkinä $x = 161$ ja $x = 548$ kuvaajassa on terävät kärjet. Näihin voidaan piirtää useita tangentteja, joten derivaattaa ei voi määrittää ajanhetkinä $x = 161$ ja $x = 548$.





Vastaus: Derivaattaa ei ole ajanhetkillä 161 s ja 548 s.

139. **a)** Koska kesäkuun alusta syyskuun loppuun on 30 + 31 + 31 + 30 = 122 päivää, malli on järkevä välillä $0 \leq x \leq 1220$. Piirretään funktion $g(x) = 250 \cdot 2^{\frac{x}{29}}$, jossa $0 \leq x \leq 122$, ja piirretään kuvaajalle tangentit kohtiin $x = 30$ ja $x = 90$.



Kohtaan $x = 30$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 12,24, joten funktion g derivaatta kohdassa $x = 30$ on 12,24.

Kohtaan $x = 90$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 51,357, joten funktion g derivaatta kohdassa $x = 90$ on 51,357.

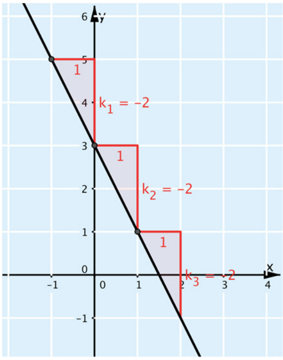
Tulokset tarkoittavat, että 30 vuorokauden kohdalla tartunnan saaneiden määrä kasvoi $12{,}24 \approx 12$ henkilöllä vuorokaudessa ja 90 vuorokauden kohdalla $51{,}357 \approx 51$ henkilöllä vuorokaudessa.

Vastaus: 12 ja 51, tartunnan saaneiden määrä kasvoi 12 henkilöllä ja 51 henkilöllä päivässä

b) Kuvaaja on jyrkin tutkittavan ajanjakson lopussa eli hetkellä $x = 122$. Tämä vastaa syyskuun loppua.

Vastaus: syyskuun lopussa

140. **a)** Piirretään funktion $f(x) = -2x + 3$ kuvaaja sopivalla ohjelmalla. Piirretään kuvaajalle tangentit kohtiin $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 1$. Määritetään tangenttien kulmakertoimet ohjelman avulla.



Tangenttien kulmakertoimet ovat −2, joten funktion f derivaatta kohdissa $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 1$ on −2.

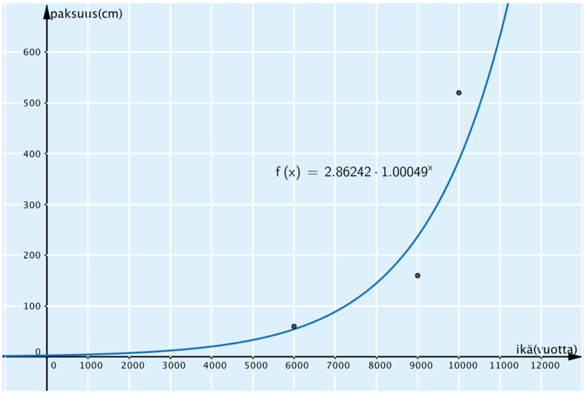
Vastaus: −2, −2 ja −2

b) Kohdan a mukaan suoralle piirretty tangentti on suora itse, joten tangentin kulmakerroin on sama kuin suoran kulmakerroin.

Funktion $g(x) = kx + b$ kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on k. Funktiolle mihin tahansa kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on k ja funktion f derivaatta jokaisessa kohdassa on siis k.

