KERTAUS

K1. **a)** Keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 2] saadaan laskemalla kohtia $x = 0$ ja $x = 2$ vastaavien kuvaajan pisteiden kautta piirretyn sekantin kulmakerroin.

Sekantti kulkee kuvan perustella pisteiden (0, −1) ja (2, 2) kautta, joten sekantin kulmakerroin on

$$k = \frac{2-(-1)}{2-0} = \frac{3}{2}.$$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 2] on $\frac{3}{2}$.

Vastaus: $\frac{3}{2}$

b) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 3$ saadaan laskemalla kohtaa $x = 3$ vastaavaan kuvaajan pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentti kulkee kuvan perusteella pisteiden (3, −2) ja (2, 1) kautta, joten tangentin kulmakerroin on

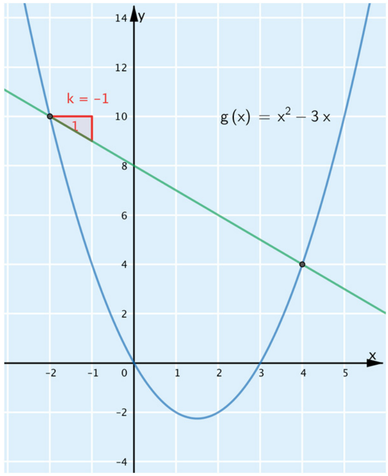
$$k = \frac{1-(-2)}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 3$ on −3.

Vastaus: −3

K2. **a)** Keskimääräinen muutosnopeus välillä [−2, 4] saadaan määrittämällä kohtia $x = -2$ ja $x = 4$ vastaavien kuvaajan pisteiden kautta kulkevan funktiolle g piirretyn sekantin kulmakerroin.

Piirretään ohjelmalla funktion g kuvaaja ja kuvaajalle sekantti kohtien $x = -2$ ja $x = 4$ kautta.

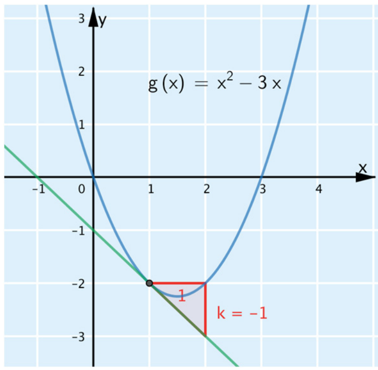


Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = -1$, joten funktion g keskimääräinen muutosnopeus välillä [−2, 4] on −1.

Vastaus: −1

b) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ saadaan määrittämällä funktion kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktiolle g tangentti kohtaan $x = 1$.



Ohjelma antaa tangentin kulmakertoimeksi $k = -1$, joten funktion g hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on −1.

Vastaus: −1

K3. Lasketaan kunnan asukasluvun keskimääräinen muutosnopeus, kun tiedetään, että vuonna 2016 asukkaita oli 10 097 ja vuonna 2020 asukkaita oli 9758.

Asukkaiden määrä muuttui 9758 – 10 097 = −339 asukkaalla, kun aikaa kului 2020 − 2016 = 4 vuotta.

Kunnan asukasluvun keskimääräinen muutosnopeus oli siis
$\frac{-339}{4} = -84,75 \approx -85$ asukasta/vuosi.

Vastaus: −85 asukasta/vuosi

K4. Koska funktion f derivaatta on kaikkialla $f'(x) = 2$, funktion f hetkellinen muutosnopeus on kaikkialla 2 ja funktion f kuvaaja suora, jonka kulmakerroin on $k = 2$. Funktion f lauseke on siis muotoa $f(x) = 2x + b$.

Koska $f(-3) = 5$, voidaan vakiotermi b ratkaista yhtälön avulla.

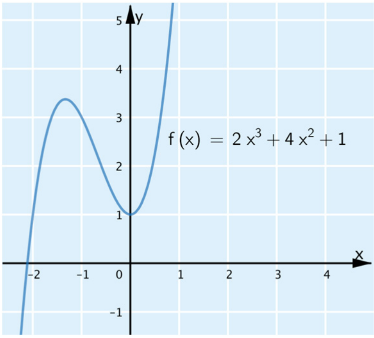
$$
\begin{aligned}
2 \cdot (-3) + b &= 5 \\
-6 + b &= 5 \\
b &= 11
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan $b = 11$ funktion lausekkeeseen $f(x) = 2x + b$, jolloin $f(x) = 2x + 11$.

