2 LINEAARINEN MALLI

2.1 Kulmakerroin

ALOITA PERUSTEISTA

201. Suoran kulmakerroin k on muuttujan x kerroin.

a) Suoran $y = 5x - 2$ yhtälössä muuttujan x kerroin on 5, joten kulmakerroin on $k = 5$.

Vastaus: $k = 5$

b) Suoran $y = -x$ yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $y = -1x$. Kulmakerroin on siis $k = -1$.

Vastaus: $k = -1$

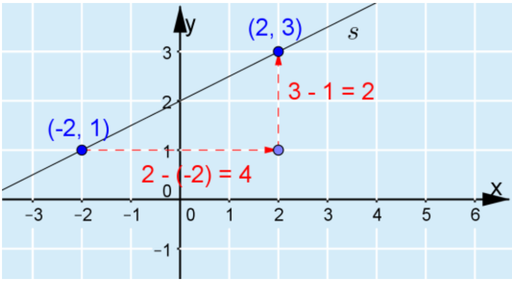
c) Suoran $y = 4$ yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $y = 0x + 4$. Kulmakerroin on siis $k = 0$.

Vastaus: $k = 0$

d) Suoran $y = 5 - 3x$ yhtälössä muuttujan x kerroin on -3, joten kulmakerroin on $k = -3$.

Vastaus: $k = -3$

202. a)

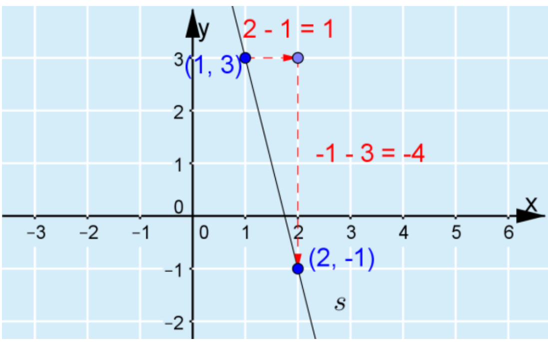


Määritetään suoran kulmakerroin annettujen pisteiden koordinaattien avulla.

Kun suoran pisteen *x*-koordinaatti kasvaa neljä yksikköä, suoran pisteen *y*-koordinaatti kasvaa kaksi yksikköä. Kulmakerroin saadaan jakamalla *y*-koordinaattien muutos *x*-koordinaattien muutoksella, joten suoran kulmakerroin on $k=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.
Koska kulmakerroin on positiivinen, niin suora on nouseva.

Vastaus: $k=\frac{1}{2}$, nouseva

b)

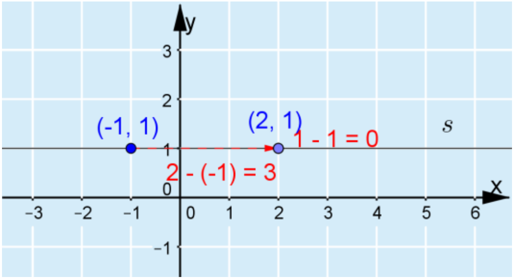


Määritetään suoran kulmakerroin annettujen pisteiden koordinaattien avulla.

Kun suoran pisteen *x*-koordinaatti kasvaa yhden yksikön, suoran pisteen *y*-koordinaatti pienenee neljä yksikköä. Kulmakerroin saadaan jakamalla *y*-koordinaattien muutos *x*-koordinaattien muutoksella, joten suoran kulmakerroin on $k=\frac{-4}{1}=-4$. Koska kulmakerroin on negatiivinen, niin suora on laskeva.

Vastaus: $k = -4$, laskeva

c)



Määritetään suoran kulmakerroin annettujen pisteiden koordinaattien avulla.

Kun suoran pisteen *x*-koordinaatti kasvaa kolme yksikköä, suoran pisteen *y*-koordinaatti ei muutu laisinkaan. Kulmakerroin saadaan jakamalla *y*-koordinaattien muutos *x*-koordinaattien muutoksella, joten suoran kulmakerroin on $k=\frac{0}{3}=0$. Kulmakerroin ei ole positiivinen eikä negatiivinen, joten suora ei ole nouseva eikä laskeva.

Vastaus: $k = 0$, ei nouseva eikä laskeva

203. **a)** Kulmakerroin saadaan jakamalla suoran pisteiden (1, 0) ja (2, 1) y-koordinaattien muutos x-koordinaattien muutoksella.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{2-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Vastaus: $k = 1$

b) Kulmakerroin saadaan jakamalla suoran pisteiden (7, 3) ja (6, 4) y-koordinaattien muutos x-koordinaattien muutoksella.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{6-7} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Vastaus: $k = -1$

c) Kulmakerroin saadaan jakamalla suoran pisteiden (–1, −2) ja (2, 4) y-koordinaattien muutos x-koordinaattien muutoksella.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$$

Vastaus: $k = 2$

204. **a)** Kulmakerroin saadaan jakamalla suoran pisteiden (1, 0) ja (3, 8) y-koordinaattien muutos x-koordinaattien muutoksella.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-0}{3-1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Koska kulmakerroin on positiivinen, suora on nouseva.

Vastaus: $k = 4$, nouseva

b) Kulmakerroin saadaan jakamalla suoran pisteiden (−4, 3) ja (6, −2) y-koordinaattien muutos x-koordinaattien muutoksella.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-3}{6-(-4)}=\frac{-5}{10}=-\frac{1}{2}.$$

Koska kulmakerroin on negatiivinen, suora on laskeva.

Vastaus: $k=-\frac{1}{2}$, laskeva

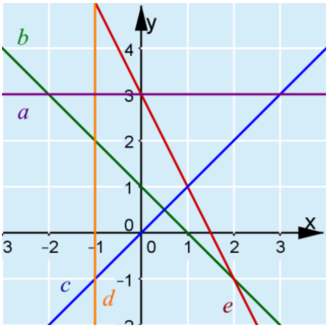
c) Kulmakerroin saadaan jakamalla suoran pisteiden (3, −6) ja (−2, −8) *y*-koordinaattien muutos *x*-koordinaattien muutoksella.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-8-(-6)}{-2-3}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$$

Koska kulmakerroin on positiivinen, suora on nouseva.

Vastaus: $k=\frac{2}{5}$, nouseva

205.



Väitteen I mukaisen suoran kulmakerroin on −1. Tämä tarkoittaa, että kun kuljetaan suoraa pitkin yksi yksikkö oikealle, mennään samalla 1 yksikkö alas. Tämä sopii suoraan *b*. Siis väite I ja suora *b* kuuluvat yhteen.

Väitteen II mukaisen suoran kulmakerroin on −2. Tämä tarkoittaa, että kun kuljetaan suoraa pitkin yksi yksikkö oikealle, mennään samalla 2 yksikköä alas. Tämä sopii suoraan *e*. Siis väite II ja suora *e* kuuluvat yhteen.

Väitteen III mukaisen suoran vakiotermi on 0. Suora siis leikkaa *y*-akselin pisteessä (0, 0), mikä sopii suoraan *c*. Väite III ja suora *c* kuuluvat yhteen.

Väitteen IV mukaisen suoran kulmakerroin on 0. Tämä tarkoittaa, että kun kuljetaan suoraa pitkin yksi yksikkö oikealle, mennään samalla 0 yksikköä ylös, eli suora on *x*-akselin suuntainen. Tämä sopii suoraan *a*. Siis väite IV ja suora *a* kuuluvat yhteen.

Väitteen V mukaisella suoralla ei ole kulmakerrointa. Suora on siis *y*-akselin suuntainen, mikä sopii suoraan *d*. Siis väite V ja suora *d* kuuluvat yhteen.

Vastaus: I: b, II: e, III: c, IV: a ja V: d

206. Suorat ovat yhdensuuntaisia, jos niiden kulmakertoimet ovat samat. Lasketaan suorien *l* ja *m* kulmakertoimet.

l: (–12, 8) ja (–2, 6)

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-8}{-2-(-12)}=\frac{-2}{10}=-\frac{1}{5}$$

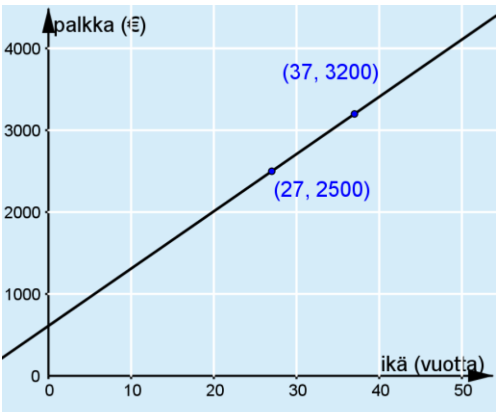
m: (–6, –1) ja (1, –2)

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-(-1)}{1-(-6)}=\frac{-1}{7}=-\frac{1}{7}$$

Suorien *l* ja *m* kulmakertoimet eivät ole samat, joten suorat *l* ja *m* eivät ole yhdensuuntaisia.

Vastaus: suora *l*: $k=-\frac{1}{5}$ ja suora *m*: $k=-\frac{1}{7}$ eivät ole

207. **a)** Piirretään suora pisteiden (27, 2500) ja (37, 3200) kautta.



b) Suoran kulmakerroin on $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3200-2500}{37-27}=\frac{700}{10}=70.$

Kulmakerroin ilmaisee kuukausipalkan vuosittaisen nousun. Kuukausipalkka nousee siis 70 €/vuosi.

Vastaus: *k* = 70. Kuukausipalkka nousee vuodessa 70 €.

208. **a)** Luvun $\frac{1}{2}$ käänteisluku on $\frac{2}{1}=2$. Luvun 2 vastaluku on –2, joten luvun $\frac{1}{2}$ käänteisluvun vastaluku on $-\frac{2}{1}=-2$.

Vastaus: –2

b) Toisiaan vasten kohtisuorassa olevien suorien kulmakertoimet ovat toistensa käänteislukujen vastalukuja, joten suoraa s vasten kohtisuorassa olevan suoran kulmakerroin on $k = -2$.

Vastaus: $k = -2$

c) Kohtisuoran suoran yhtälössä $y = kx + b$ kulmakerroin $k = -2$ ja vakiotermi $b = 3$.

Suoran yhtälö on siis $y = -2x + 3$.

Vastaus: $y = -2x + 3$

VAHVISTA OSAAMISTA

209. **a)** Suoran yhtälöstä $y = 4x - 5$ nähdään, että suoran kulmakerroin on 4. Suoran pisteen y-koordinaatti muuttuu siis 4 yksikköä, kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä ja suoran pisteen y-koordinaatti muuttuu $2 \cdot 4 = 8$ yksikköä, kun x-koordinaatti kasvaa kahdella.

Vastaus: $k = 4$, kasvaa 8

b) Suoran yhtälöstä $y = 5$ nähdään, että suoran kulmakerroin on 0, joten suoran pisteen y-koordinaatti ei muutu laisinkaan.

Vastaus: $k = 0$, ei muutu

c) Muokataan suoran yhtälö muotoon, jossa y on vasemmalla ja muut termit oikealla.

$$\begin{aligned} 6x + 8y &= 16 \\ 8y &= -6x + 16 \qquad \| : 8 \\ y &= -\frac{3}{4}x + 2 \end{aligned}$$

Havaitaan, että suoran kulmakerroin on $-\frac{3}{4}$, joten suoran pisteen y-koordinaatti muuttuu $2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{4}^{(2} = -\frac{3}{2}$ yksikköä, kun x-koordinaatti kasvaa kahdella.

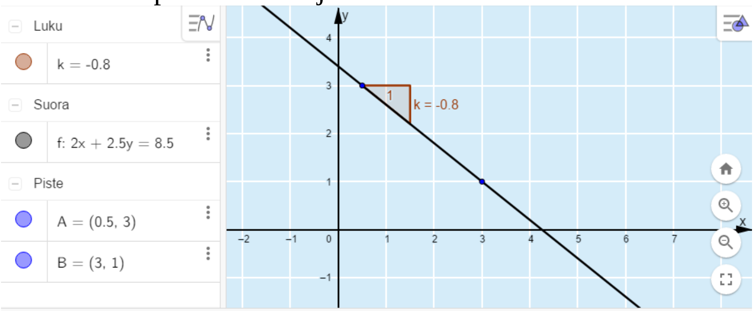
Vastaus: $k = -\frac{3}{4}$, vähenee $\frac{3}{2}$

210. **a)** Kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{3-\frac{1}{2}} \overset{2)}{=} \frac{-2}{2\frac{1}{2}} = -\frac{4}{5}.$$

Koska kulmakerroin on negatiivinen, suora on laskeva.

Tarkistetaan piirtämällä ohjelmalla.



Koska $-\frac{4}{5} = -0{,}8,$ tulos näyttää olevan ohjelman perusteella oikein.

