4 EKSPONENTIAALINEN MALLI

4.1 Eksponenttifunktio

ALOITA PERUSTEISTA

401. Täydennetään taulukko, kun alussa on yksi katselukerta ja katselukertojen määrä nelinkertaistuu joka tunti.

Kulunut aika (h)	Katselukertojen määrä
0	1
1	$4 \cdot 1 = 4$
2	$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$
3	$4 \cdot 16 = 4^3 = 64$
x	4^x

Vastaus:

Kulunut aika (h)	Katselukertojen määrä
0	1
1	4
2	16
3	64
x	4^x

402. Funktiossa on $f(x) = a \cdot q^x$ vakio a on suureen alkuperäinen arvo ja vakio q on muutoskerroin.

Kertolaskun tulos ei muutu, vaikka kertolaskun tekijöiden järjestyksen vaihtaa. Funktio voidaan esittää myös muodossa $f(x) = q^x \cdot a$, jossa kertoimien järjestys on eri, mutta kuitenkin a on suureen alkuperäinen arvo ja q muutoskerroin.

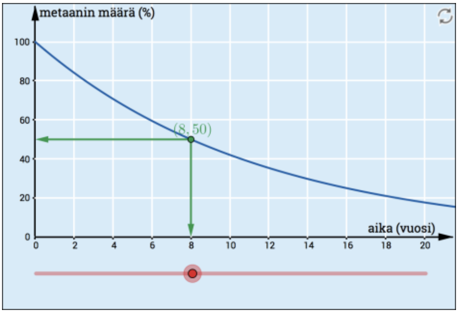
Funktio C kuvaa eksponentiaalista muutosta muodossa $f(x) = 3^x \cdot 2$, joten alkuperäinen arvo on $a = 2$ ja muutoskerroin on $q = 3$.

Samoin kohta F $f(x) = 3 \cdot 2^x$ kuvaa eksponentiaalista muutosta, jossa alkuperäinen arvo on $a = 3$ ja muutoskerroin on $q = 2$.

Vastaus: C, jossa $a = 2$ ja $q = 3$ sekä F, jossa $a = 3$ ja $q = 2$

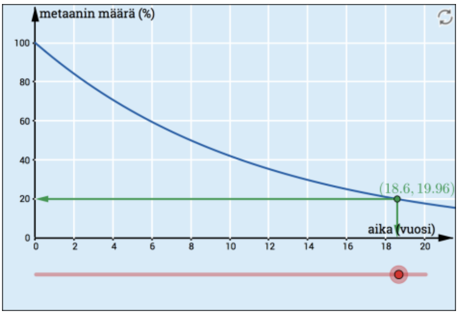
403. Oheisissa kuvakaappauksissa on näytetty kuinka appletista luetaan vastaukset.

a) Kuvaajasta nähdään kohdasta 50 %, että määrä on puolet alkuperäisestä 8 vuoden kuluttua.



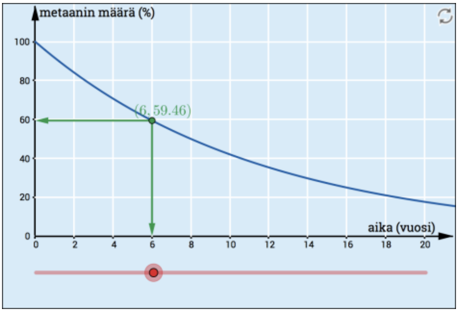
Vastaus: 8 vuoden kuluttua

b) Kuvaajasta nähdään, että noin 19 vuoden kuluttua metaania on jäljellä 20 %.



Vastaus: 19 vuoden kuluttua

c) Kuvaajasta nähdään, että kuuden vuoden kuluttua metaania on jäljellä noin 60 %, joten sitä on poistunut 100 % − 60 % = 40 %.



Vastaus: 40 %

404. Tehtävässä on eksponentiaalisten mallien kuvaajia ja suoria.

Ensimmäisen asteen polynomifunktio on muotoa $f(x) = kx + b$ ja sen kuvaajana on suora.

Tehtävän funktioista A $f(x) = -2x + 0{,}5$ ja B $f(x) = 0{,}5x + 2$ ovat ensimmäisen asteen polynomifunktioita.

Funktion A kuvaajana on laskeva suora (koska kulmakerroin −2 on negatiivinen) ja funktion B kuvaajana on nouseva suora (koska kulmakerroin 0,5 on positiivinen).

Kuvaajista III ja IV ovat suoria.

Ainoa nouseva suora on kuvaaja III.
Kuvaajan III on oltava funktio B $f(x) = 0{,}5x + 2$.

Ainoa laskeva suora on kuvaaja IV.
Kuvaajan IV on oltava funktio A $f(x) = -2x + 0{,}5$.

Eksponentiaalinen malli on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$,
jossa a on alkuperäinen arvo ja q on muutoskerroin.

Tehtävän funktioista C $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$ ja D $f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$ ovat eksponentiaalisia malleja.

Mallissa C on $a = 0{,}5$ ja $q = 2$ ja mallissa D on $a = 2$ ja $q = 0{,}5$.

Kuvaajista I ja II ovat eksponentiaalisen mallin kuvaajia.

Kuvaaja I kuvaa eksponentiaalista vähenemistä, jolloin muutoskerroin q on välillä $]0, 1[$. Kuvaajan I on oltava funktio D $f(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$.

Kuvaaja II kuvaa eksponentiaalista kasvamista, jolloin muutoskerroin $q > 1$. Kuvaajan II on oltava funktio C $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$.

Vastaus: A: IV, B: III, C: II ja D: I

405. Eksponentiaalinen malli on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$, jossa a on alkuperäinen arvo ja q on muutoskerroin. Tehtävässä tarkastellaan vain muutoskerrointa q.

a) Kun bakteerien määrä kolminkertaistuu tietyssä ajassa, niin muutoskerroin on $q = 3$.

Vastaus: $q = 3$

b) Kun bakteerien määrä kasvaa 4 % tietyssä ajassa. Bakteereja on aikajakson jälkeen 100 % + 4 % = 104 % eli bakteerien määrä kasvaa 1,04-kertaiseksi tässä ajassa. Muutoskerroin on $q = 1{,}04$.

Vastaus: $q = 1{,}04$

c) Kun bakteerien määrä vähenee 55 % tietyssä ajassa. Bakteereja on aikajakson jälkeen 100 % − 55 % = 45 % eli bakteerien määrä on pienentynyt 0,45-kertaiseksi tässä ajassa. Muutoskerroin on $q = 0{,}45$.

Vastaus: $q = 0{,}45$

406. Funktio $f(x) = 250\,000 \cdot 1{,}03^x$ on eksponentiaalinen malli, jossa alkuperäinen arvo on $a = 250\,000$ ja muutoskerroin on $q = 1{,}03$.

a) Alkuperäinen arvo $a = 250\,000$ ilmaisee, että asunnon arvo arviointihetkellä on 250 000 €.

Vastaus: 250 000 €

b) Muutoskerroin on $q = 1{,}03$ ilmaisee, että asunnon arvo kasvaa keskimäärin 3 % vuodessa.

Vastaus: 3 %

c) $f(5) = 250\,000 \cdot 1{,}03^5 = 289\,818{,}5186\ldots \approx 290\,000$

$f(-5) = 250\,000 \cdot 1{,}03^{-5} = 215652{,}196\ \ldots \approx 216\,000$

Funktiossa x on aika vuosina arviointihetkestä lähtien, joten sijoittamalla $x = 5$ saadaan asunnon arvo viisi vuotta arviointihetken jälkeen ja sijoittamalla $x = -5$ saadaan asunnon arvo viisi vuotta ennen arviointihetkeä.

Vastaus: $f(5) \approx 290\,000$; Asunnon arvo 5 vuoden kuluttua on 290 000 €. $f(-5) \approx 216\,000$; Asunnon arvo 5 vuotta ennen arviointihetkeä oli 216 000 €.

407. **a)** Eksponentiaalinen malli on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$, jossa a on alkuperäinen arvo ja q on muutoskerroin.

Koska alussa on yksi tartunnan saanut, on $a = 1$. Jokainen tartunnan saanut tartuttaa taudin 2,5 ihmiseen. Tällöin tartunnan saaneiden määrä 2,5-kertaistuu. Näin ollen muutoskerroin on $q = 2{,}5$ ja funktio on $f(x) = 1 \cdot 2{,}5^x = 2{,}5^x$, missä x on aika viikkoina ensimmäisestä tartunnasta.

Vastaus: $f(x) = 1 \cdot 2{,}5^x = 2{,}5^x$, missä x on aika viikkoina ensimmäisestä tartunnasta

b) Muodostetaan yhtälö $2{,}5^x = 7\,800\,000\,000$ ja ratkaistaan siitä aika x. Ratkaisuksi saadaan $x = 24{,}858\ldots \approx 25$.

Uusien tartunnan saaneiden määrä olisi maapallon väkiluvun verran 25 viikon kuluttua.

Vastaus: 25 viikon kuluttua

408. **a)** Eksponentiaalinen malli on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$,
jossa a on alkuperäinen arvo ja q on muutoskerroin.

Kun kaulakorun hinta nousee joka vuosi 2 %, niin hinta seuraavan vuonna on 100 % + 2 % = 102 % edellisen vuoden hinnasta eli hinta on kasvanut 1,02-kertaiseksi. Muutoskerroin on $q = 1{,}02$.

Kun alkuarvona on kaulakorun nykyinen hinta 379 €,
niin eksponentiaalisessa mallissa alkuperäinen arvo on $a = 379$.

Saadaan eksponentiaalinen malli $f(x) = 379 \cdot 1{,}02^x$, joka kuvaa kaulakorun hintaa x vuoden kuluttua siitä vuodesta, jolloin hinta oli 379 €.

Vastaus: $f(x) = 379 \cdot 1{,}02^x$

b) Funktiossa $f(x) = 379 \cdot 1{,}02^x$ muuttuja x kuvaa aikaa vuosina, joten kaulakorun hinta seitsemän vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla funktioon $x = 7$.

$f(7) = 379 \cdot 1{,}02^7 = 435{,}351\ldots \approx 435{,}35$

Vastaus: 435,35 €

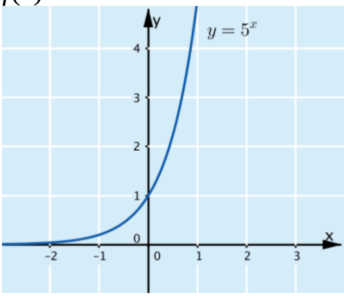
c) Kaulakorun hinta kymmenen vuotta aiemmin saadaan sijoittamalla funktioon $x = -10$.