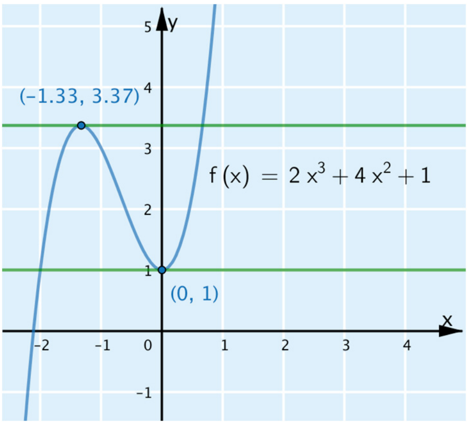
Lasketaan $f(4)$ sijoittamalla $x = 4$ funktion f lausekkeeseen.
$f(4) = 2 \cdot 4 + 11 = 19$

Vastaus: $f(4) = 19$

K5. Piirretään funktion $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 1$ kuvaaja.



a) Funktion f derivaatta on nolla niissä kohdissa, joissa funktion f kuvaajalle piirretyt tangentit ovat vaakasuoria. Piirretään funktiolle f vaakasuorat tangentit.



Kohtiin $x \approx -1{,}33$ ja $x \approx 0$ piirretyt tangentit ovat vaakasuoria. Funktion f derivaatta on nolla muuttujan arvoilla $x \approx -1{,}33$ ja $x \approx 0$.

Vastaus: $x \approx -1{,}33$ ja $x \approx 0$

b) Funktion f derivaatta on negatiivinen, kun funktion kuvaajalle piirretty tangentti on laskeva suora.

Kuvaajan perusteella jokaiseen kohtaan likimain välillä $-1{,}33 < x < 0$ piirretyt tangentit ovat laskevia suoria, joten funktion f derivaatta on negatiivinen, kun muuttuja on likimain välillä $-1{,}33 < x < 0$.

Vastaus: likimain, kun $-1{,}33 < x < 0$

c) Funktion f derivaatta on positiivinen, kun funktion kuvaajalle piirretty tangentti on nouseva suora.

Kuvaajan perusteella jokaiseen kohtaan likimain väleillä $x < -1{,}33$ ja $x > 0$ piirretyt tangentit ovat nousevia suoria, joten funktion f derivaatta on positiivinen, kun muuttuja on likimain väleillä $x < -1{,}33$ ja $x > 0$.

Vastaus: likimain, kun $x < -1{,}33$ ja $x > 0$

K6. **a)** $f(x) = -x + 3$
$f'(x) = -1 + 0 = -1$

b) $g(x) = x^2 + 4x + 4$
$g'(x) = 2x^{2-1} + 4 + 0 = 2x + 4$

b) $h(x) = 3x^4 - 6x^2 - 12$
$h'(x) = 3 \cdot 4x^{4-1} - 6 \cdot 2x^{2-1} - 0 = 12x^3 - 12x$

K7. **a)** Sievennetään lauseke ennen derivoimista.

$$\begin{aligned}(2x-1)(4-3x) &= 2x\cdot 4 + 2x\cdot(-3x) + (-1)\cdot 4 + (-1)\cdot(-3x)\\ &= 8x - 6x^2 - 4 + 3x\\ &= -6x^2 + 11x - 4\end{aligned}$$

Derivoidaan sievennetty lauseke.

$$D(-6x^2 + 11x - 4) = -6\cdot 2x^{2-1} + 11 - 0 = -12x + 11$$

Vastaus: $-12x + 11$

b) Sievennetään lauseke ennen derivoimista.

$$\frac{6t^3-12t^2}{3}=\frac{6t^3}{3}-\frac{12t^2}{3}=2t^3-4t^2$$

Derivoidaan sievennetty lauseke.

$$D(2t^3-4t^2)=2\cdot 3t^{3-1}-2\cdot 4t^{2-1}=6t^2-8t$$

Vastaus: $6t^2-8t$

K8. **a)** Derivoidaan funktio $f(x)=-3x^3+4x+2$.
$f'(x)=-9x^2+4$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x=1$ sijoittamalla $x=1$ derivaattafunktion lausekkeeseen.
$f'(1)=-9\cdot 1^2+4=-5$.