Vastaus: k

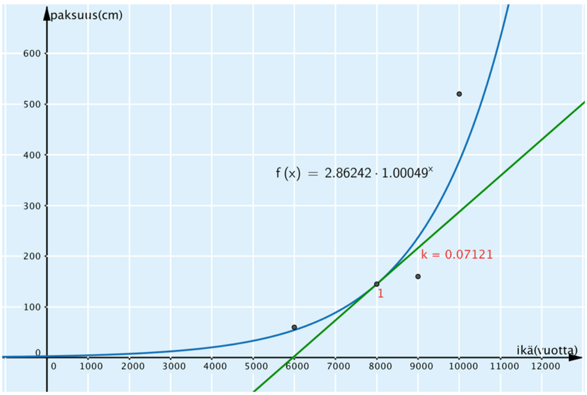
141. Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



Eksponentiaaliseksi malliksi saadaan $f(x) = 2{,}86242 \cdot 1{,}00049x$.

Lampi on 10 000 vuotta vanha, joten 2000 vuotta sitten sen ikä oli 10 000 − 2000 = 8000 vuotta.

Piirretään funktion kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 8000$ ja määritetään tangentin kulmakerroin.

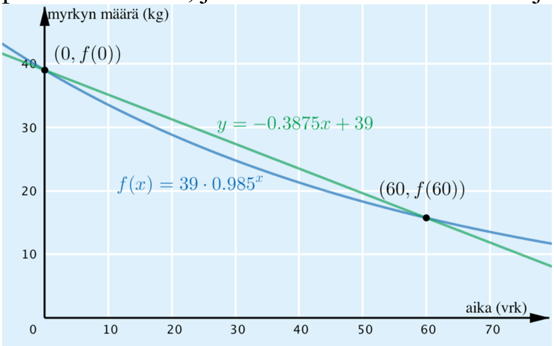


Tangentin kulmakertoimeksi saadaan $k = 0{,}07121$.
Pohjasedimentin paksuus kasvoi siis 2000 vuotta sitten nopeudella 0,07121 cm = 0,7121 mm ≈ 0,7 mm vuodessa.

Vastaus: $f(x) = 2{,}86242 \cdot 1{,}00049^x$, 0,7 mm:n vuosinopeudella

142. Eksponentiaalisen mallin alkuperäinen arvo on 39 ja muutoskerroin $100\ \% - 1{,}5\ \% = 98{,}5\ \% = 0{,}985$.
Malli on siis $f(x) = 39 \cdot 0{,}985^x$.

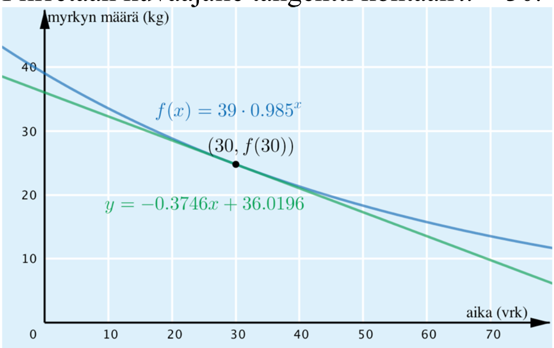
a) Piirretään funktion f kuvaaja ja piirretään kuvaajalle sekantti niiden pisteiden kautta, joiden x-koordinaatit ovat 0 ja 60.



Sekantin kulmakerroin on noin −0,39, joten järvessä olevan myrkyn määrä vähenee ensimmäisen 60 päivän aikana keskimäärin noin 0,39 kg = 390 g vuorokaudessa.

Vastaus: 390 g/vrk

b) Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 30$.



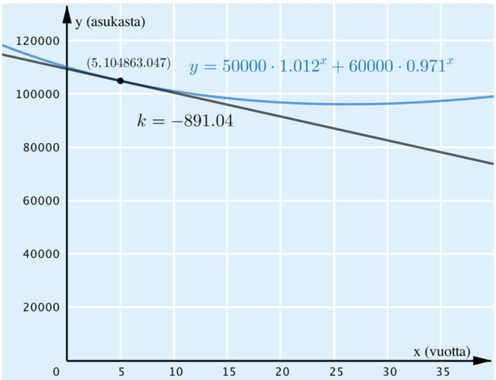
Tangentin kulmakerroin on noin −0,37, joten 30 vuorokauden kuluttua onnettomuudesta myrkyn määrä vähenee noin 0,37 kg = 370 g vuorokaudessa.