$f(-10) = 379 \cdot 1{,}02^{-10} = 310{,}912\ldots \approx 310{,}91$

Vastaus: 310,91 €

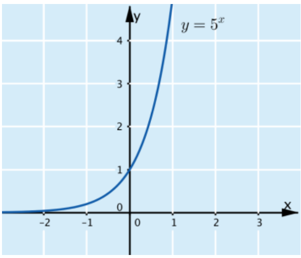
409. Funktio on kasvava, kun $q > 1$ ja vähenevä, kun $0 < q < 1$.

a) $f(x) = 5^x$



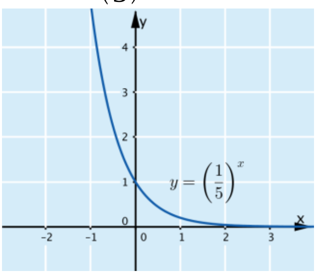
Funktion muutoskerroin on $q = 5$, joten $q > 1$. Kyseessä on siten eksponentiaalinen kasvaminen.

Vastaus:



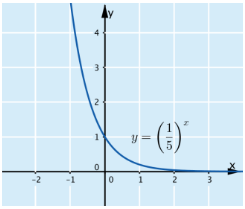
kasvamista

b) $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$



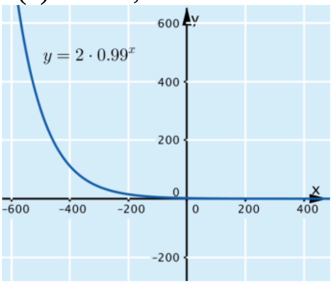
Funktion muutoskerroin on $q = \frac{1}{5} = 0,2$, joten $0 < q < 1$. Kyseessä on siten eksponentiaalinen väheneminen.

Vastaus:



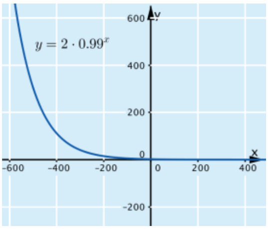
vähenemistä

c) $h(x) = 2 \cdot 0,99^x$



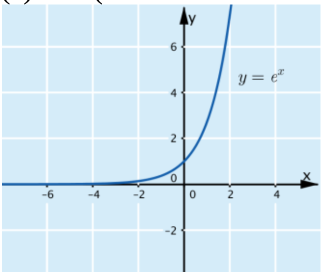
Funktion muutoskerroin on $q = 0,99$, joten $0 < q < 1$. Kyseessä on siten eksponentiaalinen väheneminen.

Vastaus:



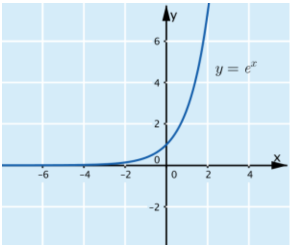
vähenemistä

d) $i(x) = e^x$ (Huom! Joissakin ohjelmissa funktio kirjoitetaan exp(x).)



Funktion muutoskerroin on $q = e = 2{,}718\ldots$, joten $q > 1$. Kyseessä on siten eksponentiaalinen kasvaminen.

Vastaus:



kasvamista

VAHVISTA OSAAMISTA

410. **a)** Eksponentiaalinen malli on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$,
jossa a on alkuperäinen arvo ja q on muutoskerroin.

Kun ruokahävikin määrä vähenee joka vuosi 7 %, niin hävikin määrä seuraavana vuonna on 100 % – 7 % = 93 % edellisen vuoden hävikistä eli hävikki on vähentynyt 0,93-kertaiseksi. Muutoskerroin on $q = 0{,}93$.

Kun alkuarvona hävikin määrä vuonna 2020 oli 23 kg,
niin eksponentiaalisessa mallissa alkuperäinen arvo on $a = 23$.

Saadaan eksponentiaalinen malli $f(x) = 23 \cdot 0{,}93^x$, joka kuvaa hävikin määrää x vuoden kuluttua vuodesta 2020.

Vastaus: $f(x) = 23 \cdot 0{,}93^x$

b) Puolet alkuperäisestä määrästä on $\frac{23\text{ kg}}{2} = 11{,}5\text{ kg}.$ Kohdan a tietojen avulla saadaan yhtälö $23 \cdot 0{,}93^x = 11{,}5$, josta voidaan ratkaista aika x.
Ratkaisuksi saadaan $x = 9{,}551\ldots \approx 10$.

Vuoden 2020 ruokahävikin määrästä on jäljellä puolet kymmenen vuoden kuluttua eli vuonna 2020 + 10 = 2030.

Vastaus: Vuonna 2030

411. **a)** Funktiossa $f(x) = 3 \cdot 0{,}8^x$ muutoskerroin on $q = 0{,}8 < 1$, joten se kuvaa eksponentiaalista vähenemistä. Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, vähenemistä

b) Funktiossa $g(x) = 1{,}4^x$ muutoskerroin on $q = 1{,}4$. Väite on siis tosi.

Vastaus: tosi

c) Funktiossa $g(t) = 12 \cdot 1{,}012^t$ on muutoskerroin $q = 1{,}012$, joten arvot kasvavat 1,2 % joka vuosi. Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, kasvaa 1,2 %

d) Funktiossa $h(x) = 62{,}9 \cdot 0{,}98^x$ alkuperäinen arvo on $a = 62{,}9$, joten kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä (0; 62,9). Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, (0; 62,9)

412. **A** Soluja on aluksi miljoona, ja niiden määrä kasvaa 20 % tunnissa. Kyseessä eksponentiaalinen kasvu. Alkuperäinen arvo on $a = 1\,000\,000$. Määrä kasvaa 20 %, joten muutoskerroin on 1,20. Tilanteeseen sopii funktio VI $f(x) = 1\,000\,000 \cdot 1{,}2^x$.

B Soluja on aluksi miljoona, ja niiden määrä vähenee 20 % tunnissa. Kyseessä eksponentiaalinen väheneminen. Alkuperäinen arvo on $a = 1\,000\,000$. Määrä vähenee 20 %, joten muutoskerroin on 0,80. Tilanteeseen sopii funktio III $f(x) = 1\,000\,000 \cdot 0{,}8^x$.

C Alussa on miljoona asukasta, ja asukasluku kasvaa 2 % vuodessa. Kyseessä eksponentiaalinen kasvu. Alkuperäinen arvo on $a = 1\,000\,000$. Määrä kasvaa 2 %, joten muutoskerroin on 1,02. Tilanteeseen sopii funktio I $f(x) = 1\,000\,000 \cdot 1{,}02^x$.

D Alussa on miljoona asukasta, ja asukasluku vähenee 2 % vuodessa. Kyseessä eksponentiaalinen väheneminen. Alkuperäinen arvo on $a = 1\,000\,000$. Määrä vähenee 2 %, joten muutoskerroin on 0,98. Tilanteeseen sopii funktio IV $f(x) = 1\,000\,000 \cdot 0{,}98^x$.

E Altaassa on aluksi miljoona litraa vettä, ja sinne pumpataan lisää vettä 20 litraa minuutissa. Kyseessä ei ole eksponentiaalinen muutos eli tilanteeseen ei sovi eksponentiaalinen malli. Veden määrä lisääntyy 20 litraa minuutissa, joten kyseessä on lineaarinen muutos.

Lineaarinen malli on muotoa $f(x) = kx + b$, joka voidaan kirjoittaa myös toisessa järjestyksessä $f(x) = b + kx$. Mallissa alkuarvona on b ja kulmakerroin k kuvaa muutosta. Kun kulmakerroin on positiivinen, kyseessä on lineaarinen kasvu. Tehtävässä alkuarvo on $b = 1\,000\,000$ ja kulmakerroin on $k = 20$ kuvaa kasvua.

Tilanteeseen sopii funktio II $f(x) = 1\,000\,000 + 20x$.

F Altaassa on aluksi miljoona litraa vettä, ja sieltä valuu pois 20 litraa vettä minuutissa. Kyseessä ei ole eksponentiaalinen muutos eli tilanteeseen ei sovi eksponentiaalinen malli. Veden määrä vähenee 20 litraa minuutissa, joten kyseessä on lineaarinen muutos. Lineaarinen malli voidaan kirjoittaa muodossa $f(x) = b + kx$, jossa alkuarvona on b ja kulmakerroin k kuvaa muutosta. Kun kulmakerroin on negatiivinen, kyseessä on lineaarinen muutos. Tehtävässä alkuarvo on $b = 1\,000\,000$ ja kulmakerroin on $k = -20$ kuvaa vähenemistä.

Tilanteeseen sopii funktio V $f(x) = 1\,000\,000 - 20x$.

Vastaus: A: VI, B: III, C: I, D: IV, E: II ja F: V

413. **a)** Mallin alkuperäinen arvo on $a = 52{,}8$. Päästöjen määrä pienenee vuosittain 4 %, joten seuraavan vuoden päästöjen määrä on 100 % − 4 % = 96 % edellisen vuoden päästöistä. Päästöt siis 0,96-kertaistuvat vuosittain, joten muutoskerroin $q = 0{,}96$.

Päästöjä kuvaava malli on
$f(x) = 52{,}8 \cdot 0{,}96^x$, missä x on vuosia vuodesta 2019.

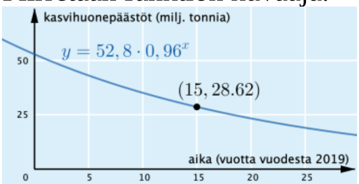
Vastaus: $f(x) = 52{,}8 \cdot 0{,}96^x$, missä x on vuosia vuodesta 2019

b) Vuonna 2034 on kulunut 2034 − 2019 = 15 vuotta vuodesta 2018.
Vuoden 2034 päästöjen määrä saadaan sijoittamalla malliin $x = 15$.
$f(15) = 52{,}8 \cdot 0{,}96^{15} = 28{,}622... \approx 28{,}6$

Kokonaispäästöt vuonna 2034 ovat noin 28,6 miljoonaa hiilidioksiditonnia.

Vastaus: 28,6 miljoonaa hiilidioksiditonnia

c) Piirretään funktion kuvaaja.



414. **a)** Mallissa $y=100\,000\cdot 4^{0,14x}$ alkuperäinen arvo on a = 100 000, joka ilmaisee, bakteerien määrän tilanteen alussa. Mallin mukaan siis vaaditaan 100 000 bakteeria, jotta infektio pääsee alkamaan elimistössä.

Vastaus: 100 000 bakteeria

b) Malli $y=100\,000\cdot 4^{0,14x}$ ilmaisee bakteerien määrän, kuin x on aika tunneissa. Bakteerien määrä 50 tunnin kuluttua saadaan sijoittamalla malliin x = 50.

$$y=100\,000\cdot 4^{0,14\cdot 50}=1638400000\approx 1\,600\,000\,000$$

Vastaus: 1 600 000 000 bakteeria

c) Mallissa $y=100\,000\cdot 4^{0,14x}$ kerroin $4^{0,14x}$ ilmaisee, kuinka moninkertaiseksi bakteerien määrä kasvaa x tunnissa. Muodostetaan yhtälö, kuinka monen tunnin x kuluttua bakteerien määrä on nelinkertaistunut ja ratkaistaan siitä tuntien määrä x.

$$\begin{aligned}
100\,000\cdot 4^{0,14x} &= 400\,000 \quad \| :100\,000 \\
4^{0,14x} &= 4^{1} \\
0,14x &= 1 \quad \| :0,14 \\
x &= \frac{1}{0,14} \\
x &= 7,142... \\
x &\approx 7
\end{aligned}$$

Bakteerien määrä on nelinkertaistunut noin 7 tunnin kuluttua.