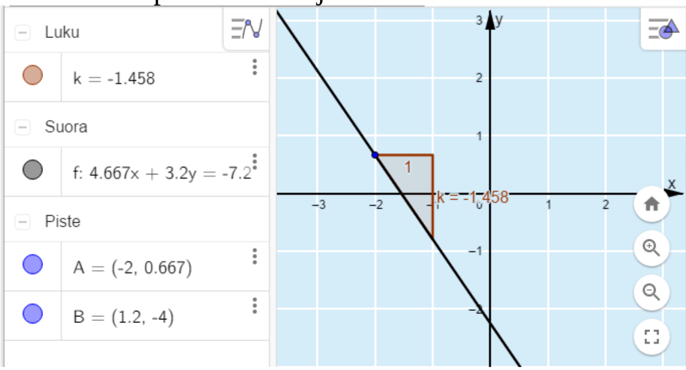
Vastaus: $k = -\frac{4}{5},$ laskeva

b) Kulmakerroin on

$$\begin{aligned} k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-4 - \frac{2}{3}}{\frac{6}{5} - (-2)} \\ &= \frac{-\frac{14}{3}}{\frac{16}{5}} \\ &= -\frac{14}{3} : \frac{16}{5} \\ &= -\frac{14}{3} \cdot \frac{5}{16} \\ &= -\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{8} \\ &= -\frac{35}{24}. \end{aligned}$$

Koska kulmakerroin on negatiivinen, suora on laskeva.

Tarkistetaan piirtämällä ohjelmalla.



Koska $-\frac{35}{24} = -1{,}458...,$ tulos näyttää olevan ohjelman perusteella oikein.

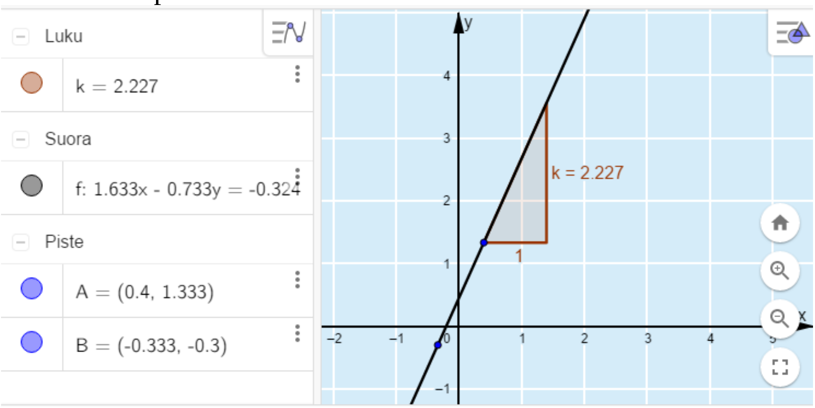
Vastaus: $k = -\frac{35}{24}$, laskeva

c) Kulmakerroin on

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-{}^{3)}\frac{3}{10} - {}^{10)}\frac{4}{3}}{-{}^{5)}\frac{1}{3} - {}^{3)}\frac{2}{5}} \\
&= \frac{-\frac{9}{30} - \frac{40}{30}}{-\frac{5}{15} - \frac{6}{15}} \\
&= \frac{-\frac{49}{30}}{-\frac{11}{15}} \\
&= -\frac{49}{30} \cdot \left(-\frac{15}{11}\right) \\
&= \frac{49}{2} \cdot \frac{1}{11} \\
&= \frac{49}{22}.
\end{aligned}
$$

Koska kulmakerroin on positiivinen, suora on nouseva.

Tarkistetaan piirtämällä.



Koska $\frac{49}{22} = 2{,}227...$, tulos näyttää olevan ohjelman perusteella oikein.

Vastaus: $k = \frac{49}{22}$, nouseva

211. **a)** Esimerkiksi pisteet (−5, 2) ja (5, −1) näyttäisivät olevan suoralla. Lasketaan kulmakerroin.

$$\begin{aligned} k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1-2}{5-(-5)} \\ &= \frac{-3}{10} \\ &= -\frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Vastaus: $k = -\frac{3}{10}$

b) Esimerkiksi pisteet (−10, 100) ja (15, 300) näyttäisivät olevan suoralla. Lasketaan kulmakerroin.

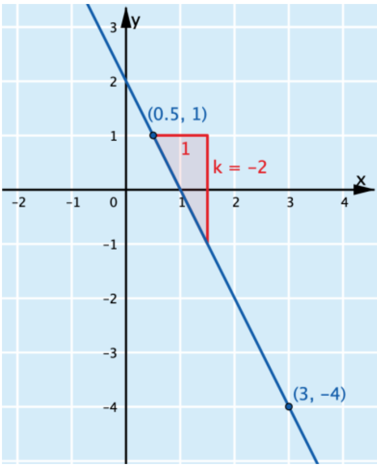
$$\begin{aligned} k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{300-100}{15-(-10)} \\ &= \frac{200}{25} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Vastaus: $k = 8$

212. **a)** Kulmakerroin saadaan jakamalla suoran pisteiden $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ja (3, –4) *y*-koordinaatin muutos *x*-koordinaatin muutoksella.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-1}{3-\frac{1}{2}} = \frac{-5}{\frac{5}{2}} = -2.$$

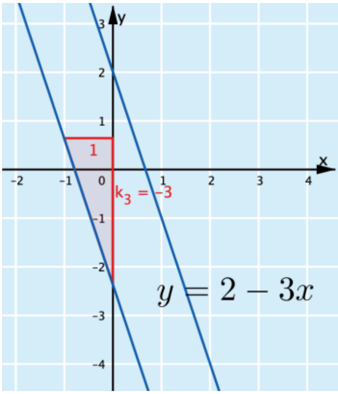
Tarkistetaan kulmakerroin piirtämällä ohjelmalla pisteiden kautta kulkeva suora.



Vastaus: $k = -2$

b) Suorat ovat yhdensuuntaisia, kun niiden kulmakertoimet ovat samat. Suoran $y = 2 - 3x$, muuttujan x kerroin on –3, joten suoran kulmakerroin on $k = -3$. Näin ollen muodostettavan suoran kulmakerroin on oltava $k = -3$.

Tarkistetaan ohjelmalla piirtämällä esimerkiksi pisteen (0, –2) kautta kulkeva suoran $y = 2 - 3x$ kanssa yhdensuuntainen suora ja määrittämällä sen kulmakerroin.

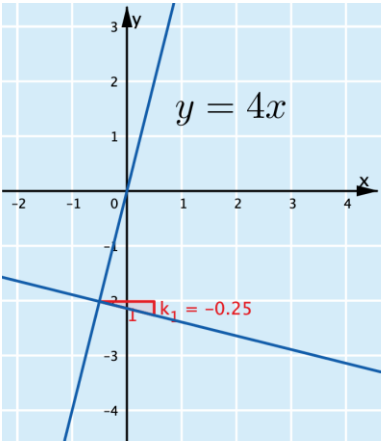


Vastaus: $k = -3$

c) Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, kun niiden kulmakertoimet ovat toistensa käänteisluvun vastalukuja. Suoran $y = 4x$ kulmakerroin on 4.

Luvun 4 käänteisluvun vastaluku on $-\frac{1}{4}$, joten kysytty kulmakerroin on $k = -\frac{1}{4}$.

Tarkistetaan ohjelmalla piirtämällä normaali suoralle $y = 4x$ ja määrittämällä normaalin kulmakerroin.



Vastaus: $k = -\frac{1}{4}$

213. **a)** Pisteiden $(-1, 4)$ ja $(5, 2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-4}{5-(-1)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Kulmakerroin on $-\frac{1}{3}$, joten väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, $-\frac{1}{3}$

b) Sijoittamalla $y = 6$ suoran $3x - 2y + 6 = 0$ yhtälöön saadaan

$$3x - 2 \cdot 6 + 6 = 0$$
$$3x = 6 \quad \| :3$$
$$x = 2$$

Väite on siis tosi.

Vastaus: tosi

c) Muuttamalla suoran yhtälö $x - 3y = 0$ muotoon $y = \frac{1}{3}x$ huomataan, että suorien kulmakertoimet ovat yhtä suuret, joten suorat ovat yhdensuuntaiset.

Vastaus: tosi

d) Suora $y = 2$ on x-akselin suuntainen, joten se on kohtisuorassa y-akselia vastaan.

Vastaus: tosi

214. Esimerkiksi suoran $y = -4x$ kulmakerroin on -4.

Annetaan muuttujalle x kaksi eri arvoa ja lasketaan niitä vastaavat y:n arvot, kun $y = -4x$.

x	$y = -4x$	piste
0	0	(0,0)
1	−4	(1,−4)

Pisteet ovat esimerkiksi (0, 0) ja (1, –4).

Vastaus: esim. $y = -4x$, (0,0) ja (1, −4)

215. Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vasten, kun niiden kulmakertoimet ovat toistensa käänteislukujen vastalukuja. Suoran $y = 8x + 2$ kulmakertoimen 8 käänteisluvun vastaluku on $-\frac{1}{8}$.

Esimerkkisuorat voivat olla mitä tahansa suoria, kunhan niiden kulmakerroin on $-\frac{1}{8}$.

Esimerkiksi $y = -\frac{1}{8}x$ ja $y = -\frac{1}{8}x + 1$.

Vastaus: esim. $y = -\frac{1}{8}x$ ja $y = -\frac{1}{8}x + 1$.

216. **a)** Pisteet *A*, *B* ja *C* ovat samalla suoralla, jos suoran *AB* kulmakerroin on yhtä suuri kuin suoran *AC* kulmakerroin. Lasketaan ensin suoran *AB* eli pisteiden *A* = (−5, −11) ja *B* = (1, −3) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-(-11)}{1-(-5)}=\frac{8}{6}^{(2}=\frac{4}{3}$$

Lasketaan sitten suoran *AC* eli pisteiden *A* = (−5, −11) ja *C* = (6, 4) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-(-11)}{6-(-5)}=\frac{15}{11}$$

Koska kulmakertoimet eivät ole samat, pisteet eivät ole samalla suoralla.

Vastaus: eivät ole

b) Pisteet *A*, *B*, *C* ja *D* ovat samalla suoralla, joten suorien *AB*, *AC* ja *AD* kulmakertoimet ovat samat. Lasketaan ensin suoran *AB* eli pisteiden *A* = (−1, 1) ja *B* = (2, 3) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-1}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$$

Muodostetaan sitten suoran *AC* eli pisteiden *A* = (−1, 1) ja *C* = (*x*, 5) kautta kulkevan suoran kulmakertoimen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä *x*.

$$\begin{aligned}\frac{5-1}{x-(-1)}&=\frac{2}{3}\\ \frac{4}{x+1}&=\frac{2}{3}\\ 2(x+1)&=4\cdot 3\\ 2x+2&=12\\ 2x&=12-2\\ 2x&=10 \quad \|:2\\ x&=5\end{aligned}$$

Muodostetaan sitten suoran *AD* eli pisteiden $A = (-1, 1)$ ja $D = (-3, y)$ kautta kulkevan suoran kulmakertoimen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä y.

$$\frac{y-1}{-3-(-1)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{y-1}{-3+1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{y-1}{-2} = \frac{2}{3}$$

$$3(y-1) = 2\cdot(-2)$$

$$3y-3 = -4$$

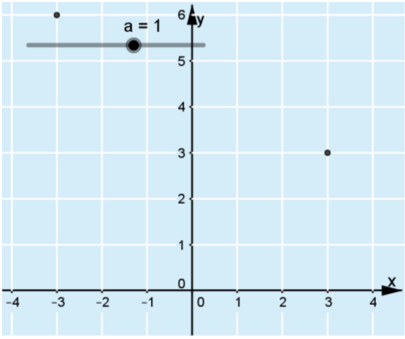
$$3y = -4+3$$

$$3y = -1 \quad \| : 3$$

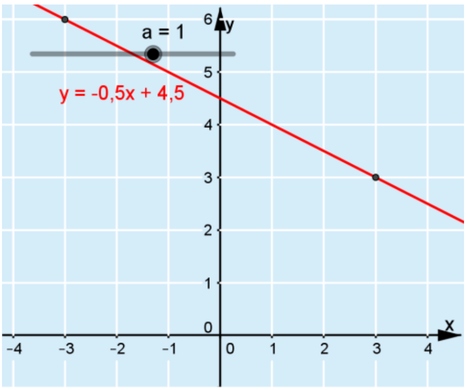
$$y = -\frac{1}{3}$$

Vastaus: $x = 5$, $y = -\frac{1}{3}$

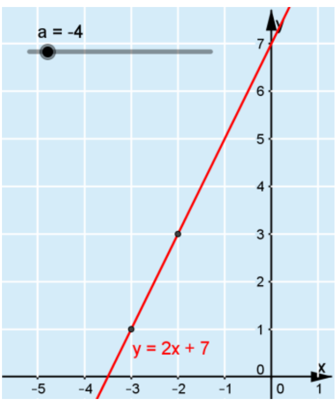
217. Piirretään koordinaatistoon pisteet $(2 + a, 3)$ ja $(-3, 5 + a)$.



Piirretään pisteiden kautta suora ja määritetään suoran kulmakerroin.



Muutetaan lukua a liukukytkimestä, kunnes kulmakerroin on 2.



Tarkistetaan laskemalla.

Kun $a = -4$, niin

$(2 + a, 3) = (2 - 4, 3) = (-2, 3)$

ja

$(-3, 5 + a) = (-3, 5 - 4) = (-3, 1)$.