Vastaus: 370 g/vrk

143. **a)** Kaupungin A väkiluku kasvaa vuodessa 1,2 %, joten väkiluku tulee 1,012-kertaiseksi vuosittain.
Kaupungin B väkiluku vähenee vuodessa 2,9 %, joten väkiluku tulee 0,971-kertaiseksi vuosittain.

Kaupungin A väkilukua kuvaa lauseke $50\,000 \cdot 1{,}012^x$ ja kaupungin B väkilukua $60\,000 \cdot 0{,}971^x$. Muodostetaan funktio kaupunkien yhteenlasketulle väkiluvulle.
$f(x) = 50\,000 \cdot 1{,}012^x + 60\,000 \cdot 0{,}971^x$

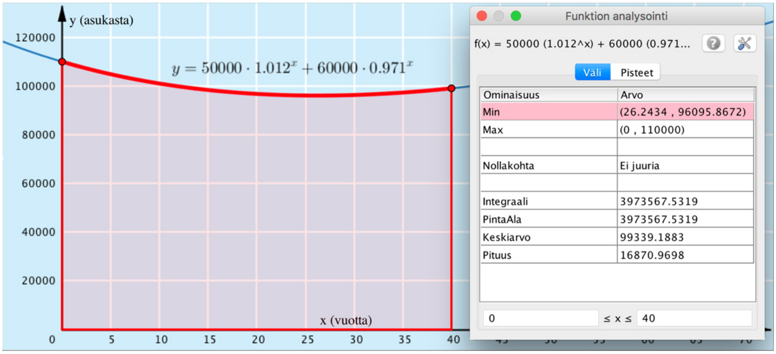
Piirretään funktion kuvaaja sopivalla ohjelmalla. Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 5$ ja määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakerroin on $k = -891{,}04$, joten kaupunkien yhteenlaskettu väkiluku vähenee noin 890 asukasta vuodessa.

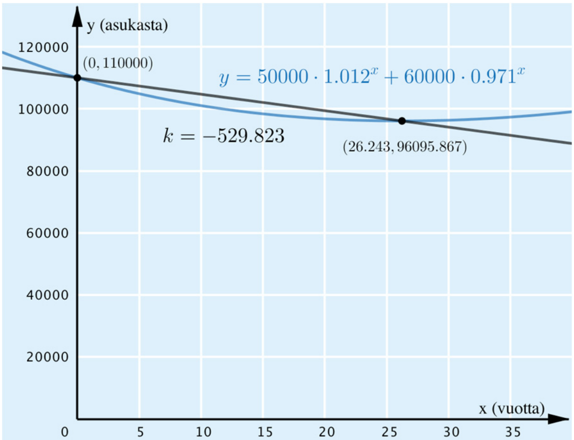
Vastaus: 890 asukasta/vuosi

b) Määritetään ohjelman funktion analysointi -toiminnolla kohta, jossa väkiluku on alhaisimmillaan.



Väkiluku on alhaisimmillaan 26,243… vuoden kuluttua, joten kaupunkien yhteenlaskettu väkiluku vähenee noin 26 vuoden ajan.

Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 0$ ja $x = 26{,}243$ kautta ja määritetään sekantin kulmakerroin.



Sekantin kulmakerroin on $k = -529{,}82$, joten kaupunkien yhteenlaskettu väkiluku vähenee keskimäärin noin 530 asukasta vuodessa.