Vastaus: 7 tunnissa

415. **a)** Malli $f(t)=500\cdot 0{,}5^{\frac{t}{12}}$ ilmaisee lääkeaineen määrän milligrammoina ihmisen elimistössä, kun lääkkeen ottamisesta on kulunut t tuntia. Alkuperäinen arvo on a = 500, joka ilmaisee, että alussa lääkeaineen määrä elimistössä on 500 mg.

Vastaus: lääkeaineen määrän alussa

b) Malli $f(t)=500\cdot 0{,}5^{\frac{t}{12}}$ ilmaisee lääkeaineen määrän milligrammoina ihmisen elimistössä, kun lääkkeen ottamisesta on kulunut t tuntia. Lääkeaineen määrä elimistössä vuorokauden kuluttua alkuhetkestä saadaan sijoittamalla malliin t = 24.

$f(24)=500\cdot 0{,}5^{\frac{24}{12}}=125$,
joten vuorokauden kuluttua lääkeaineen määrä on 125 mg.

Vastaus: 125 mg

c) Kun lääkkeen määrä on puoliintunut elimistössä, lääkettä on jäljellä 250 mg. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan puoliintumiseen kuluva aika x.

$$
\begin{aligned}
500\cdot 0{,}5^{\frac{t}{12}} &= 250 \quad \| :500\\
0{,}5^{\frac{t}{12}} &= 0{,}5\\
0{,}5^{\frac{t}{12}} &= 0{,}5^{1}
\end{aligned}
$$

Kun kantaluvut ovat yhtä suuret, niin riittää tutkia, milloin eksponentit ovat yhtä suuret.

$$
\begin{aligned}
\frac{t}{12} &= 1 \quad \| \cdot 12\\
t &= 12
\end{aligned}
$$

Lääkeaineen puoliintumisaika on 12 tuntia.

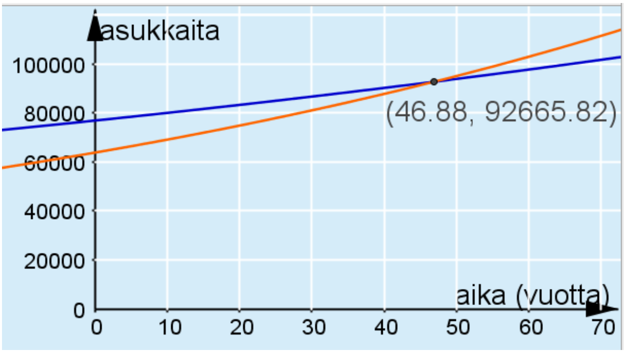
Vastaus: 12 tuntia

416. Muodostetaan matemaattiset mallit Joensuun ja Seinäjoen asukasluvuille.

Vuoden 2019 lopussa Joensuussa oli 76 850 asukasta ja Joensuun väestö kasvoi vuonna 2019 0,4 %. Jos kasvu jatkuu samanlaisena, voidaan Joensuun asukaslukua mallintaa funktiolla $J(x) = 76\,850 \cdot 1{,}004^x$, jossa x ilmaisee, kuinka monta vuotta on kulunut vuodesta 2019 alkaen.

Vuoden 2019 lopussa Seinäjoella oli 63 781 asukasta ja Seinäjoen väestö kasvoi vuonna 2019 0,8 %. Jos kasvu jatkuu samanlaisena, voidaan Seinäjoen asukaslukua mallintaa funktiolla $S(x) = 63\,781 \cdot 1{,}008^x$, jossa x ilmaisee, kuinka monta vuotta on kulunut vuodesta 2019 alkaen.

Piirretään molempien funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon ja etsitään minä vuonna Seinäjoen asukasluku saavuttaa Joensuun asukasluvun.



Käyrät leikkaavat, kun muuttujan x arvo on noin 47 eli Seinäjoen asukasluku saavuttaa Joensuun asukasluvun vuonna 2019 + 47 = 2066, jos kasvu jatkuu samanlaisena molemmissa kaupungeissa.

Käyrien leikkauspisteen y-koordinaatti on noin 92 670, joten molempien kaupunkien asukasluvut ovat tällöin noin 92 670.

Vastaus: vuonna 2066, 92 670 asukasta

417. Suureen A nykyinen arvo on a.

a) Kun suureen A arvo kasvaa 30 % vuodessa, niin muutoskerroin on $q = 100\ \% + 30\ \% = 130\ \% = 1{,}30$.

Malli $f(t) = a \cdot 1{,}3^t$ ilmoittaa suureen A arvon ajan t funktiona.

Vastaus: $f(t) = a \cdot 1{,}3^t$

b) Kun suureen A arvo vähenee 20 % vuodessa, niin muutoskerroin on $q = 100\ \% - 20\ \% = 80\ \% = 0{,}80$.

Malli $f(t) = a \cdot 0{,}8^t$ ilmoittaa suureen A arvon ajan t funktiona.

Vastaus: $f(t) = a \cdot 0{,}8^t$

c) Kun suureen A arvo pienenee joka vuosi kolmasosaan edellisen vuoden arvosta, niin muutoskerroin on $q = \frac{1}{3}$.

Malli $f(t) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$ ilmoittaa suureen A arvon ajan t funktiona.

Vastaus: $f(t) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$

d) Kun suureen A arvo kasvaa joka vuosi kolmasosalla edellisen vuoden arvosta, niin muutoskerroin on $q = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Malli $f(t) = a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t$ ilmoittaa suureen A arvon ajan t funktiona.

Vastaus: $f(t) = a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t$

418. Eksponentiaalinen malli on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$, jossa a on alkuperäinen arvo ja q on muutoskerroin.

Muurahaisia on alussa yksi, joten alkuperäinen arvo on $a = 1$. Jokaisen kymmenen minuutin aikana muurahaisten määrä kasvaa 50 %, joten muutoskerroin on q = 100 % = 50 % = 150 % = 1,50.

Malli $f(x) = 1 \cdot 1{,}5^x$ ilmaisee muurahaisten lukumäärän, kun aikaa alusta on kulunut $x \cdot 10$ minuuttia.

Kun muurahaisten määrä 20-kertaistuu, apajalla on $20 \cdot 1 = 20$ muurahaista. Ratkaistaan yhtälöstä $1 \cdot 1{,}5^x = 20$
20-kertaistumiseen kuluvien kymmenminuuttisten lukumäärä x.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1{,}5^x &= 20 \\ 1{,}5^x &= 20 \\ x &= \log_{1{,}5} 20 \\ x &= 7{,}388... \\ x &= 7{,}4 \end{aligned}$$

Muurahaisten määrä on 20-kertaistunut noin $7{,}4 \cdot 10 = 74$ minuutin kuluttua.

Vastaus: 74 minuutin kuluttua

419. Muodostetaan mallit autojen arvoille.

Merkitään auton A hintaa kirjaimella a ($a > 0$) ja sen arvo alenee 5 % vuodessa. Eksponentiaalisen mallin alkuperäinen arvo on a ja muutoskerroin $q = 0{,}95$. Auton A arvoa voidaan mallintaa funktiolla $A(x) = a \cdot 0{,}95^x$, jossa x ilmaisee, kuinka monta vuotta vanha auto on.

Auton B hinta on kaksinkertainen autoon A verrattuna eli $2a$ ja arvon alenema on 10 % vuodessa. Eksponentiaalisen mallin alkuperäinen arvo on $2a$ ja muutoskerroin $q = 0{,}90$. Auton B arvoa voidaan mallintaa funktiolla $B(x) = 2a \cdot 0{,}90^x$, jossa x ilmaisee, kuinka monta vuotta vanha auto on.

a) Auton A arvo on puoliintunut, kun sen arvo on $0{,}5a$. Ratkaistaan yhtälöstä $a \cdot 0{,}95^x = 0{,}5a$ auton arvon puolittumiseen kuluva aika x.

$$\begin{aligned} a \cdot 0{,}95^x &= 0{,}5a \quad \| : a \\ 0{,}95^x &= 0{,}5 \\ x &= \log_{0{,}95} 0{,}5 \\ x &= 13{,}513... \\ x &\approx 14 \end{aligned}$$

Auton A arvo puolittuu noin 14 vuodessa.

Auton B arvo on puoliintunut, kun sen arvo on a. Ratkaistaan yhtälöstä $2a \cdot 0{,}90^x = a$ auton arvon puolittumiseen kuluva aika x.

$$\begin{aligned} 2a \cdot 0{,}90^x &= a \quad \| : 2a \\ 0{,}90^x &= 0{,}5 \\ x &= \log_{0{,}90} 0{,}5 \\ x &= 6{,}578... \\ x &\approx 7 \end{aligned}$$

Auton B arvo puolittuu 7 vuodessa

Vastaus: auto A 14 vuodessa ja auto B 7 vuodessa

b) Autojen arvot ovat yhtä suuret, kun $a \cdot 0{,}95^x = 2a \cdot 0{,}90^x$. Yhtälöstä ohjelmalla saadaan $x = 12{,}820... \approx 13$.

Autojen arvot ovat yhtä suuret noin 13 vuoden kuluttua.

Vastaus: 13 vuoden kuluttua

420. Metsäkanalintujen lukumäärän muutos vuodessa on

$$q = \frac{11400}{10200} = 1{,}117...,$$

joten eksponentiaalisen mallin muutoskerroin on $q = 1{,}117\ldots$

Tänä vuonna lintuja on 11 400, joten viiden vuoden kuluttua niitä on
$11\,400 \cdot 1{,}117\ldots^5 = 19\,880{,}543\ldots \approx 19\,900$

Vastaus: 19 900

421. Kofeiinia on aluksi 100 mg ja sen määrä puolittuu 50 milligrammaan kuudessa tunnissa. Tästä saadaan yhtälö $100 \cdot q^6 = 50$. Ratkaistaan yhtälöstä muutoskerroin q eli kuinka moninkertaiseksi kofeiinin määrä muuttuu yhdessä tunnissa.

$$\begin{aligned} 100 \cdot q^6 &= 50 \quad \| :100 \\ q^6 &= 0{,}5 \\ q &= (+)\sqrt[6]{0{,}5} \\ q &= (+)0{,}890... \end{aligned}$$

Kofeiinin määrälle elimistössä saadaan funktio
$f(x) = 100 \cdot 0{,}890...^x$, jossa x on kahvikupin nauttimisesta kulunut aika tunteina.

a) Kofeiinin määrä elimistössä kahdeksan tunnin jälkeen saadaan, kun funktioon $f(x)$ sijoitetaan $x = 8$.
$f(8) = 100 \cdot 0{,}890...^8 = 39{,}686... \approx 40$

Kofeiinin määrä elimistössä kahdeksan tunnin jälkeen on noin 40 mg.