Vastaus: $f'(1)=-5$

b) Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x)=0$.

$$\begin{aligned}-9x^2+4&=0\\ -9x^2&=-4 \quad \|:(-9)\\ x^2&=\frac{4}{9}\\ x&=\pm\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat ovat $\pm\frac{2}{3}$.

Vastaus: $x=\pm\frac{2}{3}$

K9. **a)** Lasketaan $f(-2)$ sijoittamalla $x = -2$ funktioon $f(x) = x^2 + 4x + 2$.
$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$

Derivoidaan funktio $f(x) = x^2 + 4x + 2$.
$f'(x) = 2x + 4$

Lasketaan $f'(-2)$ sijoittamalla $x = -2$ funktioon $f'(x) = 2x + 4$.
$f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 4 = 0$

Vastaus: $f(-2) = -2$, $f'(-2) = 0$

b) Ratkaistaan yhtälö $f(x) = -2$.
$x^2 + 4x + 2 = -2$
$x^2 + 4x + 4 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 1$, $b = 4$ ja $c = 4$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$x = -2$$

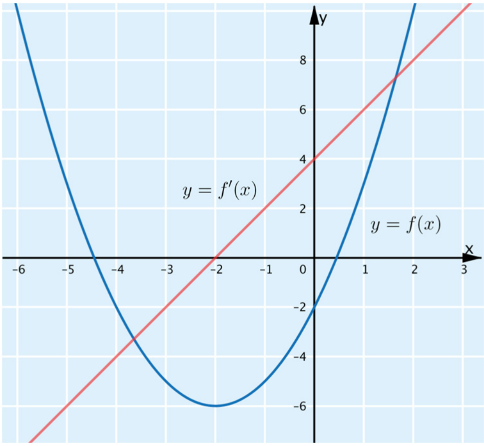
Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = -2$.

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= -2 \\ 2x &= -6 \quad \| : 2 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -2$, $x = -3$

K10. Derivoidaan funktio $f(x) = x^2 + 4x - 2$.
$f'(x) = 2x + 4$

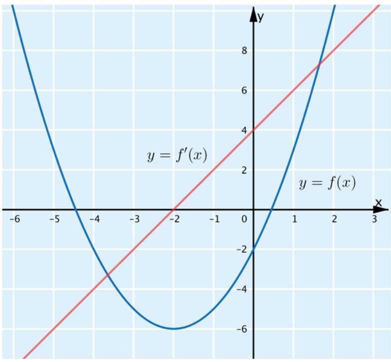
Piirretään funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon ohjelmalla.



Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
2x + 4 &= 0 \\
2x &= -4 \quad \|: 2 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

Vastaus:



, $x = -2$

K11. Tangentti on vaakasuorassa, kun sen kulmakerroin on 0. Kuvaajan kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo kyseisessä kohdassa. Paraabeli $y = x^2 - 3x + 4$ on funktion $f(x) = x^2 - 3x + 4$ kuvaaja.

Derivoidaan funktio f.
$f'(x) = 2x - 3$

Muodostetaan derivaattafunktion avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä kohta, jossa tangentti on vaakasuora.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \quad \|:2 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Pisteen x-koordinaatti on $\frac{3}{2}$.
Ratkaistaan pisteen y-koordinaatti x-koordinaatin ja funktion f avulla.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \\ &= \frac{9}{4} - {}^{2)}\frac{9}{2} + {}^{4)}\frac{4}{1} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{16}{4} \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Paraabelin pisteeseen $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ piirretty tangentti on vaakasuora.

Vastaus: $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$

K12. Tangentti on suora, jonka yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Selvitetään suoran yhtälön muodostamista varten suoran kulmakerroin k ja vakiotermi b. Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo siinä kohdassa, johon tangentti on piirretty, eli nyt $k = f'(-2)$.

Derivoidaan funktio $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

$f'(x) = -3x^2 - x + 1$

Kulmakerroin on $k = f'(-2) = -3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 1 = -9$.