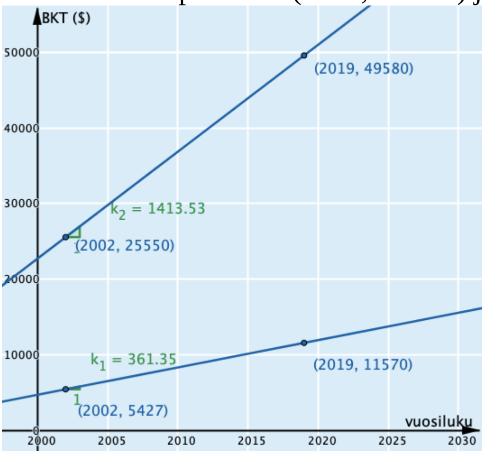
Kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{-3-(-2)} = \frac{-2}{-3+2} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Vastaus: $a = -4$

218. **a)** Valitaan *x*-akselin muuttujaksi vuosiluku ja *y*-akselin muuttujaksi bruttokansantuote.

Piirretään maailman bruttokansantuotetta kuvaava suora pisteiden (2002; 5427) ja (2019; 11 570) kautta ja Suomen bruttokansantuotetta kuvaava suora pisteiden (2002; 25 550) ja (2019; 49 580) kautta.



Kulmakertoimet kahden desimaalin tarkkuudella ovat maailman suoralle 361,35 ja Suomen suoralle 1413,53.

Vastaus: maailma 361,35, Suomi 1413,53

b) Kulmakerrointen mukaan maailman BKT asukasta kohti on noussut vuodessa keskimäärin 361,35 dollaria eli noin 361dollaria/asukas. Suomen vastaava luku on noin 1414 dollaria asukasta kohti, eli Suomen BKT on kasvanut maailman BKT:tä nopeammin.

Vastaus: BKT kasvoi asukasta kohti vuodessa koko maailmassa keskimäärin 361 dollaria ja Suomessa 1414 dollaria. Suomen BKT on kasvanut nopeammin.

219. **a)** Pisteiden avulla voi muodostaa suorakulmaisen kolmion, jos pisteet yhdistämällä muodostuu kolmiolle yksi suorakulma. Kulman suoruus voidaan tutkia laskemalla kärkipisteiden kautta kulkevien suorien kulmakertoimet ja tutkimalla kulmakertoimien avulla suorien kohtisuoruutta. Kohtisuorien suorien kulmakertoimet ovat toistensa käänteislukujen vastalukuja.

Toinen tapa on laskea kolmion sivujen pituudet hyödyntämällä janan pituuden laskukaavaa. Jos kolmion sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen, kolmio on suorakulmainen.

Vastaus: tutkimalla kolmion sivujen suuntaisten suorien kohtisuoruutta suorien kulmakertoimien avulla tai tutkimalla, toteuttavatko kolmion sivujen pituudet Pythagoraan lauseen

b) Lasketaan kolmion sivujen suuntaisten suorien kulmakertoimet. Kärkipisteet $A = (–5, 2)$ ja $B = (–3, –1)$

$$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{-3-(-5)} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

Kärkipisteet $A = (–5, 2)$ ja $C = (3, 3)$

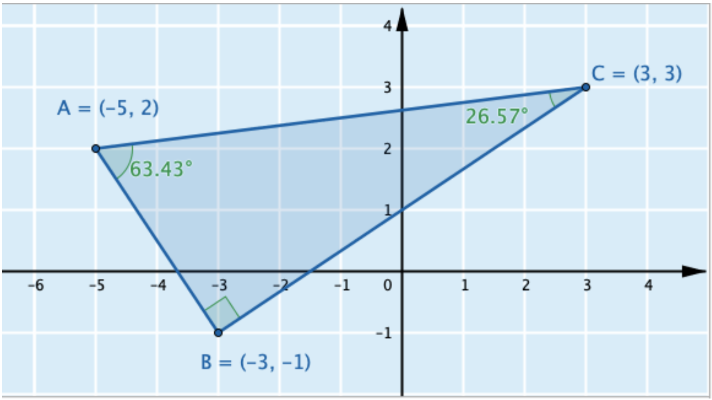
$$k_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{3-(-5)} = \frac{1}{8}$$

Kärkipisteet $C = (3, 3)$ ja $B = (–3, –1)$

$$k_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-3}{-3-3} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

Kulmakerroin $k_3 = \frac{2}{3}$ on kulmakertoimen $k_1 = -\frac{3}{2}$ käänteisluvun vastaluku, joten suora, joka kulkee pisteiden C ja B kautta, on kohtisuorassa vasten suoraa, joka kulkee pisteiden A ja B kautta. Näin ollen kolmiossa on suorakulma, joten pisteet muodostavat suorakulmaisen kolmion.

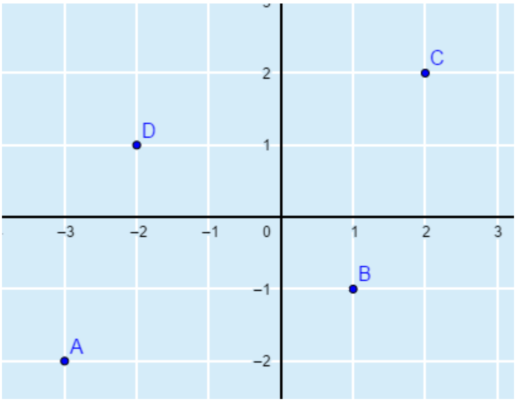
Tarkistetaan piirtämällä pisteiden kautta kolmio ja määrittämällä kolmion kulmien suuruudet.



Vastaus: muodostavat

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

220. Nelikulmio on suunnikas, jos sen vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia. Tutkitaan vastakkaisten sivujen yhdensuuntaisuutta kärkipisteiden kautta kulkevien suorien avulla. Hahmotellaan ensiksi pisteet koordinaatistoon, jotta tulee lasketuksi sivujen kautta kulkevien suorien kulmakertoimet.



Sivujen AD ja BC yhdensuuntaisuus:
AD: Kärkipisteet (–3, –2) ja (–2, 1)

$$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-2)}{-2-(-3)} = \frac{3}{1} = 3$$

BC: Kärkipisteet (1, –1) ja (2, 2)

$$k_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-1)}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Koska pisteiden AD kautta kulkevan suoran kulmakerroin on sama kuin pisteiden BC kautta kulkevalla suoralla, ovat suorat AD ja BC yhdensuuntaisia. Näin ollen myös sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaisia.

Sivujen AB ja DC yhdensuuntaisuus:
AB: Kärkipisteet (–3, –2) ja (1, –1)

$$k_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-2)}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$$

DC: Kärkipisteet (–2, 1) ja (2, 2)

$$k_4 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$$

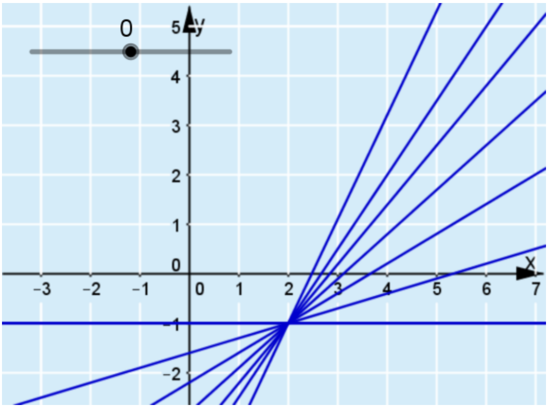
Koska pisteiden AB kautta kulkevan suoran kulmakerroin on sama kuin pisteiden DC kautta kulkevalla suoralla, ovat suorat AB ja DC yhdensuuntaisia. Näin ollen myös sivut AB ja DC ovat yhdensuuntaisia.

Koska vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia, on nelikulmio suunnikas.

Toinen tapa nelikulmion osoittamiseksi suunnikkaaksi on, että lasketaan vastakkaisten sivujen pituudet ja todetaan ne pareittain yhtä suuriksi.

Vastaus: on

221. Piirretään suoria vakion *a* eri arvoilla.



Havaitaan, että kaikki suorat näyttävät kulkevan pisteen (2, −1) kautta riippumatta vakion *a* arvosta.

Sijoitetaan pisteen (2, −1) koordinaatit suoran $y = 3ax - 6a - 1$ yhtälöön.

$-1 = 3a \cdot 2 - 6a - 1$
$-1 = 6a - 6a - 1$
$-1 = -1$

Huomataan, että pisteen (2, −1) koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön vakion *a* arvosta riippumatta. Täten kaikki suorat $y = 3ax - 6a - 1$ kulkevat pisteen (2,−1) kautta.

Vastaus: (2, −1)

222. **a)** Kun lentokone liikkuu kilometrin maanpinnan suuntaan, *x*-koordinaatin muutos on 1000 m. Samaan aikaan *y*-koordinaatti muuttuu 300 m. Kulmakerroin on

$$k = \frac{300}{1000} = 0,3.$$

Määritetään suuntakulma yhtälön tan *α* = *k* avulla.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= 0,3 \\ \alpha &= 16,699...^\circ \\ \alpha &\approx 17^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: 17°

b) Suuntakulma on Maan pinnan ja koneen suunnan välinen kulma.

Vastaus: maanpinnan ja koneen suunnan välistä kulmaa

223. **a)** Tehtävän tiedoista saadaan suoran kaksi pistettä (2014, 607 417) ja (2018, 629 894). Sijoitetaan näiden pisteiden koordinaatit suoran yhtälöön $y = a(x - 2014) + b$ jolloin saadaan yhtälöpari, josta ratkaistaan a ja b. Yhtälöparin voi ratkaista ohjelmalla tai käsin.

$$\begin{cases} 607\,417 = a(2014 - 2014) + b \\ 629\,894 = a(2018 - 2014) + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 607\,417 = a \cdot 0 + b \\ 629\,894 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 607\,417 = b \quad \text{sijoitetaan alempaan} \\ 629\,894 = 4a + b \end{cases}$$
$$\begin{aligned} 629\,894 &= 4a + 607\,417 \\ -4a &= 607\,417 - 629\,894 \\ -4a &= -22\,477 \qquad \|:(-4) \\ a &= 5619{,}25 \end{aligned}$$

Vakioiden arvot ovat $a = 5619{,}25$ ja $b = 607\,417$.

Vastaus: $a = 5619{,}25$, $b = 607\,417$

b) Asukasluvun ilmaiseva yhtälö on
$y = a(x - 2014) + b$ eli $y = 5619{,}25(x - 2014) + 607\,417$.

Sijoitetaan yhtälöön vuosiluku 2030.

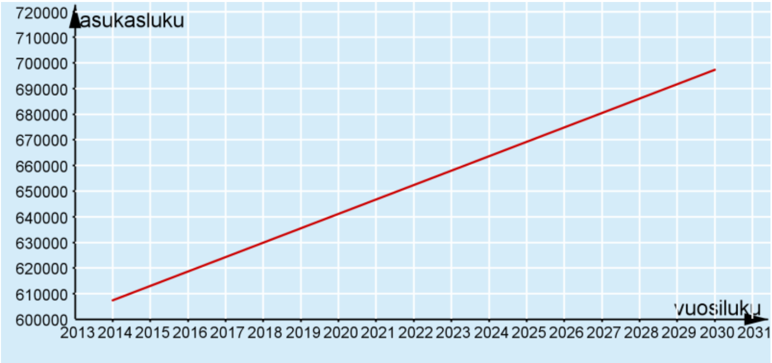
$y = 5619{,}25(2030 - 2014) + 607\,417 = 697\,325$.

Asukasluvun kasvu aikavälillä 2014−2030 saadaan erotuksena

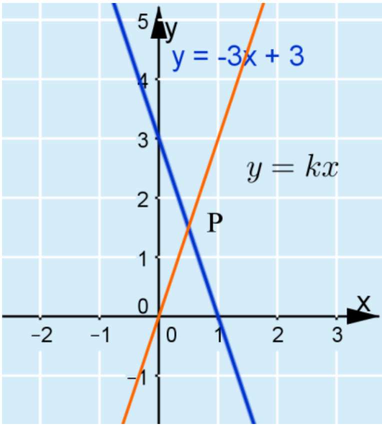
$697\,325 - 607\,417 = 89\,908 \approx 90\,000$.

Vastaus: 90 000 asukkaalla

c) Piirretään suora $y = 5619{,}25(x - 2014) + 607\,417$ välillä $2014 \le x \le 2030$.



224. Piirretään mallikuva.



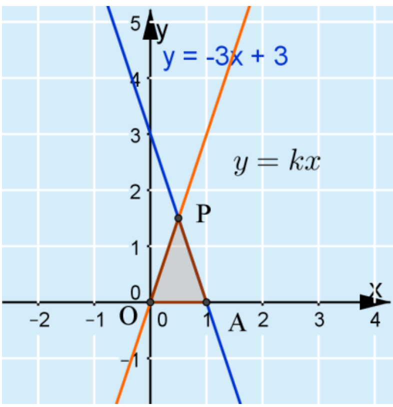
Lasketaan suoran $y = 3 - 3x$ ja positiivisten koordinaattiakseleiden rajaaman kolmion pinta-ala.