Vastaus: 40 mg

b) Ratkaistaan yhtälöstä $100 \cdot 0{,}890...^x = 75$, kuinka monen tunnin x kuluttua elimistössä on 75 mg kofeiinia.

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0{,}890...^x &= 75 \quad \| :100 \\ 0{,}890...^x &= 0{,}75 \\ x &= \log_{0{,}890...} 0{,}75 \\ x &= 2{,}490... \\ x &\approx 2{,}5 \end{aligned}$$

Kofeiinin määrä on 75 mg noin 2,5 tunnin kuluttua kahvikupin juomisen jälkeen. Petrin ei kannata juoda kahvia klo 19.30 jälkeen.

Vastaus: klo 19.30 jälkeen

422. **a)** Galliumin puoliintumisaika on $\frac{46,5\text{ h}}{24\text{ h}} = 1,9375$ vuorokautta. Galliumia on aluksi 100 mg, joten x vuorokauden kuluttua sen määrä on $100q^x$. Kun aikaa on kulunut 1,9375 vuorokautta, galliumia on jäljellä puolet eli 50 mg. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q.

$$\begin{aligned} 100q^{1,9375} &= 50 \quad \| :100 \\ q^{1,9375} &= 0,5 \\ q &= \sqrt[1,9375]{0,5} \\ q &= 0,699... \end{aligned}$$

Vuorokauden jälkeen galliumia on jäljellä
$100 \cdot 0,699...^1 = 69,924... \approx 70$ mg.

Vastaus: 70 mg

b) Kun galliumista on hajonnut 99 %, sitä on jäljellä 1 % eli
$0,01 \cdot 100$ mg $= 1$ mg. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0,699...^x &= 1 \quad \| :100 \\ 0,699...^x &= 0,01 \\ x &= \log_{0,699...} 0,01 \\ x &= 12,872... \\ x &\approx 13 \end{aligned}$$

Galliumista on hajonnut 99 % noin 13 vuorokauden kuluttua.

Vastaus: 13 vrk

c) Muutoskerroin $q = 0,699...$ kertoo, kuinka moninkertaiseksi gallium määrä muuttuu vuorokaudessa. Joten ensimmäisen vuorokauden jälkeen galliumista on jäljellä 69,924... % ≈ 70 % eli galliumia hajoaa 100 % − 70 % = 30 %.

Toisen vuorokauden aikana jäljellä olevasta galliumista hajoaa vastaavasti 30 %.

Vastaus: 30 % ja 30 %

423. Funktio $p(t)=100\cdot 2,7^{-0,02t}$ ilmaisee, että p prosenttia akuista toimii vielä t kuukauden jälkeen.

a) 36 kuukauden päästä toimivien akkujen osuus saadaan sijoittamalla funktioon t = 36.

$$p(36)=100\cdot 2,7^{-0,02\cdot 36}=48,912\ldots,$$

joten noin 49 % akuista kestää vähintään 36 kuukautta.

Vastaus: 49 %

b) 48 kuukauden päästä toimivien akkujen osuus saadaan sijoittamalla funktioon t = 48.

$$p(48)=100\cdot 2,7^{-0,02\cdot 48}=38,538\ldots,$$

joten 38,538… % akuista kestää vähintään 48 kuukautta.

Loput eli 100 % − 38,538…% = 61,461… % ≈ 61 % lopettaa toimintansa tätä aiemmin.

Vastaus: 61 %

c) Kohtien a ja b perusteella 36 kuukauden jälkeen akuista toimii 48,912… % ja 48 kuukauden jälkeen 38,538… %, joten aikavälillä [36 kk, 48 kk] toimintansa lopettavien akkujen osuus on 48,912… % − 38,538… % = 10,374…% ≈ 10 %

Vastaus: 10 %

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

424. Myrskyn jälkeen lammessa on 0,035 · 10 tonnia = 0,35 tonnia suolaa ja 120 tonnia + 10 tonnia = 130 tonnia vettä.

Merkitään kirjaimella *x* lammessa olevan veden määrää. Muodostetaan yhtälö suolan määrälle, kun suolapitoisuus on 1 %, ja ratkaistaan siitä *x*.

$$\begin{aligned} 0{,}01x &= 0{,}35 \quad \| :0{,}01 \\ x &= 35 \end{aligned}$$

Kun lammessa on vettä 35 tonnia, niin lammen suolapitoisuus on 1 %.

Veden määrä vähenee vuorokaudessa 3 %, eli huomenna vettä on 100 % − 3 % = 97 % tämän päivän määrästä. Veden määrä siis 0,97-kertaistuu päivittäin.

x päivän kuluttua lammen vesimäärä on $130 \cdot 0{,}97^x$.

Ratkaistaan yhtälöstä $130 \cdot 0{,}97^x = 35$ päivä *x*, milloin lammen suolapitoisuus on 1 %.

$$\begin{aligned} 130 \cdot 0{,}97^x &= 35 \quad \| :130 \\ 0{,}97^x &= 0{,}269... \\ x &= \log_{0{,}97} 0{,}269... \\ x &= 43{,}080... \\ x &\approx 43 \end{aligned}$$

Lammen suolapitoisuus on 1 % noin 43 päivän kuluttua.

Vastaus: 43 päivän kuluttua

425. **a)** Merkitään radioaktiivisen hiilen määrää alussa kirjaimella *a*.

Radiohiilen määrä puolittuu, eli tulee 0,5-kertaiseksi 5730 vuodessa, joten radiohiilen määrä voidaan laskea funktiolla
$f(x) = a \cdot 0{,}5^x$, jossa *x* on 5730 vuoden jaksojen lukumäärä.

Löydettäessä voissa radiohiiltä oli jäljellä 78,5 % eli 0,785*a*.

Muodostetaan yhtälö radiohiilen avulla ja ratkaistaan siitä 5730 vuoden jaksojen lukumäärä *x*.

$$\begin{aligned} a \cdot 0{,}5^x &= 0{,}785a \quad \| : a \\ 0{,}5^x &= 0{,}785 \\ x &= \log_{0{,}5} 0{,}785 \\ x &= 0{,}349... \end{aligned}$$

5730 vuoden jaksoja on 0,349..., joten kulunut aika on
0,349... · 5730 = 2001,119... ≈ 2000 vuotta.

Voihin käytetty maito on lypsetty noin 2000 vuotta sitten.

Vastaus: 2000 vuotta sitten

b) Käytetään apuna a-kohdan funktiota $f(x) = a \cdot 0{,}5^x$. Radiohiiltä oli alun perin 1 g, joten *a* = 1. Miljoonassa vuodessa on
$\frac{1\,000\,000}{5730} = 174{,}520...$ 5730 vuoden jaksoa.

Lasketaan funktion *f* arvo, kun *x* = 174,520....

$$f(174{,}520...) = 1 \cdot 0{,}5^{174{,}520...} = 2{,}912... \cdot 10^{-53} \approx 3{,}0 \cdot 10^{-53}$$

Vastaus: $3{,}0 \cdot 10^{-53}$ mg

c) b-kohdalla todella vanhojen fossiilien (yli 60 000 vuotta) iän määritys radiohiilellä ei onnistu, koska radiohiiltä on jäljellä liian vähän.

Vastaus: –

426. Muodostetaan yhtälö funktion *f* avulla milloin ruumiin lämpö oli 37° ja ratkaistaan siitä aika *t*.

$$\begin{aligned}
21+11{,}9e^{-0{,}0659t} &= 37 \\
11{,}9e^{-0{,}0659t} &= 37-21 \\
11{,}9e^{-0{,}0659t} &= 16 && \| :11{,}9 \\
e^{-0{,}0659t} &= 1{,}344\ldots \\
-0{,}0659t &= \ln 1{,}344\ldots && \| :(-0{,}0659) \\
t &= -4{,}492\ldots \\
t &\approx -4{,}5
\end{aligned}$$

Mallin mukaan kuolinhetki oli 4,5 tuntia sitten.

Vastaus: 4,5 tuntia sitten

427. Koboltin nykyinen kulutus on $\dfrac{7\,000\,000}{64} = 109\,375$ tonnia vuodessa.
Vuosikulutus kasvaa 10 % joka vuosi. Vuosikulutukset muodostavat geometrisen summan, jossa a_1 = 109 375 ja q = 1,1. Nykyiset kobolttivarat ovat 7 000 000 tonnia. Lasketaan, milloin geometrisen summan arvoksi saadaan 7 000 000. Muodostetaan summakaavan avulla yhtälö $\dfrac{109\,375\cdot(1-1{,}1^x)}{1-1{,}1} = 7\,000\,000$ ja ratkaistaan yhtälöstä x.
Ratkaisuksi saadaan x = 20,999…≈ 21.

Kobolttivarat riittäisivät 21 vuotta.

Vastaus: 21 vuotta

428. $f(x) = a \cdot q^x$

a) Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä kirjainten a ja q arvot.
Pisteestä (1, 6) saadaan yhtälö $6 = aq^1$
ja pisteestä (3, 24) saadaan yhtälö $24 = aq^3$

Ratkaistaan

$$6 = aq$$
$$q = \frac{6}{a}$$

Sijoitetaan

$$24 = aq^3$$
$$24 = a\left(\frac{6}{a}\right)^3$$
$$24 = \frac{a \cdot 216}{a^3}$$
$$24 = \frac{216}{a^2}$$
$$2a^2 = 216 \quad \|: 24$$
$$a^2 = 9$$
$$a = \pm\sqrt{9}$$
$$a = \pm 3$$

Kun $a = 3$, niin $q = \frac{6}{3} = 2$.

Kun $a = -3$, niin $q = \frac{6}{-3} = -2$, joka on negatiivinen eli ei kelpaa,

koska eksponentiaalisessa mallissa muutoskertoimen q pitää olla positiivinen.

Saatiin $a = 3$ ja $q = 2$, joten $f(x) = aq^x = 3 \cdot 2^x$.

Vastaus: $f(x) = 3 \cdot 2^x$

b) Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä kirjainten a ja q arvot.
Pisteestä (0,2) ja saadaan yhtälö $2 = aq^0$
ja pisteestä $\left(2, \frac{2}{9}\right)$ saadaan yhtälö $\frac{2}{9} = aq^2$.

Ratkaistaan

$$2 = aq^0$$
$$2 = a \cdot 1$$
$$a = 2$$

Sijoitetaan

$$\frac{2}{9} = aq^2$$
$$\frac{2}{9} = 2 \cdot q^2 \quad \| : 2$$
$$\frac{1}{9} = q^2$$
$$q^2 = \pm\sqrt{\frac{1}{9}}$$
$$q = \pm\frac{1}{3}$$

Negatiivinen arvo ei kelpaa, koska eksponentiaalisessa mallissa $q > 0$,
joten saadaan $q = \frac{1}{3}$

Lisäksi saatiin $a = 2$, joten $f(x) = aq^x = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Vastaus: $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

4.2 Eksponentiaalisen mallin sovittaminen

ALOITA PERUSTEISTA

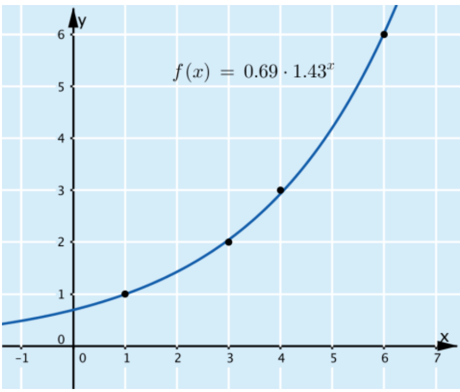
429. **A** Lineaarisen mallin havaintopisteet ovat suoralla tai sen lähistöllä. Kuvan III pistejoukko näyttää olevan lähimpänä suoraa, joten lineaarista mallia vastaa kuva III.