Suoran yhtälö on siis $y = -9x + b$.

Ratkaistaan vakiotermi b sijoittamalla pisteen $(-2, 5)$ koordinaatit suoran yhtälöön.

$5 = -9 \cdot (-2) + b$
$b = 5 - 18$
$b = -13$

Tangentin yhtälö on $y = -9x - 13$.

Vastaus: $y = -9x - 13$

K13. Derivoidaan funktio $f(x) = -a^2x^2 + 6x$.
$f'(x) = -2a^2x + 6$

Derivaatalla on nollakohta $x = 3$, joten $x = 3$ toteuttaa yhtälön $-2a^2x + 6 = 0$.

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöön $-2a^2x + 6 = 0$, ja ratkaistaan vakio a.

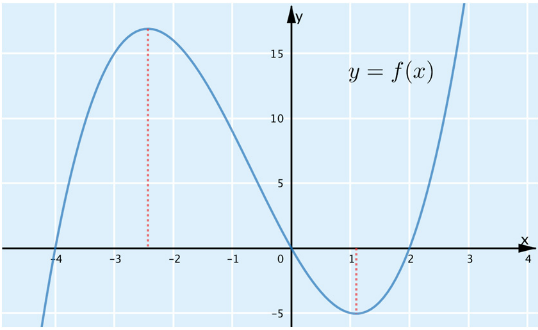
$$
\begin{aligned}
-2a^2x + 6 &= 0 \\
-2a^2 \cdot 3 + 6 &= 0 \\
-6a^2 + 6 &= 0 \\
-6a^2 &= -6 \qquad \| : (-6) \\
a^2 &= 1 \\
a &= \pm 1
\end{aligned}
$$

Vastaus: $a = \pm 1$

K14. **a)** Kuvan perusteella funktio on kasvava, kun vasemmalta oikealla luettaessa kuvaaja nousee ylöspäin, ja vastaavasti vähenevä, kun kuvaaja laskee alaspäin.

Kuvan perusteella funktio f on kasvava likimain, kun $x \leq -2{,}4$ tai $x \geq 1{,}1$.

Funktio f on vähenevä likimain, kun $-2{,}4 \leq x \leq 1{,}1$.

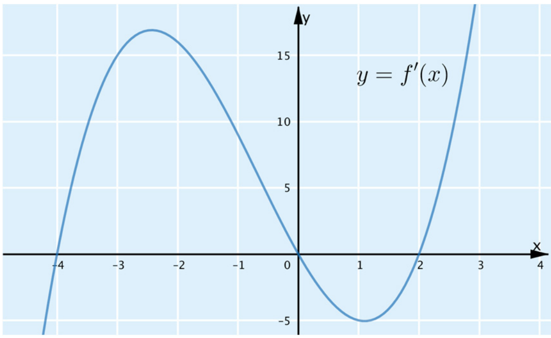


Vastaus: kasvava likimain, kun $x \leq -2{,}4$ tai $x \geq 1{,}1$, vähenevä likimain, kun $-2{,}4 \leq x \leq 1{,}1$

b) Kuvassa on funktion f derivaattafunktion f' kuvaaja. Funktio on kasvava, kun funktion derivaatta on positiivinen. Vastaavasti funktio on vähenevä, kun funktion derivaatta on negatiivinen.

Kuvan perusteella funktio f on kasvava likimain, kun $-4 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 2$.

Funktio f on vähenevä likimain, kun $x \leq -4$ tai $0 \leq x \leq 2$.



Vastaus: kasvava likimain, kun $-4 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 2$, vähenevä likimain, kun $x \leq -4$ tai $0 \leq x \leq 2$

K15. Merkkikaaviossa lukusuora jakautuu funktion nollakohtien rajoittamiin väleihin. Merkkikaaviosta voidaan lukea, minkä merkkisiä arvoja funktio saa kullakin lukusuoran välillä.

	-11	8	27	
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$

a) Merkkikaaviosta nähdään, että funktio saa positiivisia arvoja, kun $-11 < x < 27$ ja $x \neq 8$.

Vastaus: $-11 < x < 27$ ja $x \neq 8$

b) Epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisu on ne lukusuoran välit, joissa funktio f saa negatiivisia arvoja.
Merkkikaaviosta nähdään, että funktio saa negatiivisia arvoja, kun $x < -11$ tai $x > 27$.