Vastaus: 26 vuoden ajan, 530 asukasta/vuosi

144. a)

Aika x (s)	0	2,89	4,64	6,31	7,92	9,58
Matka y (m)	0	20	40	60	80	100

Lasketaan koko matkan keskinopeus. Muutetaan metrit kilometreiksi jakamalla 100:lla ja sekunnit tunneiksi jakamalla 3600:lla.

$$\frac{100\text{ m}}{9{,}58\text{ s}} = \frac{0{,}1\text{ km}}{\frac{9{,}58}{3600}\text{ h}} = 37{,}578\ldots\text{km/h} \approx 37{,}6\text{ km/h}$$

Vastaus: 37,6 km/h

b)

Aika x (s)	0	2,89	4,64	6,31	7,92	9,58
Matka y (m)	0	20	40	60	80	100

Lasketaan keskinopeudet eri välimatkoilla.

$$\frac{20\text{ m} - 0\text{ m}}{2{,}89\text{ s} - 0\text{ s}} = \frac{20\text{ m}}{2{,}89\text{ s}} = \frac{0{,}02\text{ km}}{\frac{2{,}89}{3600}\text{ h}} = 24{,}913\ldots\text{km/h} \approx 24{,}9\text{ km/h}$$

$$\frac{40\text{ m} - 20\text{ m}}{4{,}64\text{ s} - 2{,}89\text{ s}} = \frac{20\text{ m}}{1{,}75\text{ s}} = \frac{0{,}02\text{ km}}{\frac{1{,}75}{3600}\text{ h}} = 41{,}142\ldots\text{km/h} \approx 41{,}4\text{ km/h}$$

$$\frac{60\text{ m} - 40\text{ m}}{6{,}31\text{ s} - 4{,}64\text{ s}} = \frac{20\text{ m}}{1{,}67\text{ s}} = \frac{0{,}02\text{ km}}{\frac{1{,}67}{3600}\text{ h}} = 43{,}113\ldots\text{km/h} \approx 43{,}1\text{ km/h}$$

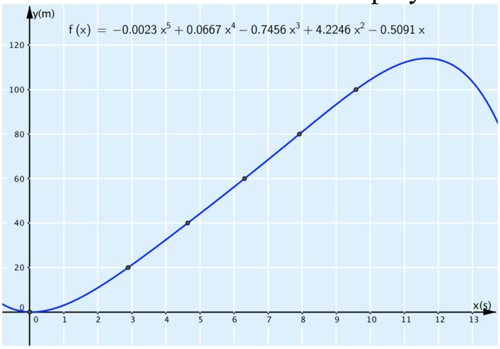
$$\frac{80\text{ m} - 60\text{ m}}{7{,}92\text{ s} - 6{,}31\text{ s}} = \frac{20\text{ m}}{1{,}61\text{ s}} = \frac{0{,}02\text{ km}}{\frac{1{,}61}{3600}\text{ h}} = 44{,}720\ldots\text{km/h} \approx 44{,}7\text{ km/h}$$

$$\frac{100\text{ m} - 80\text{ m}}{9{,}58\text{ s} - 7{,}92\text{ s}} = \frac{20\text{ m}}{1{,}66\text{ s}} = \frac{0{,}02\text{ km}}{\frac{1{,}66}{3600}\text{ h}} = 43{,}373\ldots\text{km/h} \approx 43{,}4\text{ km/h}$$

Havaitaan, että välimatkalla 60 m – 80 m Boltin keskinopeus on suurin 44,7 km/h. Koska kaikilla muilla osaväleillä keskinopeus on pienempi, ei keskinopeus voi olla tätä suurempi millään pidemmälläkään välimatkalla.

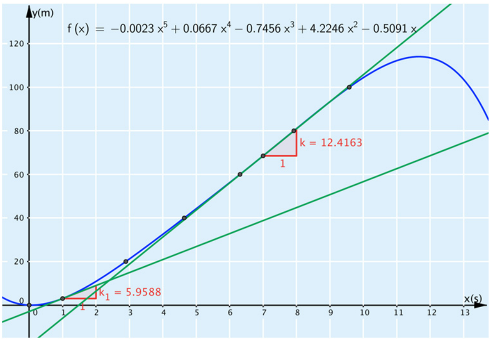
Vastaus: välimatkalla 60 m – 80 m, 44,7 km/h

c) Sovitetaan aineistoon 5. asteen polynomifunktio.