Suoran vakiotermi on 3, joten suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 3). Suorakulmaisen kolmion korkeus on 3.

Lasketaan suoran ja x-akselin leikkauspiste sijoittamalla $y = 0$.

$3 - 3x = 0$
$x = 1$

Kolmion kanta on 1 ja korkeus 3, joten pinta-ala on $\frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5$.



Koska suora $y = kx$ kulkee origon kautta, sen on oltava nouseva, jotta se leikkaisi kolmion kahtia.
Koska suora $y = kx$ jakaa kolmion kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan, on kolmion *OAP* pinta-ala oltava $\frac{1,5}{2} = 0,75$.

Kolmion *OAP* kanta on 1 ja korkeus h saadaan yhtälöstä

$$\frac{1 \cdot h}{2} = 0,75 \quad \| \cdot 2$$
$$h = 1,5.$$

Suorien $y = kx$ ja $y = -3x + 3$ leikkauspisteen y-koordinaatti on siis 1,5.
Sijoitetaan $y = 1,5$ suoran $y = -3x + 3$ yhtälöön ja ratkaistaan vastaava x-koordinaatti.

$$1,5 = -3x + 3$$
$$3x = 3 - 1,5$$
$$3x = 1,5 \quad \| : 3$$
$$x = 0,5$$

Suorien leikkauspiste on siis (0,5; 1,5). Sijoitetaan sen koordinaatit suoran $y = kx$ yhtälöön ja ratkaistaan kulmakerroin k.

$$1,5 = 0,5k$$
$$k = 3$$

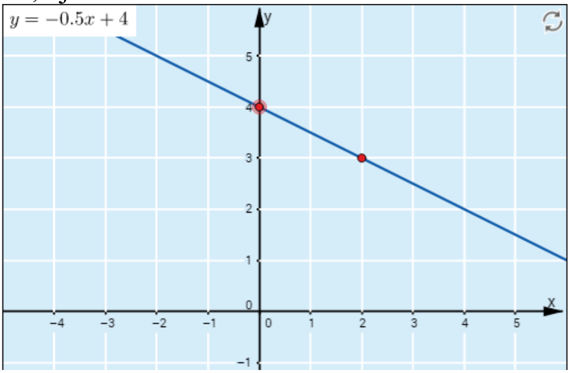
Suoran $y = kx$ kulmakerroin on $k = 3$.

Vastaus: $k = 3$

2.2 Suoran yhtälön muodostaminen

ALOITA PERUSTEISTA

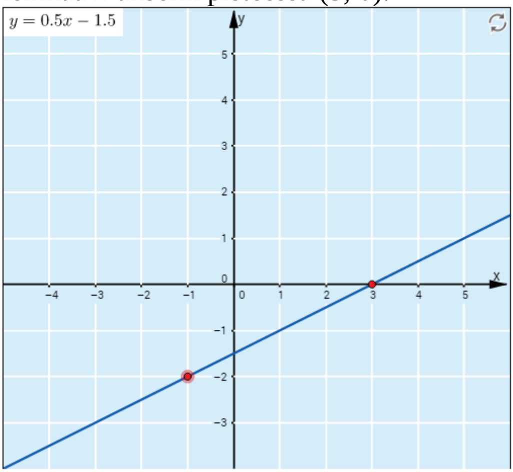
225. **a)** Siirretään appletissa suoran pisteitä niin, että suoran kulmakerroin on −0,5 ja vakiotermi 4.



Suoran yhtälö on $y = -0{,}5x + 4$.

Vastaus: $y = -0{,}5x + 4$

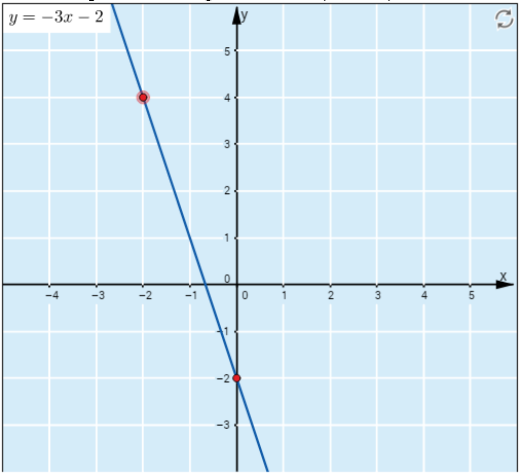
b) Siirretään appletissa suoran pisteitä niin, että suora on nouseva ja leikkaa x-akselin pisteessä (3, 0).



Suoran yhtälö on esimerkiksi $y = 0{,}5x - 1{,}5$.

Vastaus: esim. $y = 0{,}5x - 1{,}5$

c) Siirretään appletissa suoran pisteitä niin, että suora on laskeva ja leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -2)$.



Suoran yhtälö on esimerkiksi $y = -3x - 2$.

Vastaus: esim. $y = -3x - 2$

226. **a)** Koska piste $(2, 5)$ on suoralla, sen koordinaatit $x = 2$ ja $y = 5$ toteuttavat suoran yhtälön. Sijoitetaan pisteen koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$y = x + b$
$5 = 2 + b$
$b = 3$

Vastaus: $b = 3$

b) Sijoitetaan pisteen koordinaatit $x = 2$ ja $y = 5$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$y = -3x + b$
$5 = -3 \cdot 2 + b$
$5 = -6 + b$
$b = 11$

Vastaus: $b = 11$

c) Sijoitetaan pisteen koordinaatit $x = 2$ ja $y = 5$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$y = \frac{1}{2}x + b$$
$$5 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$$
$$5 = 1 + b$$
$$b = 4$$

Vastaus: $b = 4$

227. **a)** Suoran kulmakerroin on $k = -4$ ja vakiotermi $b = 2$. Sijoitetaan nämä tiedot yhtälöön $y = kx + b$, jolloin suoran yhtälöksi saadaan $y = -4x + 2$.

Vastaus: $y = -4x + 2$

b) Suoran kulmakerroin on $k = -7$. Koska suora kulkee origon eli pisteen (0, 0) kautta, vakiotermi on $b = 0$. Sijoitetaan nämä tiedot yhtälöön $y = kx + b$, jolloin suoran yhtälöksi saadaan $y = -7x + 0$ eli $y = -7x$.

Vastaus: $y = -7x$

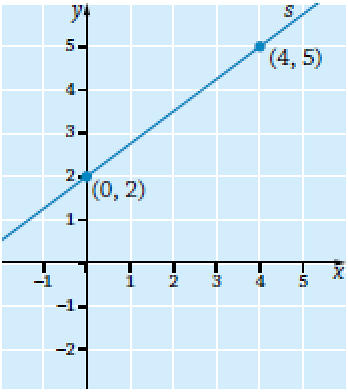
c) Suoran kulmakerroin on $k = 5$. Suora kulkee pisteen $(-3, 4)$ kautta. Sijoitetaan suoran yhtälöön $y = kx + b$ luvut $k = 5$, $x = -3$ ja $y = 4$, ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä vakiotermi b.

$$y = kx + b$$
$$4 = 5 \cdot (-3) + b$$
$$4 = -15 + b$$
$$b = 4 + 15$$
$$b = 19$$

Suoran yhtälö on siis $y = 5x + 19$.

Vastaus: $y = 5x + 19$

228. **a)**



Lasketaan suoran *s* kulmakerroin pisteiden (0, 2) ja (4, 5) koordinaattien avulla.

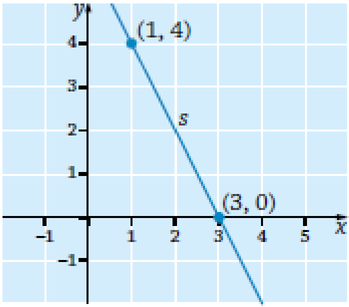
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{4-0} = \frac{3}{4}.$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = \frac{3}{4}x + b$. Koska suora kulkee pisteen (0, 2) kautta, niin vakiotermi on $b = 2$.

Suoran yhtälö on $y = \frac{3}{4}x + 2$.

Vastaus: $y = \frac{3}{4}x + 2$

b)



Lasketaan suoran *s* kulmakerroin pisteiden (1, 4) ja (3, 0) koordinaattien avulla.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-4}{3-1} = -2.$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = -2x + b$. Sijoitetaan pisteen (3, 0) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi *b*.

$$0 = -2 \cdot 3 + b$$
$$0 = -6 + b$$
$$b = 6$$

Suoran yhtälö on $y = -2x + 6$.

Vastaus: $y = -2x + 6$

c) Suora on *y*-akselin suuntainen. Suoran jokaisen pisteen *x*-koordinaatti on 3 *y*-koordinaatista riippumatta, joten suoran yhtälö on $x = 3$.

Vastaus: $x = 3$

229. Sijoitettaessa suoran $x - 3y = 0$ yhtälöön pisteen (3, 1) koordinaatit saadaan $3 - 3 \cdot 1 = 0$, joten väite A ja yhtälö II kuuluvat yhteen.

Suora $x = -5$ on y-akselin suuntainen, joten sillä ei ole kulmakerrointa. Väite B ja yhtälö I kuuluvat yhteen.

Suora $y = 12$ on x-akselin suuntainen, joten väite C ja yhtälö IV kuuluvat yhteen.

Kun sijoitetaan $x = 3$ suoran $y = 2x - 6$ yhtälöön, saadaan $y = 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Siis piste (3, 0) on suoralla $y = 2x - 6$ ja suora $y = 2x - 6$ leikkaa x-akselin kohdassa $x = 3$. Väite D ja yhtälö III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: I, C: IV ja D: III

230. **a)** Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden (1, 3) ja (4, 6) koordinaattien avulla.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = x + b$. Sijoitetaan pisteen (1, 3) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$3 = 1 + b$$
$$b = 2$$

Suoran yhtälö on $y = x + 2$.

Vastaus: $y = x + 2$

b) Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden (8, 2) ja (10, –2) koordinaattien avulla.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-2}{10-8}=\frac{-4}{2}=-2$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = -2x + b$. Sijoitetaan pisteen (8, 2) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$\begin{aligned}2&=-2\cdot 8+b\\ 2&=-16+b\\ b&=18\end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = -2x + 18$.

Vastaus: $y = -2x + 18$

c) Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden (–10, –5) ja (5, 10) koordinaattien avulla.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{10-(-5)}{5-(-10)}=\frac{15}{15}=1$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = x + b$. Sijoitetaan pisteen (5, 10) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$\begin{aligned}10&=5+b\\ b&=5\end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = x + 5$.

Vastaus: $y = x + 5$

231. **a)** Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden (–5, –1) ja (–7, 3) koordinaattien avulla.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-1)}{-7-(-5)}=\frac{4}{-2}=-2$$

Suoran yhtälö on muotoa $y=-2x+b$. Sijoitetaan pisteen (–5, –1) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi *b*.

$$\begin{aligned}-1&=-2\cdot(-5)+b\\-1&=10+b\\b&=-11\end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = -2x - 11$.

Suoralla oleva piste saadaan, kun annetaan *x*-koordinaatille jokin arvo ja lasketaan sitä vastaava *y*-koordinaatin arvo.
Kun esimerkiksi $x = 1$, $y = -2 \cdot 1 - 11 = -2 - 11 = -13$.

Kolmas suoralla oleva piste on esimerkiksi (1, –13).

Vastaus: $y = -2x - 11$, esim. (1, –13)

b) Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden $\left(\frac{3}{2},-9\right)$ ja $\left(\frac{7}{2},3\right)$ koordinaattien avulla.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-9)}{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{12}{\frac{4}{2}}=\frac{12}{2}=6$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = 6x + b$. Sijoitetaan pisteen $\left(\frac{7}{2},3\right)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi *b*.

$$\begin{aligned}3&=6\cdot\frac{7}{2}+b\\3&=21+b\\b&=-18\end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = 6x - 18$.

Suoralla oleva piste saadaan, kun annetaan *x*-koordinaatille jokin arvo ja lasketaan sitä vastaava *y*-koordinaatin arvo.
Kun esimerkiksi $x = 1$, $y = 6 \cdot 1 - 18 = 6 - 18 = -12$.

Kolmas suoralla oleva piste on esimerkiksi (1, –12).

Vastaus: $y = 6x - 18$, esim. (1, –12)

c) Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden (−50, 4) ja (300, 4) koordinaattien avulla.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 4}{300 - (-50)} = \frac{0}{350} = 0$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = b$. Sijoitetaan pisteen (–50, 4) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi *b*.

$$4 = b$$
$$b = 4$$

Suoran yhtälö on $y = 4$.

Jokaisen suoralla olevan pisteen *y*-koordinaatti on 4. Pisteen *x*-koordinaatti voi olla mitä vain, esimerkiksi $x = 1$. Piste (1, 4) on kolmas suoralla oleva piste.

Vastaus: $y = 4$, esim. (1, 4)

232. **a)** Maailman väkiluku kasvaa joka vuosi 0,08 miljardilla, joten väkilukua kuvaavan suoran kulmakerroin on $k = 0{,}08$.
Suoran yhtälö on siis muotoa $y = 0{,}08x + b$.

Sijoitetaan pisteen (0; 6,14) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$6{,}14 = 0{,}08 \cdot 0 + b$$
$$b = 6{,}14$$

Suoran yhtälö on $y = 0{,}08x + 6{,}14$, jossa x on aika vuosina vuodesta 2000 lähtien ja y on väkiluku miljardeina.