Vastaus: $x < -11$ tai $x > 27$

K16. Kulkukaaviossa ylemmällä rivillä on derivaatan merkit ja alemmalla rivillä funktion kasvavuus ja vähenevyys. Annettujen tietojen perusteella derivaatan nollakohdat ovat -11, 3 ja 9. Nämä arvot jakavat lukusuoran neljään väliin. Merkitään näille väleille tehtävänannon tietojen mukaisesti funktion derivaatan merkit. Funktio on kasvava, kun derivaatta on positiivinen, ja vähenevä, kun derivaatta on negatiivinen.

	-11	3	9	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on vähenevä, kun $-11 \leq x \leq 3$.

Vastaus:

	-11	3	9	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

$-11 \leq x \leq 3$

K17. Laaditaan funktion f kulkukaavio derivaatan avulla. Derivoidaan funktio
$f(x) = -3x^3 + 6x - 3$.
$f'(x) = -9x^2 + 6$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
-9x^2 + 6 &= 0 \\
-9x^2 &= -6 \qquad \| : (-9) \\
x^2 &= \frac{-6}{-9} \\
x^2 &= \frac{2}{3} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\
x &\approx \pm 0{,}816...
\end{aligned}
$$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan f' arvot niissä. Laaditaan merkkikaavio.
$f'(-1) = -9 \cdot (-1)^2 + 6 = -3 < 0$
$f'(0) = -9 \cdot 0^2 + 6 = 6 > 0$
$f'(1) = -9 \cdot 1^2 + 6 = -3 < 0$

		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$	
$f(x)$	$-$		$+$		$-$
$f'(x)$	↘		↗		↘

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Vastaus: $f'(x) = -9x^2 + 6$,

		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$	
$f(x)$	$-$		$+$		$-$
$f'(x)$	↘		↗		↘

, $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$

K18. Funktio $s(t) = t^3 - 8t^2 + 16t$ ilmaisee hiukkasen etäisyyden mittarista, joten kun funktio s on kasvava, hiukkanen etääntyy mittarista. Muodostetaan kulkukaavio ja päätellään funktion kasvavuus kulkukaavion avulla.

Derivoidaan funktio.
$s(t) = t^3 - 8t^2 + 16t$
$s'(t) = 3t^2 - 16t + 16$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $s'(t) = 0$ avulla.
$3t^2 - 16t + 16 = 0$
Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = -16$ ja $c = 16$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3}$$

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$t = \frac{16 \pm 8}{6}$$

$$t = 4 \quad \text{tai} \quad t = \frac{4}{3}$$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta väleiltä ja lasketaan derivaatan s' arvot niissä. Laaditaan merkkikaavio.

$s'(1) = 3 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 16 = 3 > 0$
$s'(3) = 3 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 16 = -5 < 0$
$s'(5) = 3 \cdot 5^2 - 16 \cdot 5 + 16 = 11 > 0$

	$\frac{4}{3}$	4	
$s'(t)$	$+$	$-$	$+$
$s(t)$	↗	↘	↗

Koska funktio oli rajoitettu välille [0, 4], nähdään kulkukaavion avulla, että funktio on kasvava, kun $0 \le t \le \frac{4}{3}$. Joten hiukkanen etääntyy mittarista $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$ sekunnin ajan.

Vastaus: 1,33 sekunnin ajan

K19. Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa. Derivoidaan funktio.

$f(x) = x^3 - 6x^2$
$f'(x) = 3x^2 - 12x$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$3x^2 - 12x = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = -12$ ja $c = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3}$$
$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144}}{6}$$
$$x = \frac{12 \pm 12}{6}$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Derivaatan nollakohdista kohta $x = 0$ kuuluu tarkasteltavalle välille. Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$f(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 = -32$ (pienin)
$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 = 0$ (suurin)
$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 = -27$

Välillä $[-2, 3]$ funktion f suurin arvo on 0 ja pienin arvo -32.

Vastaus: suurin 0, pienin -32

K20. Funktion paikalliset ääriarvokohdat ja paikalliset ääriarvot voidaan etsiä kulkukaavion avulla. Derivoidaan funktio.