Funktion lauseke on
$f(x) = -0{,}0023x^5 + 0{,}0667x^4 - 0{,}7456x^3 + 4{,}2246x^2 - 0{,}5091x.$

Määritetään funktiolle kohtiin $x = 1$ ja $x = 7$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet.



Funktion derivaatta kohdassa $x = 1$ on 5,958… ≈ 5,96 ja kohdassa $x = 7$ on 12, 416… ≈ 12,42.

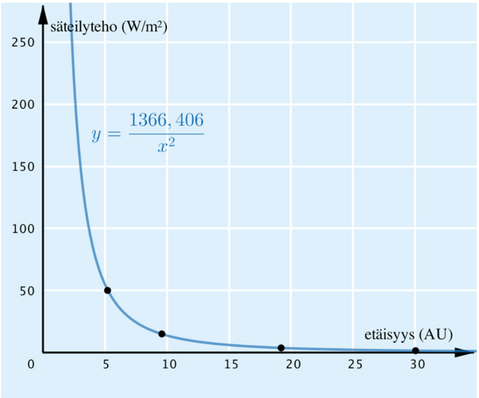
Kohdan derivaattojen erotus on
12,416… − 5,958… = 6,457… ≈ 6,46.

Boltin juoksunopeus kasvoi aikavälillä 1 s - 7 s yhteensä 6,46 m/s ≈ 23,3 km/h.

Vastaus: $f(x) = -0{,}0023x^5 + 0{,}0667x^4 - 0{,}7456x^3 + 4{,}2246x^2 - 0{,}5091x.$
Derivaatat ovat 5,96 ja 12,42 ja derivaattojen erotus 6,46.
Juoksunopeus kasvoi välillä [1 s, 7 s] yhteensä 6,46 m/s ≈ 23,3 km/h.

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

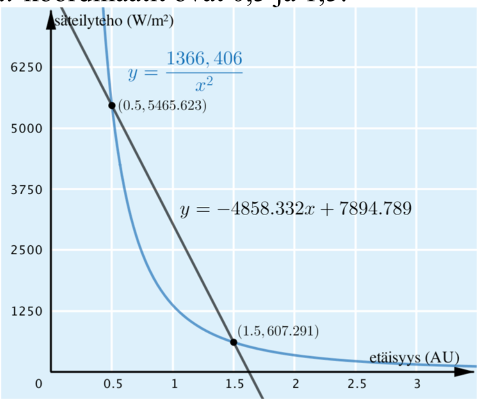
145. **a)** Sovitetaan aineistoon muotoa $f(x) = a\dfrac{1}{x^2}$ oleva funktio.



Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = \dfrac{1366,406}{x^2}$.

Vastaus: $f(x) = \dfrac{1366,406}{x^2}$

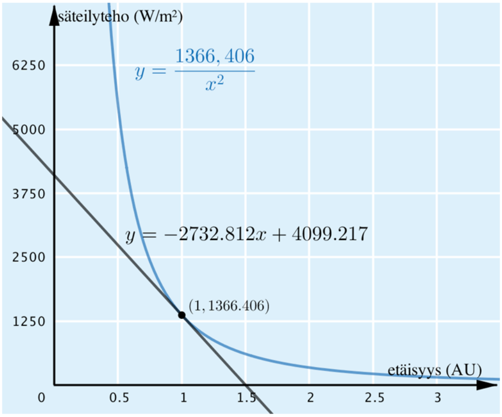
b) Piirretään funktion f kuvaajalle sekantti niiden pisteiden kautta, joiden x-koordinaatit ovat 0,5 ja 1,5.