Vastaus: $y = 0{,}08x + 6{,}14$

b) Ratkaistaan vuosien määrä vuodesta 2000 lähtien yhtälöstä $0{,}08x + 6{,}14 = 10$.

$$0{,}08x + 6{,}14 = 10$$
$$0{,}08x = 3{,}86 \quad \|: 0{,}08$$
$$x = 48{,}25$$
$$x \approx 48$$

Väkiluku on 10 miljardia vuonna 2000 + 48,25 = 2048.

Vastaus: vuonna 2048

VAHVISTA OSAAMISTA

233. Suoran $y = 2x + 1$ kulmakerroin on 2 ja sijoittamalla $x = 1$ huomataan, että $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Suora kulkee siis pisteen (1, 3) kautta. Vaihtoehto A ja yhtälö III kuuluvat yhteen.

Muutetaan suoran $y - 2x = 5$ yhtälö muotoon $y = 2x + 5$. Suoran kulmakerroin on 2. Sijoittamalla $x = -1$ huomataan, että $y = 2 \cdot (-1) + 5 = 3$. Suora kulkee siis pisteen (–1, 3) kautta. Vaihtoehto B ja yhtälö V kuuluvat yhteen.

Suoran $y = -2x + 5$ kulmakerroin on −2 ja sijoittamalla $x = 1$ huomataan, että $y = -2 \cdot 1 + 5 = 3$. Suora kulkee siis pisteen (1, 3) kautta. Vaihtoehto C ja yhtälö VI kuuluvat yhteen.

Muutetaan suoran $2x + y - 1 = 0$ yhtälö muotoon $y = -2x + 1$. Suoran kulmakerroin on −2. Sijoittamalla $x = -1$ huomataan, että $y = -2 \cdot (-1) + 1 = 3$. Suora kulkee siis pisteen (–1, 3) kautta. Vaihtoehto D ja yhtälö IV kuuluvat yhteen.

Suoran $y = 3$ kulmakerroin on 0. Suoran jokaisen pisteen y-koordinaatti on 3, myös silloin kun x-koordinaatti on 1. Piste (1, 3) on siis suoralla. Vaihtoehto E ja yhtälö II kuuluvat yhteen.

Suoralla $x = -1$ ei ole kulmakerrointa ja suoran kaikkien pisteiden x-koordinaatti on −1, myös sen pisteen, jonka y-koordinaatti on 3. Piste (−1, 3) on siis suoralla $x = -1$. Vaihtoehto F ja yhtälö I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: III, B: V, C: VI, D: IV, E: II ja F: I

234. **a)** Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden (−11, 1) ja (13, –11) koordinaattien avulla.

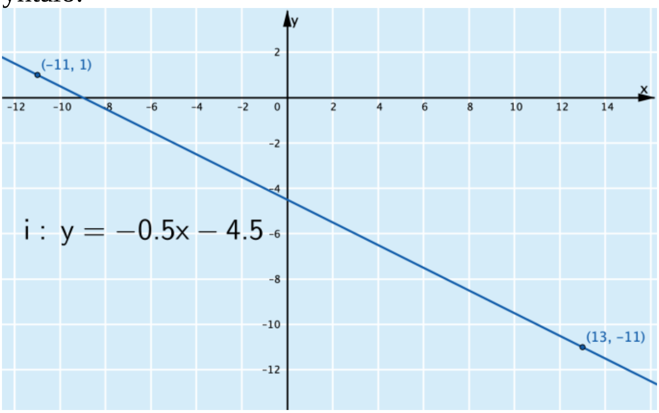
$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-11-1}{13-(-11)}=\frac{-12}{24}=-\frac{1}{2}$$

Suoran yhtälö on muotoa $y=-\frac{1}{2}x+b$. Sijoitetaan pisteen (–11, 1) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi *b*.

$$1=-\frac{1}{2}\cdot(-11)+b$$
$$1=\frac{11}{2}+b$$
$$b=1-\frac{11}{2}$$
$$b=\frac{2}{2}-\frac{11}{2}$$
$$b=-\frac{9}{2}$$

Suoran yhtälö on $y=-\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}$.

Tarkistetaan piirtämällä suora ohjelmalla ja määrittämällä suoran yhtälö.



Vastaus: $y=-\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}$

b) Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{2}\right)$ ja $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ koordinaattien avulla.

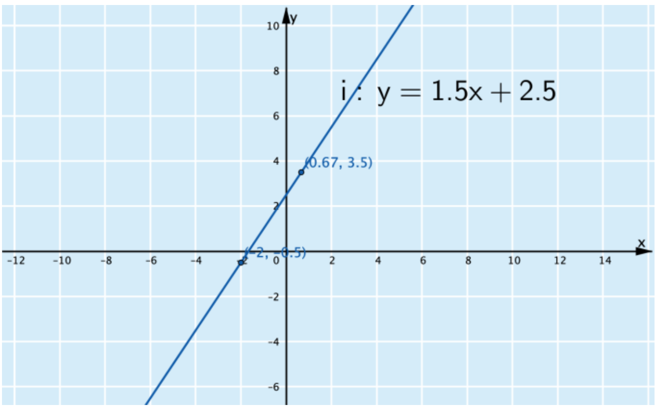
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}}{-2 - \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{8}{2}}{-2\frac{2}{3}} = \frac{-4}{\frac{-8}{3}} = \frac{4}{1} : \frac{8}{3} = \frac{{}^{1}\cancel{4}}{1} \cdot \frac{3}{\cancel{8}_2} = \frac{3}{2}.$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = \frac{3}{2}x + b$. Sijoitetaan pisteen $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$-\frac{1}{2} = \frac{3}{\cancel{2}_1} \cdot (-\cancel{2}_1) + b$$
$$-\frac{1}{2} = -3 + b$$
$$b = -\frac{1}{2} + 3$$
$$b = \frac{5}{2}$$

Suoran yhtälö on $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

Tarkistetaan piirtämällä suora ohjelmalla ja määrittämällä suoran yhtälö.



Vastaus: $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

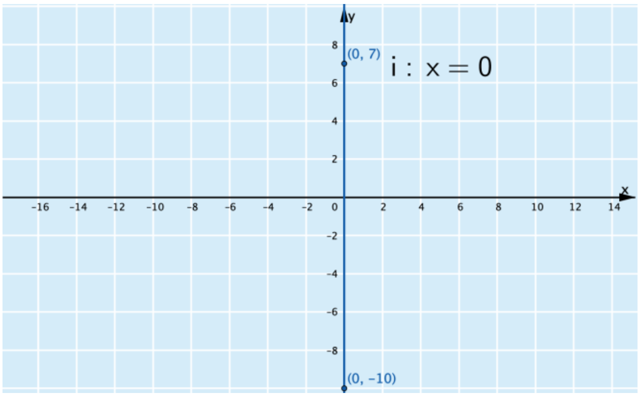
c) Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden (0, 7) ja (0, –10) koordinaattien avulla.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-10-7}{0-0}=\frac{-17}{0}$$

Kulmakerrointa ei ole määritelty, koska nollalla ei voi jakaa. Suora on tällöin y-akselin suuntainen ja muotoa $x = a$. Vakio a on tunnettujen koordinaattien x koordinaatti.

Suoran yhtälö on siis $x = 0$.

Tarkistetaan piirtämällä suora ohjelmalla ja määrittämällä suoran yhtälö.



Vastaus: $x = 0$

235. **a)** Suora on y-akselin suuntainen, koska sillä ei ole kulmakerrointa. Suoran yhtälö on $x = 15$, koska suora kulkee pisteen (15, −9) kautta.

Vastaus: $x = 15$

b) Muutetaan suoran $4x - 2y - 3 = 0$ yhtälö muotoon $y=2x-\frac{3}{2}$. Suoran kulmakerroin on $k = 2$. Kysytty suora on yhdensuuntainen tämän suoran kanssa, joten kysytyn suoran kulmakerroin on myös 2. Kysytyn suoran yhtälö on muotoa $y=2x+b$.

Sijoitetaan pisteen (2, −5) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$-5 = 2 \cdot 2 + b$$
$$b = -9$$

Suoran yhtälö on $y = 2x - 9$.

Vastaus: $y = 2x - 9$

c) Suoran $y = 5x - 5$ kulmakerroin $k_1 = 5$. Kohtisuoran suoran kulmakerroin on tämän käänteisluvun vastaluku. Luvun 5 käänteisluvun vastaluku on $-\frac{1}{5}$. Kysytyn suoran kulmakerroin on siis $k_2 = -\frac{1}{5}$.

Suoran yhtälö on muotoa $y = -\frac{1}{5}x + b$. Sijoitetaan pisteen (25, 18) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$18 = -\frac{1}{5} \cdot 25 + b$$
$$18 = -5 + b$$
$$b = 23$$

Suoran yhtälö on $y = -\frac{1}{5}x + 23$.

Vastaus: $y = -\frac{1}{5}x + 23$

d) x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0. Kysytty suora on siis muotoa $y = 0x + b$ eli $y = b$. Kysytty suora kulkee pisteen (8, 9) kautta. Pisteen y-koordinaatti on 9, joten suoran yhtälö on $y = 9$.

Vastaus: $y = 9$

236. **a)** Kun halutaan varmistua siitä, että jokin piste on suoralla, sijoitetaan pisteen x-koordinaatti suoran yhtälöön ja lasketaan vastaava y-koordinaatti yhtälön avulla. Jos saatu luku on sama kuin pisteen, jota tutkittiin, kyseinen piste on suoralla. Muussa tapauksessa piste ei ole suoralla.

Sijoitetaan pisteen $(8, -16)$ x-koordinaatti suoran $2x + y - 1 = 0$ yhtälöön.

$2 \cdot 8 + (-16) - 1 = -1 \neq 0$, joten piste ei ole suoralla.

Vastaus: ei ole

b) Muokataan suoran yhtälö muotoon, jossa y on vasemmalla ja muut termit oikealla.

$$2x + y - 1 = 0$$
$$y = -2x + 1$$

Suoran kulmakerroin on –2.

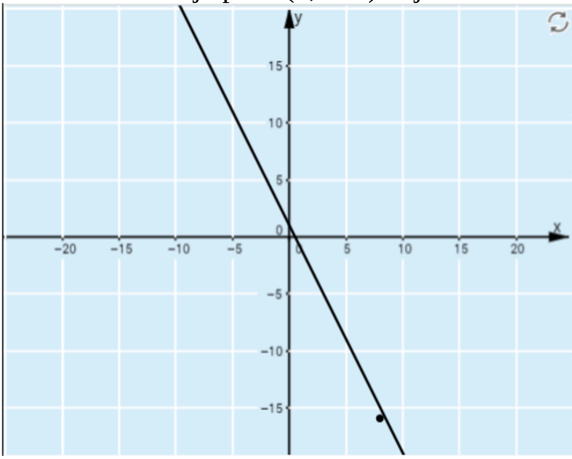
Vastaus: $k = -2$

c) Suoran yhtälön vakiotermi on 1, joten suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 1). Suoran ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla suoran yhtälöön $y = 0$ ja ratkaisemalla saadusta yhtälöstä x.

$$2x + y - 1 = 0$$
$$2x + 0 - 1 = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

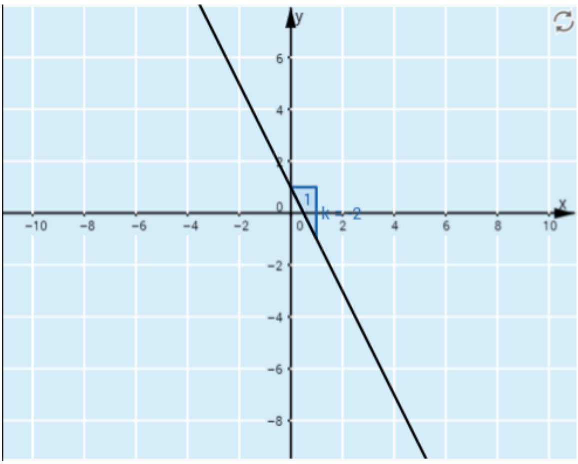
Vastaus: (0, 1) ja $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

d) Piirretään suora ja piste (8, –16) ohjelmalla.



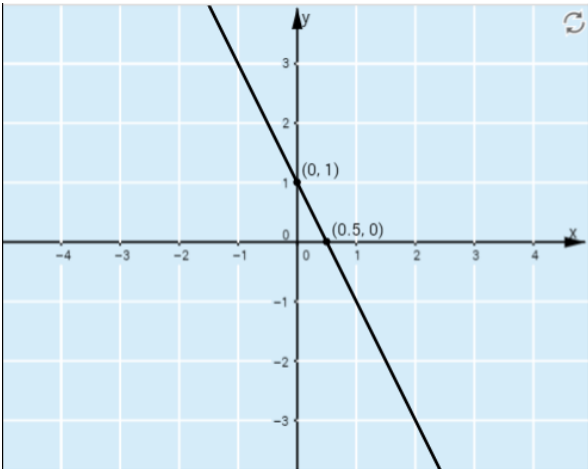
Piste (8, –16) ei näytä olevan suoralla, joten a-kohdan tulos näyttäisi olevan oikein.