$f(x) = x(x^2 - 12) = x^3 - 12x$
$f'(x) = 3x^2 - 12$

Lasketaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12 &= 0 \\ 3x^2 &= 12 \quad \| :3 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan f' arvot niissä. Laaditaan kulkukaavio.

$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 12 = 15 > 0$
$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 = -12 < 0$
$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 = 15 > 0$

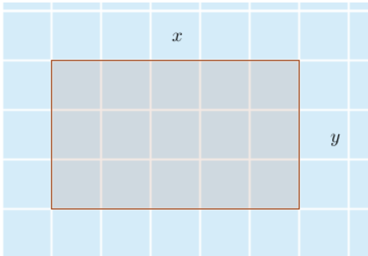
		-2		2	
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	↗		↘		↗
		max		min	

Funktiolla f on paikallinen maksimikohta $x = -2$ ja paikallinen maksimiarvo on $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$.

Funktiolla f on paikallinen minimikohta $x = 2$ ja paikallinen minimiarvo on $f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$.

Vastaus: paikallinen maksimikohta -2 ja maksimiarvo 16, paikallinen minimikohta 2 ja minimiarvo -16

K21. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Suorakulmion muotoisen alueen pinta-ala on kanta · korkeus. Merkitään kantaa kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella y.
$A = xy$

Lisäksi tiedetään, että

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 5 \\ 2y &= 5 - 2x \quad \| :2 \\ y &= \frac{5}{2} - x. \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä tieto pinta-alan lausekkeeseen, jolloin saadaan pinta-alan funktio, jossa muuttujana on kanta x.

$$A(x) = x\left(\frac{5}{2} - x\right)$$
$$A(x) = \frac{5}{2}x - x^2$$

Pienin x:n arvo on nolla ja suurin arvo saadaan silloin, kun kaikki aitamateriaali käytetään x:n mittaisiin sivuihin eli $x = \frac{5}{2}$. Joten kannan x pituus on rajoitettu välille $\left[0, \frac{5}{2}\right]$.

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa. Derivoidaan funktio.

$$A(x) = \frac{5}{2}x - x^2$$
$$A'(x) = \frac{5}{2} - 2x$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $A'(x) = 0$.

$$\frac{5}{2} - 2x = 0$$
$$-2x = -\frac{5}{2} \quad \|:(-2)$$
$$x = \frac{5}{4}$$

Lasketaan funktion arvot suljetun välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa. Välin päätepisteet ovat 0 ja $\frac{5}{2}$, joten derivaatan nollakohta $\frac{5}{4}$ on tällä välillä.

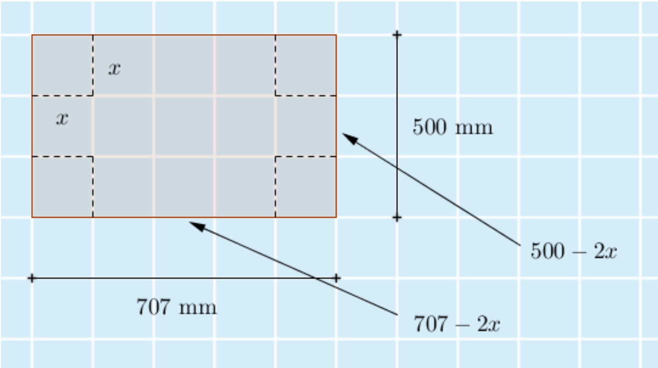
$$A(0) = \frac{5}{2} \cdot 0 - 0^2 = 0$$
$$A\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1{,}5625$$
$$A\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$$

Pinta-ala on suurimmillaan, kun kanta on $x = \frac{5}{4} = 1{,}25$ ja korkeus

$y = \frac{5}{2} - x = \frac{5}{2} - \frac{5}{4} = \frac{10}{4} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

Vastaus: 1,25 m ja 1,25 m

K22. Piirretään tilanteesta mallikuva. Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta kirjaimella x.



Kun sivut taitetaan ylös, muodostuvan laatikon tilavuus on pituus · leveys · korkeus.

Nyt
$V(x) = (707 - 2x)(500 - 2x)x = 4x^3 - 2414x^2 + 353500x$

Jos poisleikattavan neliön sivun pituus on 0, on tilavuus 0.