Sekantin kulmakerroin on −4858,332, joten säteilyteho vähenee keskimäärin 4858,332 W/m^2 ≈ 4900 W/m^2 yhden AU:n etäisyyttä kohti.

Vastaus: 4900 W/m^2 yhden AU:n etäisyyttä kohti

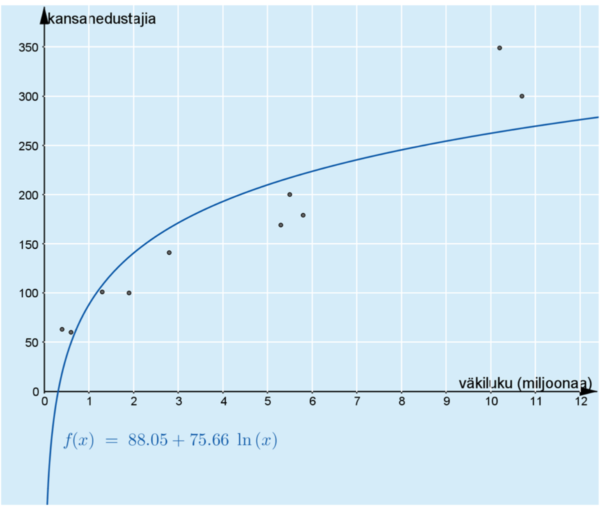
c) Piirretään funktion *f* kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 1$.



Tangentin kulmakerroin on −2732,812, joten funktion *f* derivaatta kohdassa $x = 1$ on −2732,812. Säteilyn voimakkuus vähenee siis Maan kohdalla 2732,812 ≈ 2700 W/m^2 yhden AU:n etäisyyttä kohti.

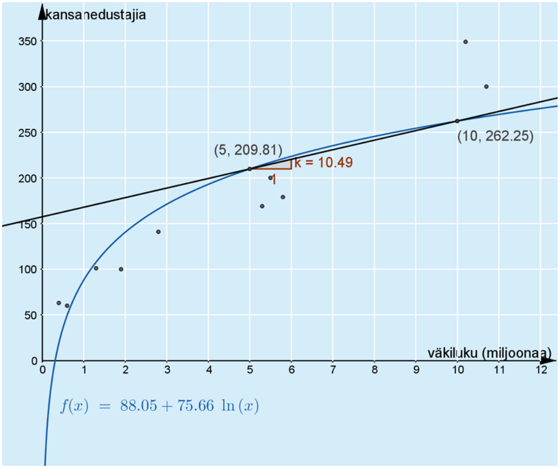
Vastaus: 2700 W/m^2 yhden AU:n etäisyyttä kohti

146. Sovitetaan aineistoon logaritminen funktio.



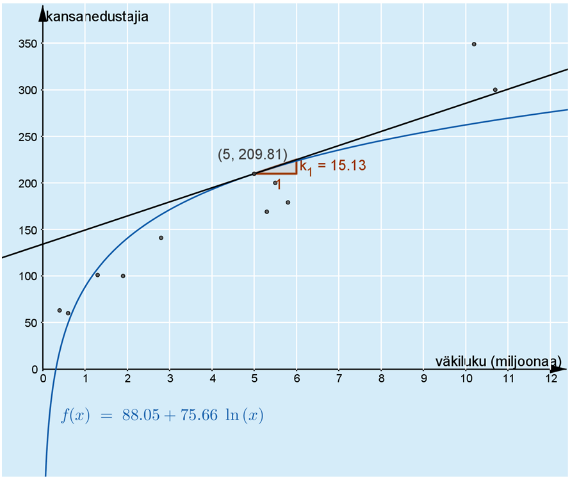
Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = 88{,}05 + 75{,}66 \ln x$.

Piirretään käyrälle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 5$ ja $x = 10$ kautta, ja määritetään sekantin kulmakerroin.



Sekantin kulmakerroin on 10,49, joten kansanedustajien määrä kasvaa noin 10 kansanedustajalla miljoonan asukkaan kasvua kohti.