B Polynomisen mallin havaintopisteet ovat polynomifunktion kuvaajalla tai sen lähistöllä. Kuvan I pistejoukko näyttää muodostavan paraabelin, joten polynomista mallia vastaa kuva I.

C Eksponentiaalisen mallin havaintopisteet ovat eksponenttifunktion kuvaajalla tai sen lähistöllä. Kuvan II pistejoukko näyttää muodostavan eksponenttifunktion kuvaajan, joten eksponentiaalista mallia vastaa kuva II.

Vastaus: A: III, B: I ja C: II

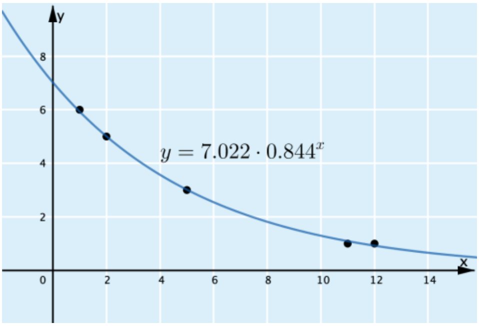
430. Merkitään taulukon pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



Mallin yhtälö on $y = 0{,}69 \cdot 1{,}43^x$.

Vastaus: $y = 0{,}69 \cdot 1{,}43^x$

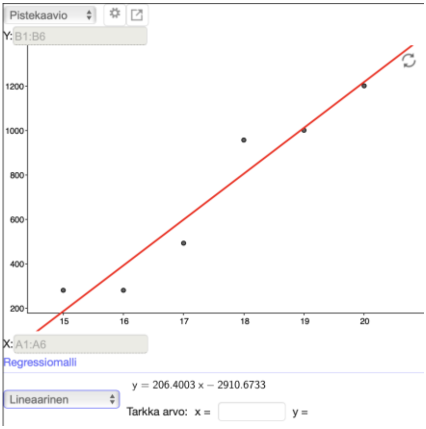
431. Merkitään taulukon pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



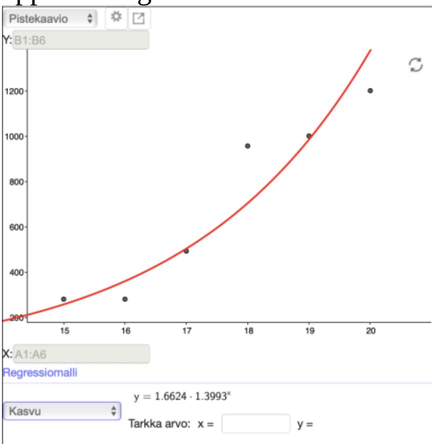
Eksponentiaalinen malli on $f(x) = 7{,}022 \cdot 0{,}844^x$.
Sijoitetaan lausekkeeseen $x = 8$, jolloin saadaan $f(8) = 1{,}813\ldots \approx 1{,}8$.

Vastaus: $f(x) = 7{,}022 \cdot 0{,}844^x$, $f(8) = 1{,}8$

432. **a)** Lineaarinen malli voidaan sovittaa aineistoon valitsemalla appletin Regressiomalli-kohtaan Lineaarinen.



Eksponentiaalinen mallin voidaan sovittaa aineistoon valitsemalla appletin Regressiomalli-kohtaan Kasvu.

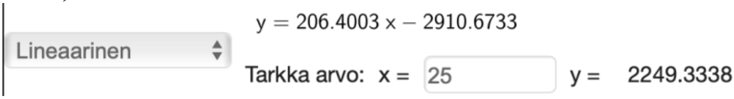


Kesätyöpalkkojen lineaarisen mallin yhtälö on $y = 206{,}4x - 2910{,}67$ ja eksponentiaalisen mallin funktio on $g(x) = 1{,}66 \cdot 1{,}4^x$.

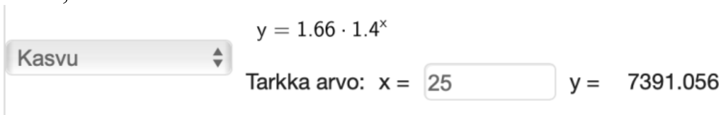
Vastaus: $f(x) = 206{,}4x - 2910{,}67$ ja $g(x) = 1{,}66 \cdot 1{,}4^x$

b) Kesätyötienestit 25-vuotiaana saadaan sijoittamalla appletin Tarkka arvo -kohtaan $x = 25$.

Lineaarisen mallin mukaan kesätienestit 25-vuotiaana ovat 2249,33 €



Eksponentiaalisen mallin mukaan kesätyötienestit 25-vuotiaana ovat 7391,06 €.

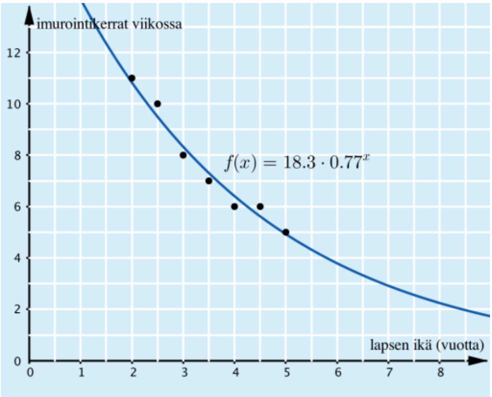


Lineaarisen mallin mukaan Leo tienaa kesätöistä 25-vuotiaana 2249,33 € ja eksponentiaalisen mallin mukaan 7391,06 €.

Lineaarisen mallin mukainen palkka kuulostaa realistisemmalta kuin eksponentiaalisen mallin mukainen.

Vastaus: Lineaarisen mallin mukaan 2249,33 € ja eksponentiaalisen mukaan 7391,06 €. Molempien mallien antamat ennusteet ovat mahdollisia.

433. Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa viikoittaisten imurointikertojen lukumääräksi funktion $f(x) = 18{,}3 \cdot 0{,}77^x$, missä x on lapsen ikä vuosina.

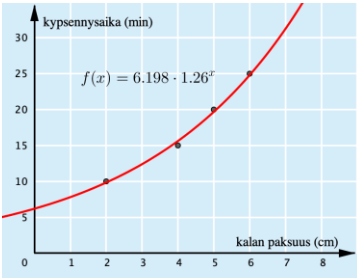
Viikoittaisten imurointikertojen lukumäärä lapsen ollessa 7-vuotias saadaan sijoittamalla $x = 7$ funktioon f.

$f(7) = 2{,}914... \approx 3$

Lapsen ollessa 7-vuotias mallin mukaan imurointikertoja on 3 viikossa.

Vastaus: $f(x) = 18{,}3 \cdot 0{,}77^x$, 3 kertaa viikossa

434. **a)** Sovitetaan pisteisiin eksponentiaalinen malli.



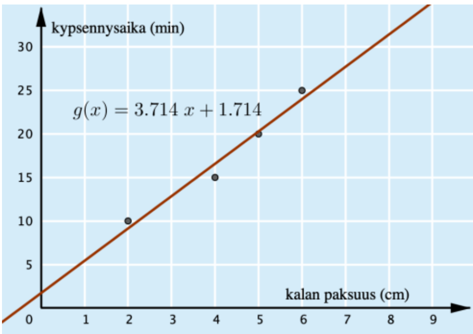
Ohjelma antaa funktion lausekkeeksi $f(x) = 6{,}198 \cdot 1{,}26^x$.

Lasketaan mallin mukainen 4,5 cm paksun kalan kypsennysaika.
$f(4{,}5) = 17{,}532\ldots \approx 18$

Kun kalan paksuus on 4,5 cm, on kypsennysaika noin 18 minuuttia.

Vastaus: $f(x) = 6{,}198 \cdot 1{,}26^x$, kypsennysaika 18 min

b) Sovitetaan pisteisiin lineaarinen malli.



Ohjelma antaa lineaariseksi malliksi funktion $g(x) = 3{,}714x + 1{,}714$.

Lasketaan mallin mukainen 4,5 cm paksun kalan kypsennysaika.
$g(4{,}5) = 18{,}428\ldots \approx 18$

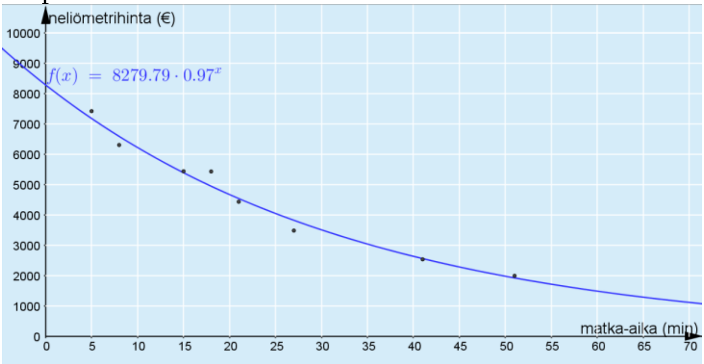
Kun kalan paksuus on 4,5 cm, on kypsennysaika noin 18 minuuttia.

Vastaus: $g(x) = 3{,}714x + 1{,}714$, kypsennysaika 18 min

c) Pisteet ovat lähempänä eksponentiaalisen mallin käyrää kuin lineaarisen mallin suoraa, joten eksponentiaalinen malli näyttää sopivan aineistoon hieman paremmin.

Vastaus: Eksponentiaalinen malli näyttää sopivan aineistoon paremmin.

435. **a)** Merkitään taulukon pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa funktion lausekkeeksi $f(x) = 8279{,}79 \cdot 0{,}97^x$, jossa x on matkustusaika keskustasta minuutteina.

Vastaus: $f(x) = 8279{,}79 \cdot 0{,}97^x$

b) Tunti on 60 minuuttia, joten arvio asunnon neliömetrihinnasta saadaan sijoittamalla $x = 60$ funktioon f.
$f(60) = 1482{,}73 \approx 1480$

Mallin mukaan tunnin matkustusajan päässä Helsingin keskustassa olevan asunnon neliömetrihinta on noin 1480 euroa.

Vastaus: 1480 €

c) Lasketaan asunnon neliömetrihinta

$$\frac{40\,000\ €}{30\ \text{m}^2} = 1333{,}333...\ €/\text{m}^2 \approx 1333{,}33\ €/\text{m}^2$$

Muodostetaan yhtälö $f(x) = 1333{,}33$ ja ratkaistaan siitä ohjelmalla matkustusaika x.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1333{,}33 \\ x &= 63{,}713\ldots \\ x &\approx 64 \end{aligned}$$

Asunto on noin 64 minuutin päässä Helsingin keskustasta.