Jos poisleikattavan neliön sivun pituus on puolet lyhemmästä sivusta, on särmiön pohjan lyhemmän sivun pituus 0.

Poisleikattavan neliön sivun pituus on siis rajoitettu välille [0, 250].

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

Derivoidaan funktio.
$V(x) = 4x^3 - 2414x^2 + 353500x$
$V'(x) = 12x^2 - 4828x + 353500$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $V'(x) = 0$.

$12x^2 - 4828x + 353500 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 12$, $b = -4828$ ja $c = 353500$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x=\frac{4828\pm\sqrt{(-4828)^2-4\cdot 12\cdot 353500}}{2\cdot 12}$$
$$x=96,239... \quad \text{tai} \quad x=306,093...$$

Lasketaan funktion arvo suljetun välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa. Välin päätepisteet ovat 0 ja 250, joten välille kuuluu derivaatan nollakohdista vain 96,239…

$$\begin{aligned} V(0)&=4\cdot 0^3-2414\cdot 0^2+353500\cdot 0=0\\ V(96,239...)&=4\cdot 96,239...^3-2414\cdot 96,239...^2+353500\cdot 96,239...\\ &=15\ 227\ 592,32\\ V(250)&=4\cdot 250^3-2414\cdot 250^2+353500\cdot 250=0 \end{aligned}$$

Särmiön tilavuus on suurimmillaan, 15 227 592, 32 mm^3, kun leikatun neliön sivun pituus on 96,239… mm ≈ 96,2 mm.

Vastaus: 96,2 mm

K23. Taulukoidaan tuloja siten, että merkitään lipun hinnan yhden euron muutosten lukumäärää kirjaimella x.

Lipun hinta	Kävijöiden määrä	Tulot
30 €	4000	30 € · 4000 = 120 000 €
30 € + 1 € = 31 €	4000 − 100 = 3900	31 € · 3900 = 120 900 €
30 € + 2 · 1 € = 32 €	4000 − 2 · 100 = 3800	32 € · 3800 = 121 600 €
$30 + x$	$4000 - 100x$	$(30 + x)(4000 - 100x)$

Tulot hinnanmuutosten lukumäärän funktiona ovat
$T(x) = (30 + x)(4000 - 100x) = -100x^2 + 1000x + 120\ 000$
Jos hintaa korotetaan $\frac{4000}{100} = 40$ kertaa, on kävijöitä 0 ja tulot ovat tällöin 0. Jos hintaa alennetaan 30 kertaa, lipun hinta on tällöin 0 ja tulotkin ovat tällöin 0. Joten hinnanmuutosten määrä on rajoitettu välille $[-30, 40]$.

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

Derivoidaan funktio.

$$T(x) = -100x^2 + 1000x + 120\ 000$$
$$T'(x) = -200x + 1000$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $T'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -200x + 1000 &= 0 \\ -200x &= -1000 \quad ||:(-200) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvo suljetun välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa. Välin päätepisteet ovat −30 ja 40, joten derivaatan nollakohta $x = 5$ kuuluu tälle välille.

$$T(-30) = -100 \cdot (-30)^2 + 1000 \cdot (-30) + 120\ 000 = 0$$
$$T(5) = -100 \cdot 5^2 + 1000 \cdot 5 + 120\ 000 = 122\ 500$$
$$T(40) = -100 \cdot 40^2 + 1000 \cdot 40 + 120\ 000 = 0$$

Lipun hinnalla 30 € + 5 · 1 € = 35 € saadaan suurimmat lipputulot. Suurimmat lipputulot ovat 122 500 €.

Vastaus: 35 €:n hinnalla, 122 500 €

K24. Funktio vähenee nopeimmin kohdassa, jossa funktion derivaatta saa pienimmän arvonsa. Muodostetaan kulkukaavio derivaatalle, joten derivoidaan funktio kahdesti.

$f(x) = x^3 + x^2 - 25x - 25$
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 25$
$f''(x) = 6x + 2$

Määritetään derivaatan derivaatan nollakohta yhtälöstä $f''(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 6x + 2 &= 0 \\ 6x &= -2 \quad \| :6 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan derivaatan f'' arvot niissä. Laaditaan kulkukaavio.