Määritetään suoran kulmakerroin.



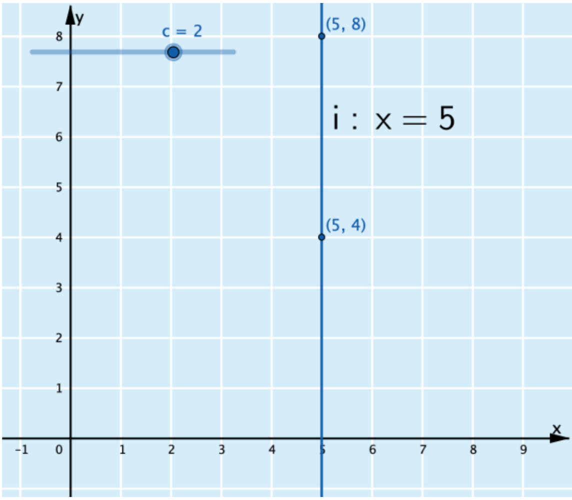
Kulmakerroin on –2, joten b-kohdan tulos on oikein.

Määritetään suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.



Leikkauspisteet ovat (0, 1) ja (0,5; 0), joten c-kohdan tulokset ovat oikein.

237. **a)** Piirretään koordinaatistoon pisteet $(2c + 1, 4)$ ja $(-3c + 11, 8)$ ja niiden kautta kulkeva suora. Etsitään vakiolle c sellainen arvo, että suora on y-akselin suuntainen, ja selvitetään suoran yhtälö ohjelman avulla.



Vakio $c = 2$ ja suoran yhtälö on $x = 5$.

Vastaus: $c = 2$, $x = 5$

b) y-akselin suuntaisen suoran kaikkien pisteiden x-koordinaatit ovat yhtä suuret. Muodostetaan x-koordinaattien avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä tuntematon vakio c.

$$\begin{aligned} 2c+1 &= -3c+11 \\ 2c+3c &= 11-1 \\ 5c &= 10 \quad \| :5 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $c = 2$ pisteen $(2c + 1, 4)$ x-koordinaatin lausekkeeseen.

$2 \cdot 2 + 1 = 5$

Koska suoran pisteiden x-koordinaatti on 5, on suoran yhtälö $x = 5$.

Vastaus: $c = 2$, $x = 5$

238. **a)** Muodostetaan annettujen tietojen avulla taulukko.

Aika (s)	Korkeus (m)
0	750
40	610

Lasketaan pisteiden (0, 750) ja (40, 610) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{610 - 750}{40 - 0} = -\frac{140}{40} = -3{,}5$$

Suoran vakiotermi on $b = 750$, koska suora kulkee pisteen (0,750) kautta.

Sijoitetaan suoran kulmakerroin $k = -3{,}5$ ja vakiotermi $b = 750$ suoran yhtälöön $y = kx + b$.

Suoran yhtälö $y = -3{,}5x + 750$.

Vastaus: $y = -3{,}5x + 750$

b) Kulmakerroin −3,5 tarkoittaa, että laskuvarjohyppääjän korkeus vähenee 3,5 metrillä sekunnissa, eli sitä että putoamisnopeus on 3,5 m/s.

Vastaus: Putoamisnopeus on 3,5 m/s.

c) Hyppääjä saavuttaa maanpinnan, kun korkeus on $y = 0$ m. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä aika x.

$$\begin{aligned} 0 &= -3{,}5x + 750 \\ 3{,}5x &= 750 \qquad \| : 3{,}5 \\ x &= 214{,}285\ldots \\ x &\approx 210 \end{aligned}$$

Aikaa kuluu noin 210 s = 3 min 30 s.

Vastaus: 3 min 30 s kuluttua

239. **a)** Olkoon x aika päivinä niin, että joulukuun 1. päivänä $x = 1$. Merkitään jään paksuutta kirjaimella y. Taulukoidaan annetut tiedot.

Aika x	Jään paksuus y (cm)
3	7
7	15

Määritetään pisteiden (3, 7) ja (7, 15) kautta kulkevan suoran yhtälö. Lasketaan ensin kulmakerroin pisteiden koordinaattien avulla.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15-7}{7-3} = \frac{8}{4} = 2$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = 2x + b$. Sijoitetaan pisteen (3, 7) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan vakiotermi b.

$$7 = 2\cdot 3 + b$$
$$b = 1$$

Suoran yhtälö on $y = 2x + 1$, joten lineaarinen malli on $f(x) = 2x + 1$.

Vastaus: $f(x) = 2x + 1$

b) Joulukuun 6. päivänä aika on $x = 6$. Lasketaan vastaava jään paksuus.
$f(6) = 2 \cdot 6 + 1 = 13$

Jään paksuus oli 13 cm.

Vastaus: 13 cm

c) Uudenvuodenaattona olisi $x = 31$ ja jään paksuus olisi mallin mukaan senttimetreinä $f(31) = 2 \cdot 31 + 1 = 63$. Jään paksuuden ennustaminen noin kauas on epävarmaa, koska jään paksuuntumisnopeus riippuu sääoloista ja tuulista. Jää saattaa jopa sulaa, jos ei ole pakkasta. Jos jäätä on jo valmiiksi paljon, se alkaa toimia eristeenä, ja paksuuntumisnopeus alkaa pienetä, vaikka olisikin kylmää.

Vastaus: ei voida

240. Salo on Helsingin ja Turun kautta kulkevalla suoralla. Merkitään annetut tiedot taulukkoon.

Etäisyys Turusta (km)	Lämpötila (°C)
165	17,1
0	22,3

Lasketaan pisteiden (165; 17,1) ja (0; 22,3) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{22{,}3-17{,}1}{0-165}=-0{,}0315...$$

Suoran vakiotermi on $b = 22{,}3$, koska suora kulkee pisteen (0; 22,3) kautta.

Suoran yhtälö on $y = -0{,}0315\ldots\, x + 22{,}3$, jossa x on etäisyys Turusta kilometreinä.

Sijoitetaan suoran yhtälöön Turun ja Salon etäisyys 55 km.

$y = -0{,}0315\ldots \cdot 55 + 22{,}3 = 20{,}566\ldots \approx 20{,}6$

Lämpötila Salossa on 20,6 °C.

Vastaus: 20,6 °C

241. **a)** Muutetaan aikayksiköt minuuteiksi.

Iisan nopeus 15 km/h = $15\frac{\text{km}}{60\text{ min}} = 0,25\text{ km/min}$

Danin nopeus 1,4 m/s = $1,4\frac{\text{m}}{\frac{1}{60}\text{ min}} = 84\text{ m/min} = 0,084\text{ km/min}$

Danin etäisyys kotoaan *x* minuutin kuluttua noudattaa funktiota $D(x) = 0,084x$.

Iisan etäisyys Danin kotoa on alussa 5,0 km ja etäisyys pienenee 0,25 km/min, joten etäisyys *x* minuutin kuluttua noudattaa funktiota $I(x) = -0,25x + 5,0$.

Vastaus: $I(x) = -0,25x + 5,0$ ja $D(x) = 0,084x$

b) Kohtaamisaika ja -paikka on luettavissa a-kohdassa muodostettuja funktioita vastaavien suorien leikkauspisteen avulla.

Ratkaistaan suorien leikkauspiste yhtälöparilla.

$$\begin{cases} y = -0,25x + 5,0 \\ y = 0,084x \end{cases}$$

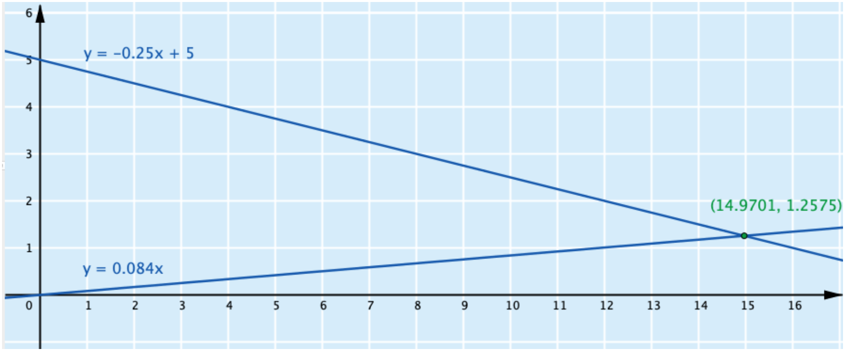
Ohjelma antaa yhtälöparin ratkaisuksi

$$x = \frac{2500}{167} = 14,970.. \approx 15,0$$

$$y = \frac{210}{167} = 1,257... \approx 1,3$$

Leikkauspiste on noin (15,0; 1,3). Iisa ja Dan kohtaavat 15 minuutin kuluttua, Dan on kotoaan noin 1,3 km päässä ja Iisa on kotoaan noin 5,0 km − 1,3 km = 3,7 km päässä.

Tarkistetaan piirtämällä suorat ohjelmalla ja määrittämällä niiden leikkauspiste.



Vastaus: 15 min kuluttua

242. Tienhaara on suorien leikkauspisteessä. Ratkaistaan suorien leikkauspiste yhtälöparin avulla. Yhtälöparin voi ratkaista ohjelmalla tai käsin.

$$\begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x+2y-6=0 \quad \| \cdot(-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ -2x-4y+12=0 \end{cases}$$

$$-7y+16=0 \quad \| :(-7)$$

$$y=\frac{16}{7}$$

Sijoitetaan $y=\frac{16}{7}$ yhtälöön $2x - 3y + 4 = 0$ ja ratkaistaan x.

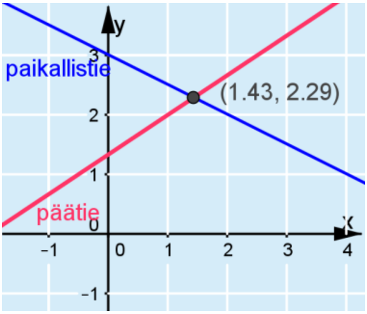
$$\begin{aligned} 2x-3\cdot\frac{16}{7}+4&=0 \\ 2x-\frac{48}{7}+\frac{28}{7}&=0 \\ 2x-\frac{20}{7}&=0 \\ 2x&=\frac{20}{7} \\ x&=\frac{10}{7} \end{aligned}$$

Tiet eroavat pisteessä $\left(\frac{10}{7},\frac{16}{7}\right)\approx(1,43;2,29)$.

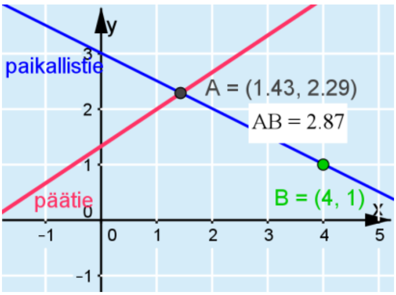
Pisteiden $\left(\frac{10}{7}, \frac{16}{7}\right)$ ja (4, 1) etäisyys on

$\sqrt{\left(\frac{10}{7}-4\right)^2+\left(\frac{16}{7}-1\right)^2}=2{,}874...$ eli noin 2,9 km.

Tarkistetaan tulos piirtämällä ohjelmalla.
Piirretään suorat ja niiden leikkauspiste.

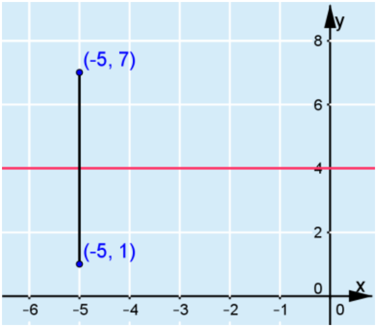


Piirretään kuvaan piste (4, 1) ja määritetään suorien leikkauspisteen ja pisteen (4, 1) etäisyys.



Vastaus: $(1{,}43;\ 2{,}29)$ ja 2,9 km:n päässä

243. **a)** Janan keskinormaali on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan. Piirretään mallikuva.



Jana on y-akselin suuntainen, joten keskinormaali on x-akselin suuntainen. Janan keskipisteen y-koordinaatti on $\frac{7+1}{2}=4.$

Keskinormaalin kaikkien pisteiden y-koordinaatit ovat yhtä suuria, joten keskinormaalin yhtälö on $y = 4$.

Vastaus: $y = 4$

b) Videossa https://vimeo.com/210764705/dfcbe31d72 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Vastaus: $y = 4$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

244. **a)** Selvitetään suoran $x - 3y - 4 = 0$ kulmakerroin muuttamalla suoran yhtälö muotoon, jossa y on vasemmalla ja muut termit oikealla.

$$x - 3y - 4 = 0$$
$$-3y = -x + 4 \quad \| : (-3)$$
$$y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

Suoran kulmakerroin on $\frac{1}{3}$. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella k. Suoran ja normaalin kulmakertoimien tulo on −1. Ratkaistaan normaalin kulmakerroin yhtälön avulla.