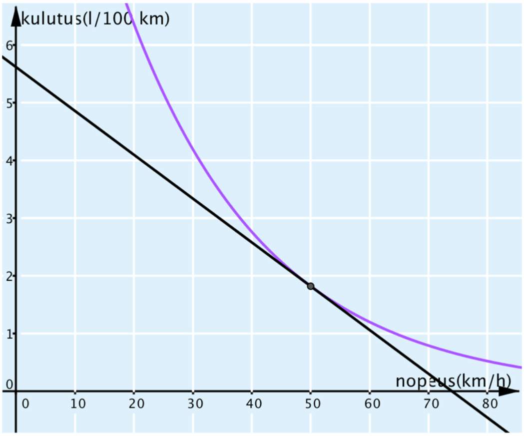
Piirretään käyrälle tangentti kohtaan $x = 5$, ja määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakerroin on 15,13, joten kansanedustajien määrän kasvunopeus on noin 15 kansanedustajaa/miljoonaa asukasta.

Vastaus: $f(x) = 88,05 + 75,66 \ln x$, 10 kansanedustajaa, 15 kansanedustajaa miljoonaa asukasta kohti

147. Koska derivaatta on negatiivinen kohdassa $x = 50$ (km/h), funktion kuvaajalle piirretty tangentti on laskeva suora. Hahmotellaan tilannetta kuvan avulla.



a) Funktion f derivaatta kohdassa $x = 50$ on negatiivinen, eli kuvaajalle kohtaan $x = 50$ piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen. Lyhyellä matkalla funktion kuvaaja kulkee likimain tangenttia pitkin. Koska tangentti on laskeva suora, niin suoran pisteen x-koordinaatin kasvaessa y-koordinaatti pienenee. Autoilijan kasvattaessa nopeutta hieman x-koordinaatti kasvaa, joten polttoaineen kulutus alenee.

Vastaus: vähenee

b) Funktion f derivaatta kohdassa $x = 50$ on negatiivinen, eli kuvaajalle kohtaan $x = 50$ piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen. Lyhyellä matkalla funktion kuvaaja kulkee likimain tangenttia pitkin. Koska tangentti on laskeva suora, niin suoran pisteen x-koordinaatin pienetessä y-koordinaatti kasvaa. Autoilijan alentaessa nopeutta hieman x-koordinaatti pienenee, joten polttoaineen kulutus kasvaa.

Vastaus: kasvaa

148. **a)** Funktio f ilmaisee kahvikupillisesta saadun myyntivoiton, kun muuttujana on kahvikupillisen hinta x euroina. Funktion derivaatta kuvaa kahvikupillisesta saadun myyntivoiton muutosta.

Kun $x = 3$, on kahvikupillisen hinta 3 €. Myyntivoitto saadaan, kun myyntituloista vähennetään menot. Menot yhtä kahvikupillista kohden eivät muutu hinnan noustessa, joten mitä suuremmaksi kahvikupin myyntihinta kasvaa, sitä enemmän myyntivoittoa yhdestä kahvikupillisesta saadaan.

Funktion derivaatta kohdassa $x = 3$ on siis positiivinen.

Vastaus: positiivinen

b) Funktio f ilmaisee kahvilassa myytyjen kahvikupillisten määrää, kun muuttujana on kahvikupillisen hinta x euroina. Funktion derivaatta kuvaa myytyjen kahvikupillisten määrän muutosta.

Kun $x = 3$, kahvikupillisen hinta on 3 €. Yleensä tuotteen hinnan noustessa tuotetta myydään vähemmän kuin ennen. Myyntimäärä siis vähenee tuotteen hinnan noustessa.

Funktion derivaatta kohdassa $x = 3$ on siis negatiivinen.

Vastaus: negatiivinen

149. Koska valaistusvoimakkuus y on kääntäen verrannollinen etäisyyden x neliöön, voidaan merkitä $y = \frac{k}{x^2}$, jossa k on vakio.