Vastaus: 64 min

VAHVISTA OSAAMISTA

436. **a)** Pörssikurssi viidentenä tarkkailuvuotena saadaan sijoittamalla $x = 5$ malliin f.

$f(5) = 2 \cdot 2{,}5^5 = 195{,}3125 \approx 195{,}31$ €

Mallin mukaan pörssikurssi olisi ollut viidentenä vuonna 195,31 euroa.

Vastaus: 195,31 euroa

b) Ratkaistaan yhtälöllä, kuinka monen vuoden x kuluttua funktio $g(x)$ saa arvon 0,01.

$$\begin{aligned} 2597 \cdot 0{,}7^x &= 0{,}01 \quad \| : 2597 \\ 0{,}7^x &= \frac{0{,}01}{2597} \\ x &= \log_{0{,}7}\left(\frac{0{,}01}{2597}\right) \\ x &= 34{,}954\ldots \\ x &\approx 35 \end{aligned}$$

Pörssikurssin arvo on mallin mukaan 0,01 euroa 35. tarkkailuvuotena.

Vastaus: 35. tarkkailuvuotena

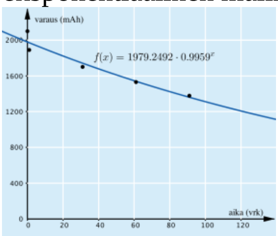
437. **A** Vesipisaran etäisyys maanpinnasta pienenee ajan kuluessa, joten tilanne A ja kuvaaja II kuuluvat yhteen.

B Kun maksavia kuuntelijoita ei ole yhtään, ei lipputulojakaan ole. Kuuntelijoiden määrän kasvaessa lipputulot kasvavat lineaarisesti, joten kuvaaja on origon kautta kulkeva suora. Tilanne B ja kuvaaja III kuuluvat yhteen.

C Jos hirvien määrä kasvaa yhtä monta prosenttia joka vuosi, niin kasvu on eksponentiaalista ja kuvaaja ylöspäin kaartuva käyrä. Tilanne C ja kuvaaja I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III ja C: I

438. **a)** Merkitään taulukon pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa eksponentiaaliseksi malliksi lausekkeeksi $f(x) = 1979{,}2492 \cdot 0{,}9959^x$, jossa x on kuukausia latauksen lopettamisesta.

Vastaus: $f(x) = 1979{,}2492 \cdot 0{,}9959^x$

b) Puoli vuotta on 180 vuorokautta, joten akun varauksen määrä saadaan sijoittamalla $x = 180$ funktioon f.
$f(180) = 943{,}534... \approx 944$

Akun varaus puolen vuoden kuluttua on noin 944 mAh, joka on $\frac{943{,}534...}{2100} = 0{,}449... \approx 45\,\%$ alkuperäisestä varauksesta.

Vastaus: 45 %

c) Kun varausta on kadonnut 95 %, sitä on jäljellä 100 % − 95 % = 5 %.
Täydestä akun varauksesta 2100 mAh 5 % on
0,05 · 2100 mAh = 105 mAh.

Muodostetaan mallin avulla yhtälö, milloin akun varaus on 105 mAh ja ratkaistaan siitä ohjelmalla vuorokausien määrä *x*.

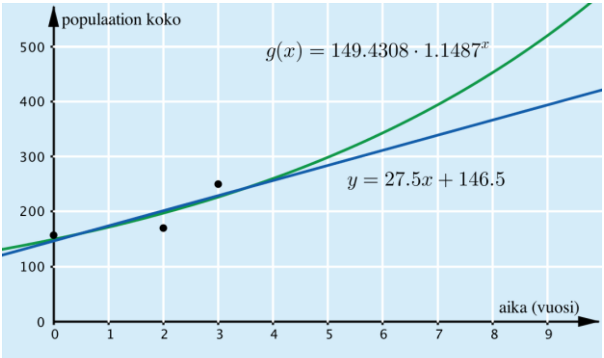
$$f(x) = 105$$
$$x = 713{,}476...$$

Muutetaan vuorokaudet kuukausiksi $\frac{713{,}476...}{30} = 23{,}782... \approx 24.$

Akun varausta on jäljellä 5 % 24 kuukauden kuluttua lataamisesta.

Vastaus: 24 kk

439. Merkitään pisteet (0, 157), (2, 170) ja (3, 250) koordinaatistoon ja sovitetaan niihin lineaarinen ja eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa lineaariseksi malliksi funktion $f(x) = 27{,}5x + 146{,}5$ ja eksponentiaaliseksi malliksi funktion $g(x) = 149{,}4308 \cdot 1{,}1487^x$.

a) Lineaarisen mallin mukainen populaation koko viiden vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla mallin lausekkeeseen $x = 5$.
$f(5) = 284 \approx 280$

Eksponentiaalisen mallin mukainen populaation koko viiden vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla mallin funktioon $x = 5$.
$g(5) = 298{,}819... \approx 300$

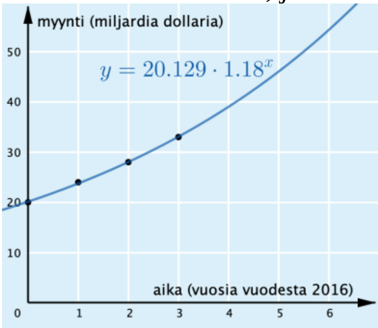
Mallit ovat järkeviä, koska ei ole tiedossa muuta kuin annetut kolmen vuoden tiedot.

Vastaus: lineaarisella 280, eksponentiaalisella 300, ovat

b) Tarkasteluhetkien välillä mallit antavat lähes yhtä suuria arvoja. Tarkasteluhetkien ulkopuolella eksponentiaalinen malli antaa suurempia arvoja kuin lineaarinen malli.

Vastaus: Tarkasteluhetkien välillä mallit antavat lähes yhtä suuria arvoja. Tarkasteluhetkien ulkopuolella eksponentiaalinen malli antaa suurempia arvoja kuin lineaarinen malli.

440. **a)** Merkitään taulukon pisteet koordinaatistoon siten, että *x*-koordinaatit alkavat vuodesta 2016, ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa eksponentiaaliseksi malliksi funktion
$f(x) = 20{,}129 \cdot 1{,}180^x$, jossa x on vuosia vuodesta 2016.

Vastaus: $f(x) = 20{,}129 \cdot 1{,}180^x$, jossa x on vuodesta 2016 kulunut aika

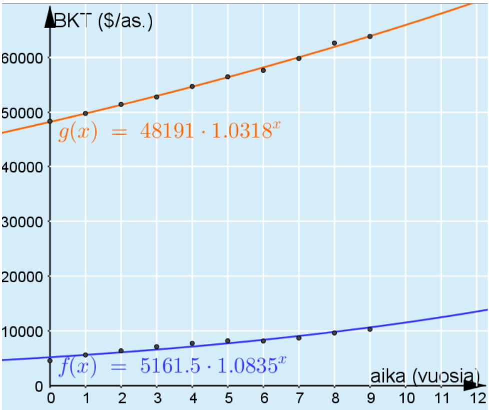
b) Eksponentiaalisen mallin muutoskerroin kertoo, kuinka moninkertaiseksi funktion arvo muuttuu, kun muuttujan arvo kasvaa yhdellä yksiköllä, joten myynnin arvo 1,18-kertaistuu vuosittain. Mallin mukaan myynnin arvo kasvaa noin 18 % vuosittain.

Vastaus: 18 %

c) Vuodesta 2016 vuoteen 2025 on 2030 – 2016 = 14 vuotta. Mallin mukaan myynnin arvo vuonna 2025 on siis
$f(14) = 204{,}633... \approx 200$ miljardia dollaria.

Vastaus: 200 miljardia dollaria

441. **a)** Sovitetaan kummankin maan aineistoon eksponentiaalinen malli siten, että muuttujana on aika vuosina vuodesta 2010.



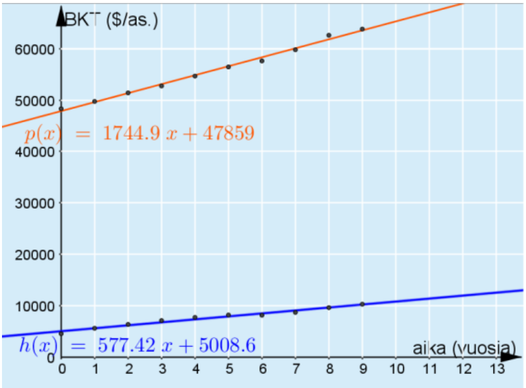
Ohjelma antaa Kiinan asukaskohtaisen bruttokansantuotteen funktion lausekkeeksi $f(x) = 5161{,}5 \cdot 1{,}0835^x$.

Ohjelma antaa USA:n asukaskohtaisen bruttokansantuotteen funktion lausekkeeksi $g(x) = 48\,191 \cdot 1{,}0318^x$.

Yhtälön $f(x) = g(x)$ ratkaisuksi saadaan $x = 45{,}710\ldots$, joka tarkoittaa, että Kiinan asukaskohtainen bruttokansantuote ylittää USA:n noin 46 vuoden kuluttua vuodesta 2010 lukien eli vuonna 2010 + 46 = 2056. Molempien maiden asukaskohtainen bruttokansantuote on mallin mukaan silloin $f(46) = 5161{,}5 \cdot 1{,}0835^{46} = 206\,467{,}\,586\ldots \approx\ 206\,470$ ($).

Vastaus: vuonna 2056, 206 470 $

b) Sovitetaan kummankin maan aineistoon lineaarinen malli siten, että muuttujana on aika vuosina vuodesta 2010.



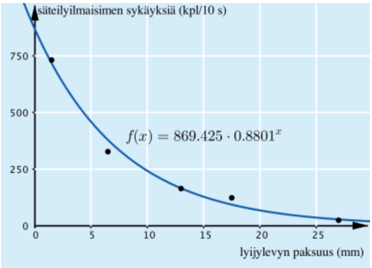
Ohjelma antaa Kiinan asukaskohtaisen bruttokansantuotteen funktion lausekkeeksi $h(x)$ =577,42x + 5008,6.

Ohjelma antaa USA:n asukaskohtaisen bruttokansantuotteen funktion lausekkeeksi $p(x)$ = 1744,9x + 47 859.

Yhtälön $h(x) = p(x)$ ratkaisuksi saadaan x = –36,702…, joka tarkoittaa, että Kiinan asukaskohtainen bruttokansantuote olisi ollut yhtä suuri kuin USA:n noin 37 vuotta sitten ja BKT olisi ollut $h(–37)$ =577,42 · (–37) + 5008,6 = –16 356. Negatiivinen BKT ei ole mahdollinen, joten lineaarisen mallin mukaan Kiinan asukaskohtainen bruttokansantuote ei ylitä koskaan USA:n vastaavaa arvoa.