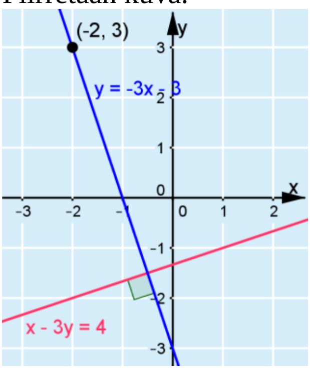
$$\frac{1}{3}k = -1 \quad \| \cdot 3$$
$$k = -3$$

Normaalin kulmakerroin on −3, joten normaalin yhtälö on muotoa $y = -3x + b$.

Normaali kulkee pisteen (−2, 3) kautta. Sijoitetaan tämän pisteen koordinaatit normaalin yhtälöön ja ratkaistaan vakiotermi b.

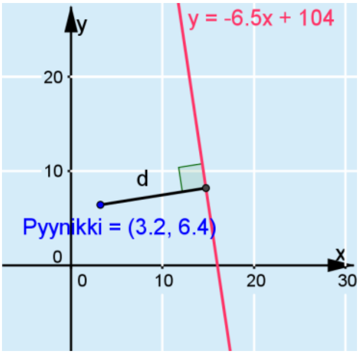
$$y = -3x + b$$
$$3 = -3 \cdot (-2) + b$$
$$3 = 6 + b$$
$$b = -3$$

Normaalin yhtälö on $y = -3x - 3$.
Piirretään kuva.



Vastaus: $y = -3x - 3$

b) Merkitään kysyttyä etäisyyttä kirjaimella *d*. Piirretään mallikuva.



Kysytty etäisyys on pisteen (3,2; 6,4) kohtisuora etäisyys suorasta $y = -6{,}5x + 104$. Etäisyyden *d* laskemista varten tarvitaan suoran ja sen normaalin leikkauspiste. Muodostetaan ensin suoran normaalin yhtälö.

Suoran $y = -6{,}5x + 104$ kulmakerroin on $k_1 = -6{,}5$. Ratkaistaan suoran normaalin kulmakerroin yhtälöstä $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$$-6{,}5 \cdot k_2 = -1 \quad \| : (-6{,}5)$$
$$k_2 = {}^{2)}\frac{1}{6{,}5}$$
$$k_2 = \frac{2}{13}$$

Normaalin yhtälö on muotoa $y = \frac{2}{13}x + b$. Sijoitetaan pisteen (3,2; 6,4) koordinaatit tähän yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi *b*.

$$y = \frac{2}{13}x + b$$
$$6{,}4 = \frac{2}{13} \cdot 3{,}2 + b$$

Ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $b = \frac{384}{65}$.

Normaalin yhtälö on siis $y = \frac{2}{13}x + \frac{384}{65}$.

Lasketaan seuraavaksi suorien $y = -6{,}5x + 104$ ja $y = \frac{2}{13}x + \frac{384}{65}$ leikkauspiste yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = -6{,}5x + 104 \\ y = \frac{2}{13}x + \frac{384}{65} \end{cases}$$

Ohjelman avulla yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $x = \frac{12\,752}{865}$, $y = \frac{7072}{865}$.

Lasketaan pisteiden (3,2; 6,4) ja $\left(\frac{12\,752}{865}, \frac{7072}{865}\right)$ etäisyys d.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

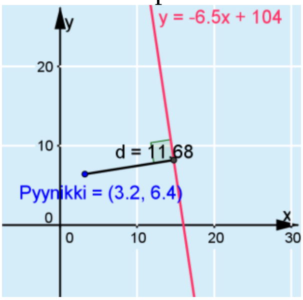
$$d = \sqrt{\left(\frac{12\,752}{865} - 3{,}2\right)^2 + \left(\frac{7072}{865} - 6{,}4\right)^2} = \sqrt{(11{,}542...)^2 + (1{,}775...)^2}$$

$$= \sqrt{136{,}375...} = 11{,}677...$$

Koordinaatiston yksikkö on 100 m = 0,1 km, joten kysytty etäisyys on $d = 11{,}677\ldots \cdot 0{,}1 \text{ km} = 1{,}1677\ldots \text{ km} \approx 1{,}2 \text{ km}$.

Pyynikin näkötornin etäisyys Hämeenpuistokadusta on noin 1,2 kilometriä.

Tarkistetaan piirtämällä ohjelmalla.



Vastaus: 1,2 km:n päässä

245. Suoran vakiotermi on 3, jolloin suoran yhtälö on muotoa $y = kx + 3$.

Suora kulkee pisteiden $(a + 1, 2)$ ja $(3, 2a)$ kautta. Muodostetaan näiden avulla yhtälöpari ja ratkaistaan siitä vakio a.

$$\begin{cases} 2 = k(a+1)+3 \\ 2a = 3k+3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2 = ka+k+3 \\ 2a = 3k+3 & \| :2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} -1 = ka+k \\ a = \frac{3}{2}k+\frac{3}{2} \end{cases}$$

Sijoitetaan ylempään yhtälöön muuttujalle a lauseke $a = \frac{3}{2}k + \frac{3}{2}$.

$$-1 = k\left(\frac{3}{2}k+\frac{3}{2}\right)+k$$
$$-1 = \frac{3}{2}k^2+\frac{3}{2}k+k \qquad \| \cdot 2$$
$$-2 = 3k^2+3k+2k$$
$$3k^2+5k+2=0$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

$$k = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3}$$
$$k = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6}$$
$$k = \frac{-5 \pm 1}{6}$$
$$k = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \text{ tai } k = \frac{-6}{6} = -1$$

Lasketaan vastaavat vakion a arvot sijoittamalla kulmakertoimen arvo yhtälöön $a = \frac{3}{2}k + \frac{3}{2}$.

Jos $k = -\frac{2}{3}$, niin $a = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{2} = -1+\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Jos $k = -1$, niin $a = \frac{3}{2} \cdot (-1) + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.$

Siis jos $a = \frac{1}{2}$, niin suoran yhtälö on $y = -\frac{2}{3}x + 3.$

Vastaavasti jos $a = 0$, niin suoran yhtälö on $y = -x + 3$.

Vastaus: $a = 0$ ja $y = -x + 3$ tai $a = \frac{1}{2}$ ja $y = -\frac{2}{3}x + 3$

246. **a)** Sijoitetaan $k = 3$ ja $(x_0, y_0) = (–3, 6)$ kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$ ja sievennetään lauseke.

$$
\begin{aligned}
y - 6 &= 3(x - (-3)) \\
y - 6 &= 3(x + 3) \\
y - 6 &= 3x + 9 \\
y &= 3x + 15
\end{aligned}
$$

Vastaus: $y = 3x + 15$

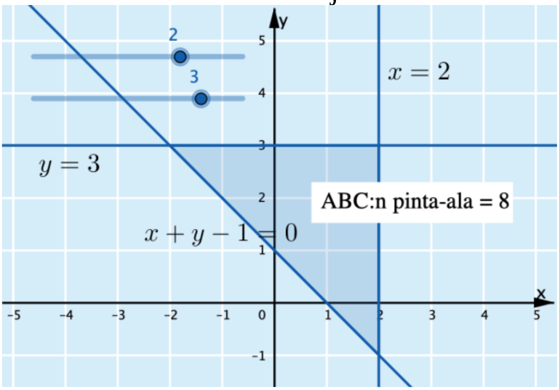
b) Sijoitetaan $(x_1, y_1) = (2, –4)$ ja $(x_2, y_2) = (–6, 8)$ kaavaan

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ja sievennetään lauseke.

$$
\begin{aligned}
y - (-4) &= \frac{8 - (-4)}{-6 - 2}(x - 2) \\
y + 4 &= \frac{12}{-8}(x - 2) \\
y + 4 &= -\frac{3}{2}(x - 2) \\
y + 4 &= -\frac{3}{2}x + 3 \\
y &= -\frac{3}{2}x - 1
\end{aligned}
$$

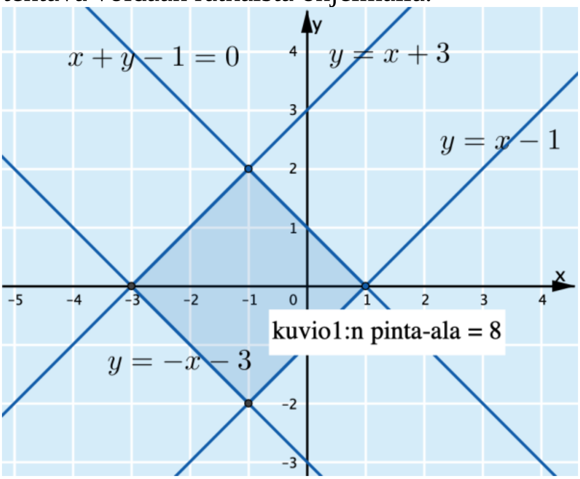
Vastaus: $y = -\frac{3}{2}x - 1$

247. **a)** Videossa https://vimeo.com/210764695/9435bb9b41 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.



Vastaus: esim. $x = 2$ ja $y = 3$

b) Videossa https://vimeo.com/210764672/bc29ff5170 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.



Vastaus: esim. $y = x + 3$, $y = -x - 3$ ja $y = x - 1$

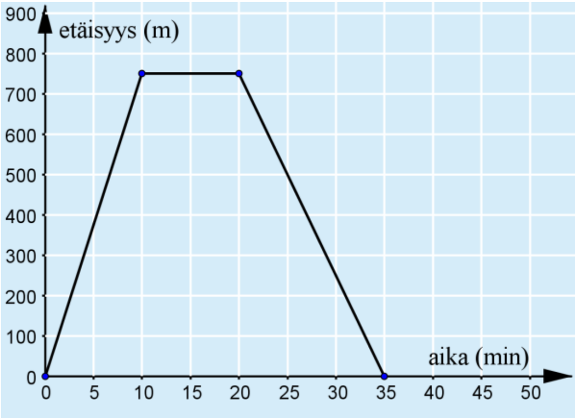
248. **a)** Koska Oskari kävelee tasaisella nopeudella, kuvaajana on suora.

Ajanhetkellä $x = 0$ min etäisyys on $y = 0$ m, joten suora kulkee origon kautta. Ajanhetkellä $x = 10$ min etäisyys on $y = 750$ m, joten suoran toinen piste on (10,750).

Oskari on kaupassa seuraavat 10 minuuttia, jolloin etäisyys ei kasva ja kuvaaja on vaakasuora.

Ajanhetkellä $x = 20$ min Oskari lähtee paluumatkalle, jolloin etäisyys alkaa pienetä ja ajanhetkellä $x = 35$ min etäisyys on $y = 0$ m.

Piirretään kuvaaja.



b) Lasketaan pisteiden (0, 0) ja (10, 750) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{750 - 0}{10 - 0} = 75$$

Suora kulkee origon kautta, joten suoran yhtälö on $y = 75x$.

Pisteiden (10, 750) ja (20, 750) kautta kulkeva suora on x-akselin suuntainen ja sen yhtälö on $y = 750$.

Pisteiden (20, 750) ja (35, 0) kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-750}{35-20}=-50.$$

Suoran yhtälö on muotoa $y=-50x+b$. Sijoitetaan pisteen $(35,0)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$0=-50\cdot 35+b$$
$$b=1750$$

Suoran yhtälö on $y=-50x+1750$.

Vastaus: $y = 75x$, $y = 750$ ja $y = -50x + 1750$

c) Ensimmäinen yhtälö $y = 75x$ on voimassa ajanhetkestä 0 ajanhetkeen 10 eli välillä [0, 10].

Toinen yhtälö $y = 750$ on voimassa ajanhetkestä 10 ajanhetkeen 20 eli välillä [10, 20].

Kolmas yhtälö $y = -50x + 750$ on voimassa ajanhetkestä 20 ajanhetkeen 35 eli välillä [20, 35].

Vastaus: $y = 75x$ on voimassa välillä [0, 10], $y = 750$ välillä [10, 20] ja $y = -50x + 1750$ välillä [20, 35]

2.3 Lineaarisen mallin sovittaminen

ALOITA PERUSTEISTA

249. **a)** Mallin mukaan sikojen määrä miljoonina on $y = 6{,}50x - 12\,110{,}84$, jossa x on vuosi. Vuonna 2030 sikojen määrä miljoonina on mallin mukaan
$6{,}50 \cdot 2030 - 12\,110{,}84 = 1084{,}16 \approx 1084$.

Sikoja on noin 1084 miljoonaa.

Vastaus: 1084 miljoonaa

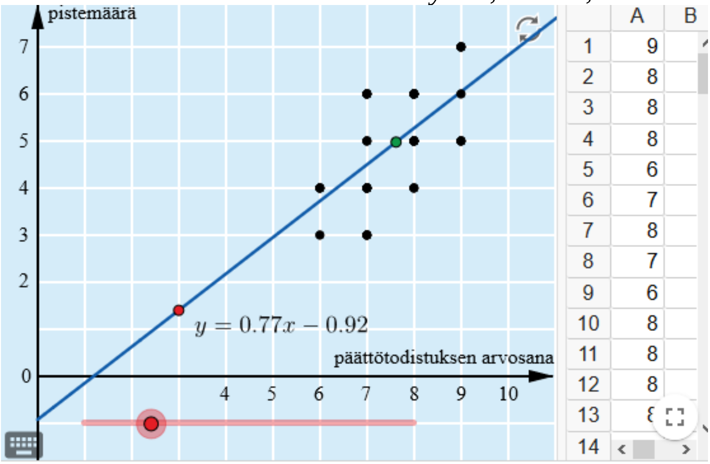
b) Sijoitetaan yhtälöön on $y = 6{,}50x - 12\,110{,}84$ sikojen määrä miljoonina eli $y = 1200$ ja ratkaistaan vuosiluku x.

$$\begin{aligned}
y &= 6{,}50x - 12110{,}84 \\
1200 &= 6{,}50x - 12110{,}84 \\
6{,}50x &= 1200 + 12110{,}84 \\
6{,}50x &= 13310{,}84 \qquad \| : 6{,}50 \\
x &= 2047{,}821...
\end{aligned}$$

Sikojen määrä ylittää 1200 miljoonaa vuoden 2047 aikana.