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 2 = -4 < 0$
$f''(0) = 6 \cdot 0^2 + 2 = 2 > 0$

		$-\frac{1}{3}$	
$f''(x)$	$-$		$+$
$f'(x)$	↘		↗
		min	

Derivaattafunktiolla f' on paikallinen minimi kohdassa $x = -\frac{1}{3}$ ja kulkukaavion perusteella tämä kohta on myös derivaattafunktion pienin arvo. Koska derivaatta saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = -\frac{1}{3}$, funktio f vähenee nopeimmin kohdassa $x = -\frac{1}{3}$.

Tangentin yhtälö on muotoa $y = kx + b$, ja nyt

$$k = f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 25 = -\frac{76}{3}$$

Tangentti kulkee pisteen $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ kautta. Määritetään pisteen y-koordinaatti.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-25\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-25=-\frac{448}{27}$$

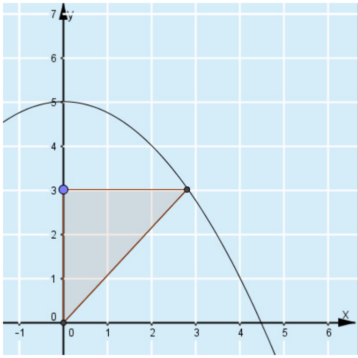
Tangentin vakiotermi saadaan selville sijoittamalla kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y = kx + b$.

$$-\frac{448}{27}=-\frac{76}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+b$$
$$b=-\frac{448}{27}-\frac{76}{9}$$
$$b=-\frac{676}{27}$$

Tangentin yhtälö on
$$y=-\frac{76}{3}x-\frac{676}{27}$$

Vastaus: $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{76}{3}x-\frac{676}{27}$

K25. Hyödynnetään mallikuvaa.



Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on $\dfrac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$.

Olkoon korkeus y-akselin suuntainen ja kanta x-akselin suuntainen.

Kanta ja korkeus ovat siten paraabelilla $y = -0{,}25x^2 + 5$ olevan pisteen x- ja y-koordinaatit.

$$A(x) = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x(-0{,}25x^2 + 5)}{2} = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{2}x$$

Kuvan avulla nähdään, että jos x-koordinaatti on 0, myös pinta-ala on 0. Suurin mahdollinen muuttujan x arvo saadaan, kun ratkaistaan yhtälö $-0{,}25x^2 + 5 = 0$.

$$\begin{aligned} -0{,}25x^2 + 5 &= 0 \\ -0{,}25x^2 &= -5 \\ x^2 &= 20 \\ x &= \pm\sqrt{20} \\ x &\approx \pm 4{,}472... \end{aligned}$$

Hylätään negatiivinen vastaus, joten muuttujan x suurin mahdollinen arvo on $\sqrt{20}$.

Muuttuja x on siis välillä $[0, \sqrt{20}]$.

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa. Derivoidaan funktio A.

$$A(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{2}x$$

$$A'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $A'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{2}&=0\\
-\frac{3}{8}x^2&=-\frac{5}{2} \quad \|:\left(-\frac{3}{8}\right)\\
x^2&=\frac{20}{3}\\
x&=\pm\sqrt{\frac{20}{3}}\\
x&\approx\pm 2{,}581..
\end{aligned}
$$

Lasketaan funktion arvo suljetun välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa. Välin päätepisteet ovat 0 ja $\sqrt{20}$, joten välille kuuluva derivaatan nollakohta on $\sqrt{\frac{20}{3}}$.

$$
\begin{aligned}
&A(0)=-\frac{1}{8}\cdot 0^3+\frac{5}{2}\cdot 0=0\\
&A\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)=-\frac{1}{8}\cdot\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^3+\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{20}{3}}=\frac{10\sqrt{15}}{9}=4{,}303...\\
&A\left(\sqrt{20}\right)=-\frac{1}{8}\cdot\sqrt{20}^3+\frac{5}{2}\cdot\sqrt{20}=0
\end{aligned}
$$

Pinta-ala on suurimmillaan $\frac{10\sqrt{15}}{9}=4{,}303\ldots\approx 4{,}3$.

Vastaus: $\frac{10\sqrt{15}}{9}\approx 4{,}3$