Vastaus: ei koskaan

442. Merkitään taulukon pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli ohjelmalla.



Ohjelma antaa eksponentiaaliseksi malliksi $f(x) = 869{,}425 \cdot 0{,}8801^x$.

a) Lasketaan, kuinka paljon säteilystä pääsee mallin mukaan läpi 1,0 cm sijoittamalla funktioon $x = 10$.
$f(10) = 242{,}497...$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia säteilystä pääsee levystä läpi.

$$\frac{242{,}497...}{869{,}425} = 0{,}278... \approx 0{,}28 = 28\ \%$$

Säteilystä ei pääse 1,0 cm levyn läpi 100 % − 28 % = 72 %.

Vastaus: 72 %

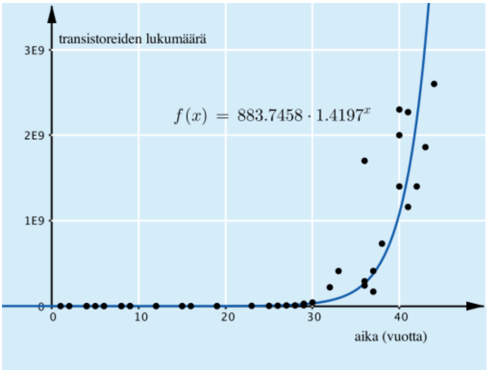
b) Puolet säteilymäärän alkuarvosta on $\frac{869{,}425}{2} = 434{,}7125.$
Muodostetaan säteilymäärästä yhtälö ja ratkaistaan siitä ohjelmalla levyn paksuus x.

$$f(x) = 434{,}7125$$
$$x = 5{,}428...$$
$$x \approx 5{,}4$$

Lyijylevyn puoliintumispaksuus on noin 5,4 mm.

Vastaus: 5,4 mm

443. **a)** Merkitään taulukon pisteet koordinaatistoon siten, että x-koordinaatti ilmaisee vuosien määrän vuodesta 1970, ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa eksponentiaaliseksi malliksi funktion
$f(x) = 883{,}7458 \cdot 1{,}4197^x$, jossa x on vuodesta 1970 kulunut aika.

Vastaus: $f(x) = 883{,}7458 \cdot 1{,}4197^x$, jossa x on vuodesta 1970 kulunut aika

b) Mallin muutoskerroin on $q = 1{,}4197$ eli transistoreiden lukumäärä 1,4197-kertaistuu vuosittain. Mallin mukaan kahdessa vuodessa transistoreiden määrä kasvaa $1{,}14197^2 = 2{,}015... \approx 2$-kertaiseksi.

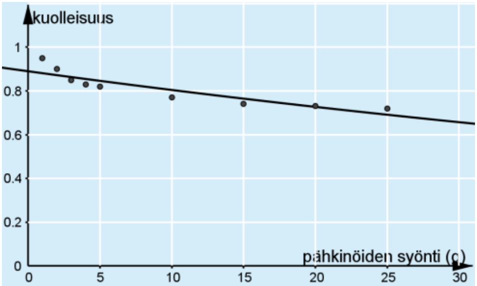
Mooren lain mukaan transistoreiden lukumäärä noin kaksinkertaistuu vuosittain, joten mallin mukaan Mooren laki pitää paikkaansa.

Vastaus: pitää

444. **a)** Merkitään henkilön päivässä syömien pähkinöiden määrää grammoina kirjaimella x ja kuolleisuutta kirjaimella y.

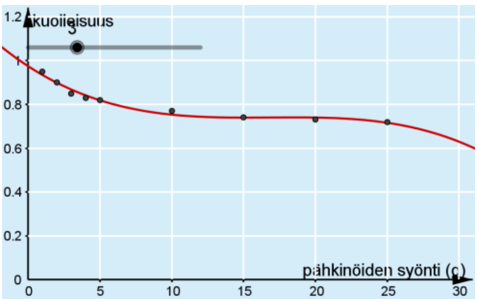
Pisteet (1; 0,95), (2; 0,90); (3; 0,85), (4; 0,83), (5; 0,82), (10; 0,77), (15; 0,74), (20; 0,73) ja (25; 0,72) ovat kuvaajalla.

Sovitetaan pisteisiin eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa mallin lausekkeeksi $f(x) = 0{,}89 \cdot 0{,}99^x$.

Testaamalla eriasteisia polynomeja havaitaan, että kolmannen asteen polynomi kuvaa tilannetta parhaiten.

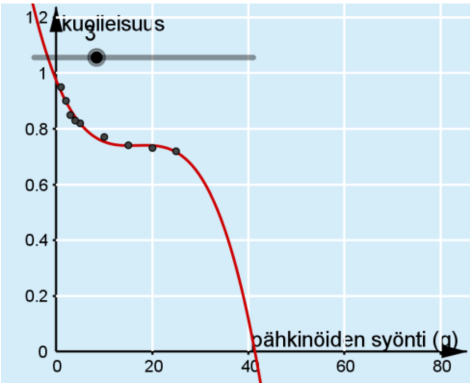


Ohjelma antaa funktion lausekkeeksi
$g(x) = -0{,}000\,05x^3 + 0{,}00257x^2 - 0{,}04269x + 0{,}97441$.

Vastaus: esim. eksponentiaalinen malli $f(x) = 0{,}89 \cdot 0{,}99^x$, polynominen malli $g(x) = -0{,}000\,05x^3 + 0{,}00257x^2 - 0{,}04269x + 0{,}97441$

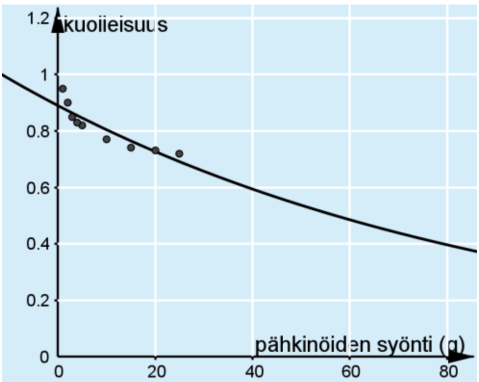
b) Polynomifunktion kuvaaja kulkee tarkemmin pisteiden kautta kuin eksponentiaalinen malli, joten sen avulla on parempi arvioida Karin kuolleisuuslukua. Molemmat mallit tosin antavat suunnilleen saman tuloksen.

Kun päivittäin syötyjen pähkinöiden määrä kasvaa, polynomimallin mukaan kuolleisuus muuttuu negatiiviseksi.



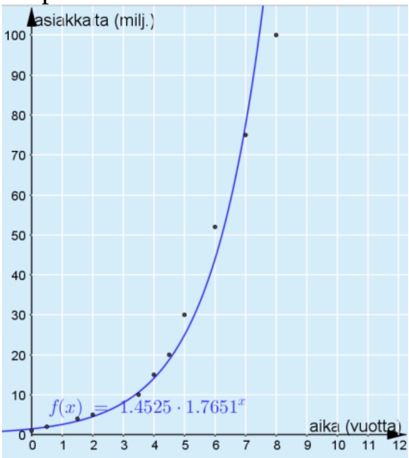
Minkään väestöryhmän kuolleisuus ei voi olla negatiivinen, joten polynomimalli ei sovellu Marin pähkinöiden syönnin terveysvaikutusten arviointiin.

Eksponentiaalisessa mallissa ei ole vastaavaa ongelmaa, joten se soveltuu Marin tapaukseen paremmin.



Vastaus: Matias: polynominen malli, Mari: eksponentiaalinen malli

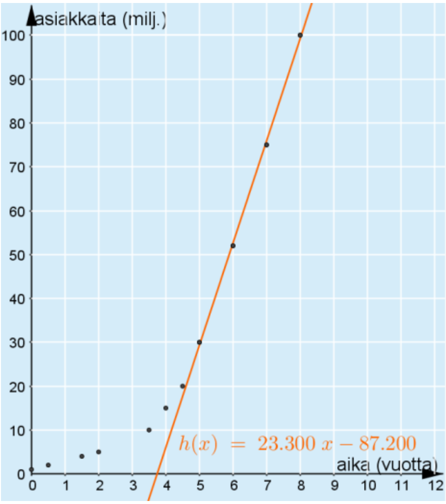
445. **a)** Merkitään taulukon pisteet koordinaatistoon siten, että x-koordinaatti ilmaisee vuosien määrän maaliskuusta 2011, ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa eksponentiaaliseksi malliksi funktion
$f(x) = 1{,}4525 \cdot 1{,}7651^x$, jossa x on maaliskuusta 2011 kulunut aika.

Vastaus: $f(x) = 1{,}4525 \cdot 1{,}7651^x$, jossa x on maaliskuusta 2011 kulunut aika

b) Vuodesta 2011 vuoteen 2016 on viisi vuotta. a-kohdan kuvasta havaitaan, että *x*-koordinaatista 5 lähtien pisteet näyttäisivät asettuvan suoralle, joten sovitetaan neljälle viimeiselle pisteelle lineaarinen malli.



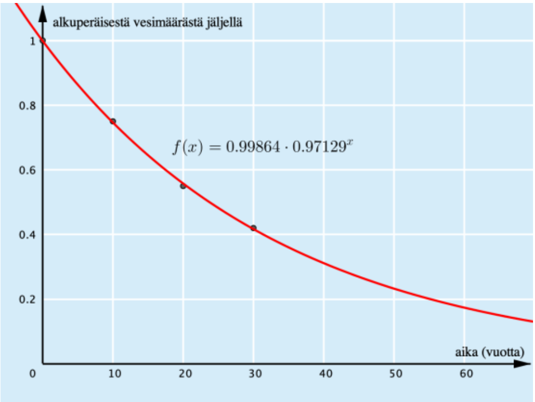
.
Lineaariseksi malliksi saadaan $h(x) = 23{,}3x - 87{,}2$.

Vuodesta 2011 vuoteen 2025 on 14 vuotta, joten vuoden 2025 asiakasmäärän ennuste on lineaarisen mallin mukaan $h(14) = 23{,}3 \cdot 14 - 87{,}2 = 239$ miljoonaa.
Eksponentiaalisen mallin mukaan vuoden 2025 asiakasmäärän ennuste on $f(14) = 1{,}4525 \cdot 1{,}7651^{14} = 4137{,}868\ldots \approx 4138$ miljoonaa.

Eksponentiaalinen malli antaa 4138 – 239 = 3899 miljoonaa suuremman ennusteen.

Vastaus: lineaarista, lineaarinen malli $h(x) = 23{,}3x - 87{,}2$, eksponentiaalinen malli antaa 3899 miljoonaa suuremman ennusteen

446. **a)** Merkitään tiedot ohjelmaan ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



Ohjelmalla saadaan eksponentiaaliseksi malliksi
$f(x) = 0{,}99864 \cdot 0{,}97129^x$.