Ratkaistaan vakio k sekä lampulle A että lampulle B.

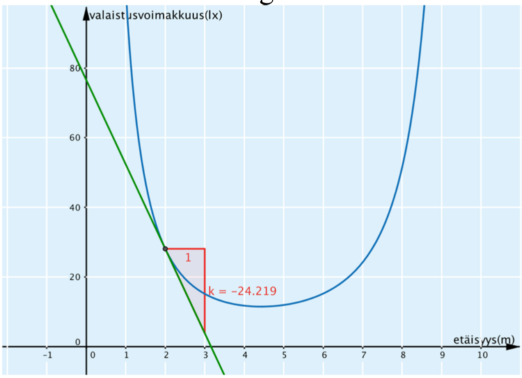
Lamppu A:
Koska valaistusvoimakkuus on 100 lx, kun etäisyys lampusta on 1 m, saadaan yhtälö $100 = \frac{k}{1^2}$, josta vakioksi k saadaan $k = 100$. Siis lampulle A on voimassa $y = \frac{100}{x^2}$, jossa x on etäisyys lampusta A.

Lamppu B:
Koska valaistusvoimakkuus on 200 lx, kun etäisyys lampusta on 1 m, saadaan yhtälö $200 = \frac{k}{1^2}$, josta vakioksi k saadaan $k = 200$. Siis lampulle B on voimassa $y = \frac{200}{x^2}$, jossa x on etäisyys lampusta B.

Merkitään kirjaimella x etäisyyttä metreinä lampusta A. Lamput ovat 10 metrin etäisyydellä toisistaan, joten etäisyys metreinä lampusta B merkitään silloin $10 - x$.

Lampun A aiheuttama valaistusvoimakkuus noudattaa lauseketta $y = \frac{100}{x^2}$ ja lampun B lauseketta $y = \frac{200}{(10-x)^2}$. Lamppujen yhteinen valaistusvoimakkuus noudattaa siis funktiota $f(x) = \frac{100}{x^2} + \frac{200}{(10-x)^2}$, jossa x on etäisyys lampusta A.

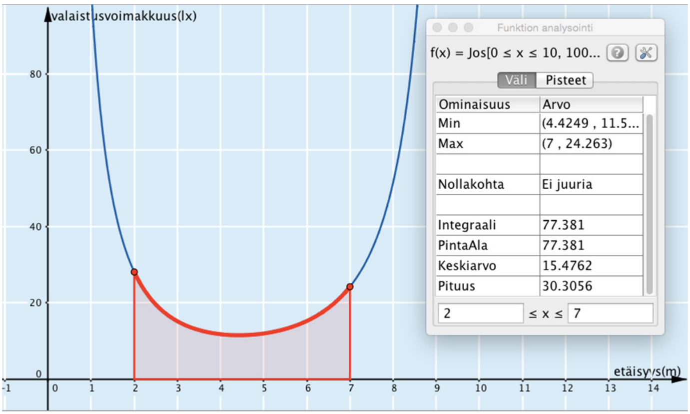
a) Piirretään funktion *f* kuvaaja välille [0, 10] ja sille tangentti kohtaan $x = 2$. Määritetään tangentin kulmakerroin.



Kulmakerroin on $k = -24{,}219$, joten valaistusvoimakkuus pienenee kahden metrin etäisyydellä lampusta A nopeudella 24,2 lx/m.

Vastaus: 24,2 lx/m

b) Määritetään funktion analysointi -toiminnolla kohta, jossa valaistusvoimakkuus on pienin.



Valaistusvoimakkuuden pienin arvo on kohdassa $x = 4{,}424\ldots$.
Etäisyys lampusta B on tällöin 10 m − 4,424… m = 5,575… m.

Henkilö pääsee noin 5,6 metrin päähän lampusta B.

Vastaus: 5,6 m:n päähän