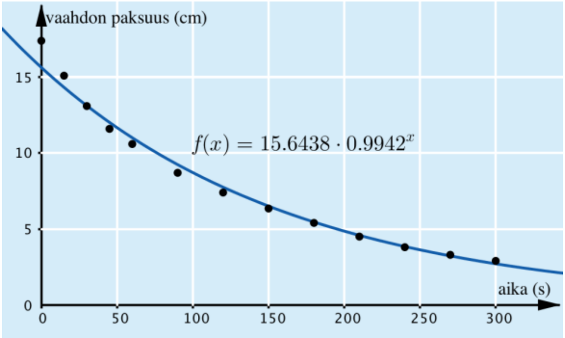
Vastaus: $f(x) = 0{,}99864 \cdot 0{,}97129^x$

b) Jos järven alkuperäinen vesimäärä on a, on saasteen määrä alussa $0{,}00064a$. Uimakelpoisen veden saastepitoisuus on $0{,}0002a$. Muodostetaan veden vaihtuvuudesta yhtälö ja ratkaistaan siitä vuosien määrä x.
$0{,}00064a \cdot 0{,}99864 \cdot 0{,}97129^x = 0{,}0002a$
Ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 39.887\ldots \approx 40$.

Vesi on jälleen uimakelpoista 40 vuoden kuluttua.

Vastaus: 40 vuoden kuluttua

447. **a)** Merkitään taulukon pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa vaahdon paksuuden eksponentiaaliseksi malliksi funktion
$f(x) = 15{,}6438 \cdot 0{,}9942^x$.

Vastaus: $f(x) = 15{,}6438 \cdot 0{,}9942^x$, jossa x on aika sekunteina juoman kaatamisesta

b) Muodostetaan yhtälö sijoittamalla funktion arvoksi 1,0 ja ratkaistaan siitä ohjelmalla kuluva aika x.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1{,}0 \\ x &= 470{,}359... \\ x &\approx 470 \end{aligned}$$

Vaahtoa on jäljellä 1,0 cm, kun aikaa on kulunut 470 s = 7 min 50 s.

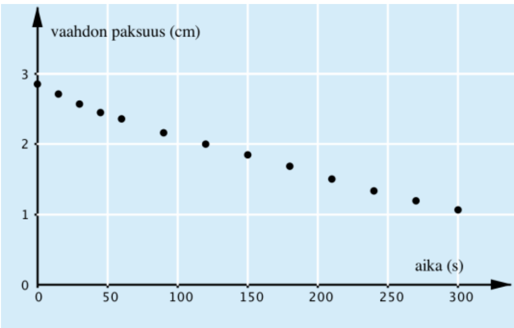
Vastaus: 7 min 50 s

c) Lasketaan vaahdon määrän arvojen luonnolliset logaritmit taulukkolaskentaohjelmalla.

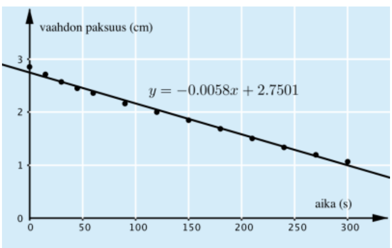
Kopioidaan A ja B sarakkeille annetut tiedot. Kirjoitetaan soluun C2 ”=ln(B2)” ja kopioidaan solua alaspäin.

	A	B	C
1	aika (s)	vaahdon paksuus (cm)	vaahdon paksuuden luonnollinen logaritmi
2	0	17.4	2.8565
3	15	15.1	2.7147
4	30	13.1	2.5726
5	45	11.6	2.451
6	60	10.6	2.3609
7	90	8.7	2.1633
8	120	7.4	2.0015
9	150	6.35	1.8485
10	180	5.4	1.6864
11	210	4.5	1.5041
12	240	3.8	1.335
13	270	3.3	1.1939
14	300	2.9	1.0647

Merkitään taulukon A ja C sarakkeiden pisteet koordinaatistoon.



Pisteet näyttävät muodostavan lineaarisen mallin, joten sovitetaan pisteisiin suora.



Ohjelma antaa lineaariseksi malliksi suoran $y = -0{,}0058x + 2{,}7501$.

Vastaus: lineaarinen malli $y = -0{,}0058x + 2{,}7501$

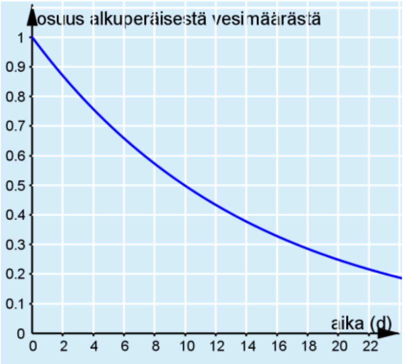
SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

448. Hetkellä $x = 2$ vedestä oli vaihtunut 13 %, joten alkuperäisestä vedestä oli jäljellä 100 % − 13 % = 87 %. Siis $f(2) = 0{,}87a$. Muodostetaan tämän tiedon avulla yhtälö.

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 0{,}87a \\
a \cdot 0{,}5^{\frac{2}{t}} &= 0{,}87a \quad \| : a \\
0{,}5^{\frac{2}{t}} &= 0{,}87 \\
\frac{2}{t} &= \log_{0,5} 0{,}87 \quad \| \cdot t \\
2 &= \log_{0,5} 0{,}87 \cdot t \quad \| : \log_{0,5} 0{,}87 \\
t &= \frac{2}{\log_{0,5} 0{,}87} \\
t &= 9{,}954...
\end{aligned}
$$

Veden alkuperäistä määrää a ei voida näiden tietojen perusteella ratkaista. Puoliintumisajaksi t saatiin 9,954… d ≈ 10 d.

Valitaan funktion kuvaajan piirtämiseksi y-akselin otsikoksi osuus alkuperäisestä vesimäärästä a. Tällöin kerroin a voidaan jättää pois funktion arvoja laskiessa, eli riittää piirtää funktion $g(x) = 0{,}5^{\frac{x}{9,954...}}$ kuvaaja.



Vastaus: $f(x) = a \cdot 0{,}5^{\frac{x}{9,95}}$, 10 vuorokautta

449. **a)** Ensimmäisen kaksinkertaistumisen jälkeen työtuntien määrä $\frac{800}{1000} = 0{,}8$-kertaistuu.

Toisen kaksinkertaistumisen jälkeen työtuntien määrä $\frac{640}{800} = 0{,}8$ -kertaistuu.

Kolmannen kaksinkertaistumisen jälkeen työtuntien määrä $\frac{512}{640} = 0{,}8$ -kertaistuu.

Joten järjestysnumeron kaksinkertaistuessa työmäärä vähenee 100 % − 80 % = 20 %.

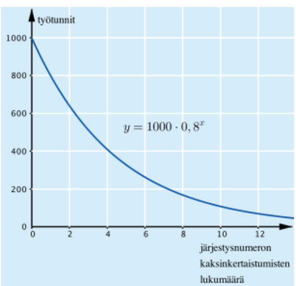
Vastaus: 20 %

b) Työmäärän vähenemiskerroin on $q = 0{,}8$.

Vastaus: $q = 0{,}8$

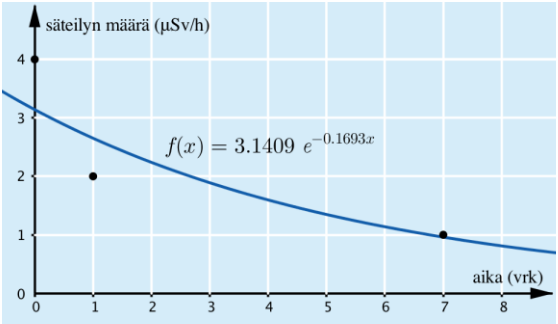
c) Lentokoneen valmistuksen ensimmäisen tuotteen työmäärä on $a = 1000$ ja vähenemiskerroin on $q = 0{,}8$. Oppimiskäyrän funktio on $f(x) = 1000 \cdot 0{,}8^x$, jossa x on järjestysnumeron kaksinkertaistumisten lukumäärä.

Piirretään funktion kuvaaja.



Vastaus: $f(x) = 1000 \cdot 0{,}8^x$, jossa x on järjestysnumeron kaksinkertaistumisten lukumäärä,

450. **a)** Kun kulunutta aikaa merkitään x-koordinaateilla ja säteilyn määrä y-koordinaateilla, saadaan koordinaattipisteet (0, 4), (1, 2) ja (7, 1). Merkitään pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan niihin eksponentiaalinen malli, jonka kantaluku on e (Esimerkiksi GeoGebrassa valitsemalla Regressiomalliksi Eksponentiaalinen).



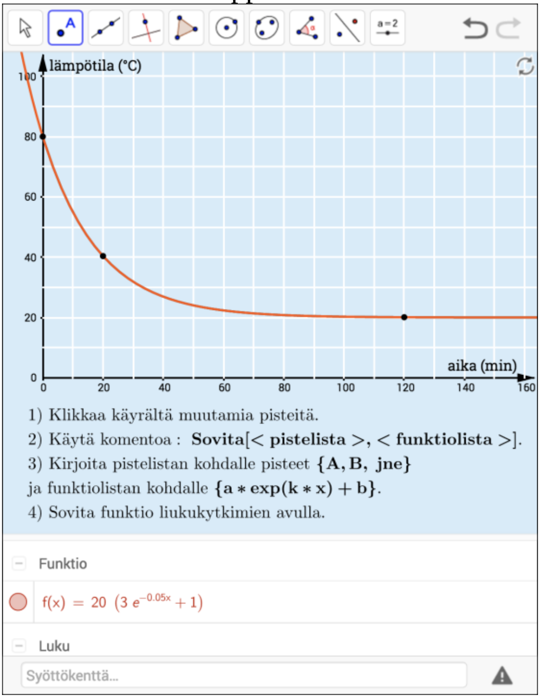
Ohjelma antaa mallin funktioksi $f(x) = 3{,}1409 \cdot e^{-0{,}1693x}$.

Vastaus: $f(x) = 3{,}1409 \cdot e^{-0{,}1693x}$

b) Muutoskertoimen k etumerkistä voidaan päätellä, onko kyseessä eksponentiaalinen kasvaminen vai väheneminen. Jos muutoskerroin k on positiivinen, kyseessä on eksponentiaalista kasvamista, ja jos negatiivinen, kyseessä on eksponentiaalista vähenemistä.

Vastaus: Etumerkistä voidaan päätellä, onko kyseessä eksponentiaalinen kasvamista vai väheneminen.

451. **a)** Sovitetaan funktio appletin avulla.



Appletti antaa funktion lausekkeeksi
$f(x) = 20(3e^{-0,05x} + 1) = 60e^{-0,05x} + 20$.

Vastaus: $f(x) = 60e^{-0,05x} + 20$

b) Funktion lausekkeen perusteella jäähtymisvakio $k = -0,05$.

Vastaus: $k = -0,05$

c) Funktion lausekkeessa vakio on ympäristön lämpötila, joten ympäristön lämpötila on 20 °C.

Vastaus: 20 °C

d) Kuvaajan perusteella teen lämpötila saavuttaa ympäristön lämpötilan noin 100 minuutin kuluttua.

Vastaus: n. 100 min kuluttua