Vastaus: vuoden 2047 aikana

250. **a)** Päättötodistuksen ja ylioppilaskokeen arvosanojen välistä riippuvuutta voidaan kuvata esimerkiksi suoralla $y = 0{,}77x - 0{,}92$.

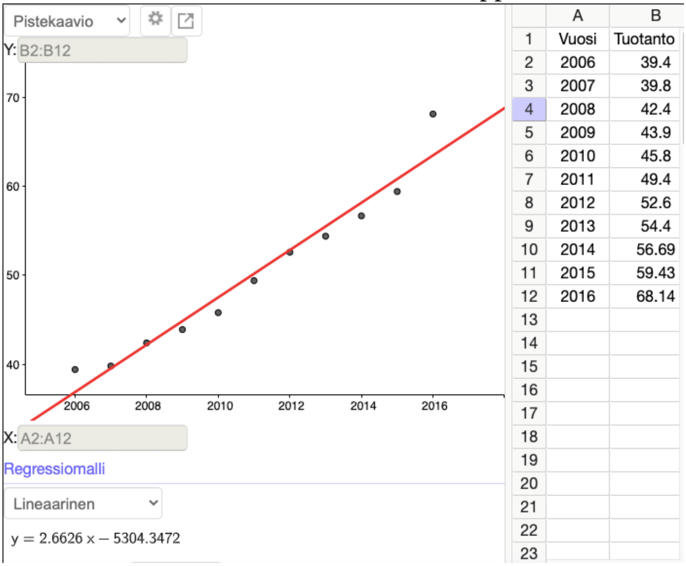


Vastaus: $y = 0{,}77x - 0{,}92$

b) Sijoitetaan $x = 7$ suoran yhtälöön $y = 0{,}77x - 0{,}92$.
$y = 0{,}77 \cdot 7 - 0{,}92 = 4{,}47$
Tulos vastaa arvosanaa C tai M

Vastaus: C tai M

251. Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli appletin avulla.



Mallin mukaan tuotanto y (miljoonina tonneina) riippuu vuodesta x yhtälön $y = 2{,}6626x - 5304{,}3472$ mukaisesti.

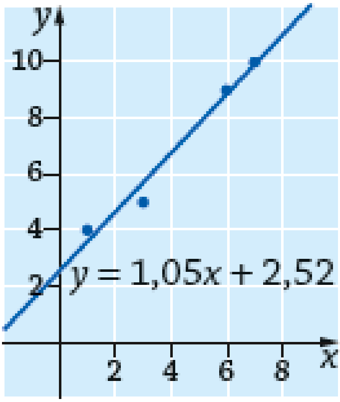
Lasketaan mallin mukainen palmuöljyn tuotanto vuonna 2030.
$y = 2{,}6626 \cdot 2030 - 5304{,}3472 = 100{,}7308$

Palmuöljyn tuotanto on mallin mukaan noin 100 miljoonaa tonnia.

Vastaus: $f(x) = 2{,}663x - 5304{,}347$ ja 100 miljoonaa tonnia

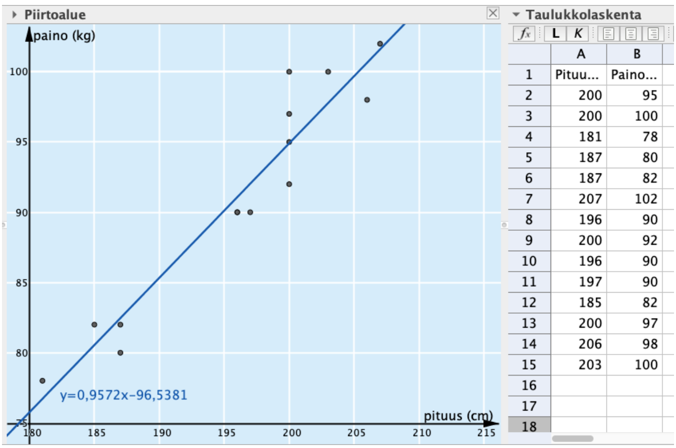
252. Videossa https://vimeo.com/210764734/9c5139251f näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Vastaus:



$y = 1{,}05x + 2{,}52$

253. **a)** Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



Malliksi sopii $f(x) = 0{,}957x – 96{,}538$.

Vastaus: $f(x) = 0{,}957x – 96{,}538$.

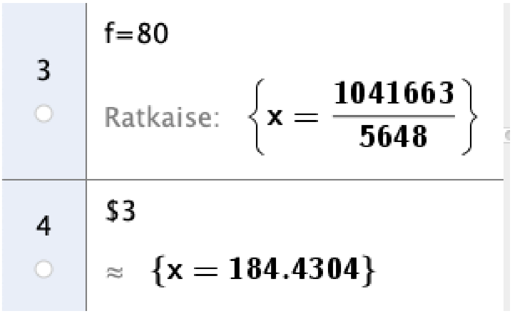
b) Lasketaan mallin mukainen arvio painolle, kun pituus on 200 cm.
$f(200) = 0{,}957... \cdot 200 - 96{,}538\ ... = 94{,}903... \approx 95$

Mallin mukaan 200 cm pitkä pelaaja painaa noin 95 kg.

Vastaus: 95 kg

c) Muodostetaan mallin avulla yhtälö pituuden *x* ratkaisemiseksi, kun paino on 80 kg.

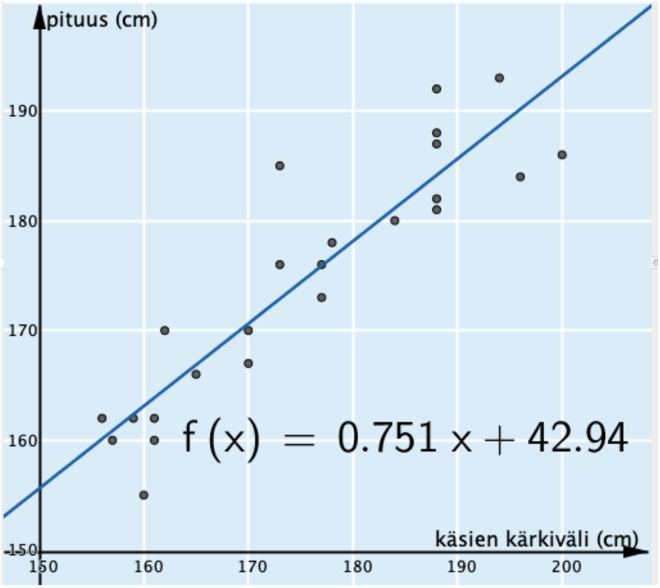
$80 = 0{,}957...\ x - 96{,}538...$



Pelaaja, jonka paino on 80 kg, on noin 184 cm pitkä.

Vastaus: 184 cm

254. Sovitetaan pistejoukkoon lineaarinen malli.



Mallin yhtälö on $f(x) = 0{,}751x + 42{,}940$.

a) Ihmisen, jonka käsien kärkiväli on 215 cm, pituus saadaan sijoittamalla $x = 215$ mallin lausekkeeseen.

$f(215) = 0{,}751... \cdot 215 + 42{,}939... = 204{,}429$

Jos ihmisen käsien kärkiväli on 215 cm, hän on mallin mukaan noin 204 cm pitkä.

Vastaus: 204 cm

b) Lasketaan 150 cm pitkän ihmisen käsien kärkiväli.
Ratkaistaan yhtälö $150 = 0{,}751...x + 42{,}939...$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 142{,}535...$

150 cm pitkän ihmisen käsien kärkiväli on noin 143 cm.

Vastaus: 143 cm

c) Lasketaan mallin avulla 50 cm pitkän vauvan käsien kärkiväli.
Ratkaistaan yhtälö $50 = 0{,}751...x + 42{,}939...$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 9{,}399...$

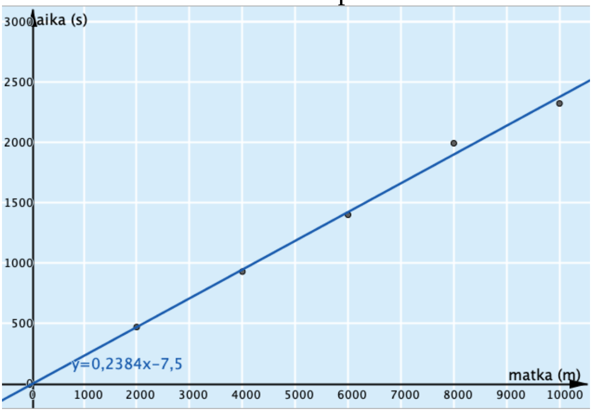
Mallin mukaan vastasyntyneen vauvan käsien kärkiväli on 9 cm. Tämä on liian pieni, joten mallin avulla ei voida arvioida vastasyntyneen vauvan käsien kärkiväli.

Vastaus: ei voida

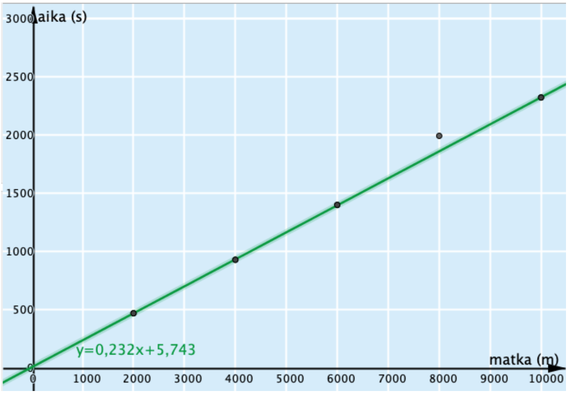
255. Koska juoksija eteni tasaista vauhtia, matkan ja ajan riippuvuus on lineaarista. Tutkitaan tilannetta koordinaatistossa. Piirtämisen helpottamiseksi muutetaan ajat sekunneiksi kertomalla minuuttien määrä luvulla 60 ja lisäämällä sekunnit.

Matka (m)	2000	4000	6000	8000	10000
Aika (s)	$7 \cdot 60 + 50 = 470$	$15 \cdot 60 + 29 = 929$	$23 \cdot 60 + 20 = 1400$	$33 \cdot 60 + 12 = 1992$	$38 \cdot 60 + 42 = 2322$

Valitaan muuttujaksi x matka ja muuttujaksi y aika. Merkitään pisteet koordinaatistoon ohjelmalla. Koska ajan ja matkan riippuvuus on tasaista vauhtia etenevällä juoksijalla lineaarista, pisteiden pitäisi olla likimain samalla suoralla. Sovitetaan pisteisiin suora.



Kauimpana suoralta näyttäisi olevan piste (8000, 1992), joten se voi olla väärin kirjattu piste. Sovitetaan suora uudestaan niin, että jätetään piste (8000, 1992) ottamatta huomioon.



Kaikki neljä muuta pistettä ovat hyvin tarkasti samalla suoralla, joten piste (8000, 1992) on väärä. 8000 metrin aika 33.12 on siis kirjattu väärin.

Lasketaan oikea aika mallin $f(x) = 0{,}232x + 5{,}743$ avulla.

$f(8000) = 0{,}2317... \cdot 8000 + 5{,}742... = 1859{,}571...$

Jos juoksija on juossut koko ajan samaa vauhtia, oikea aika on

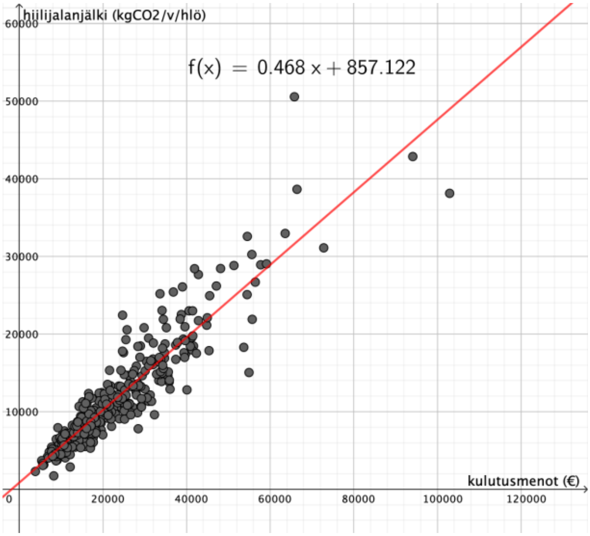
$$1859{,}571...\ s = \frac{1859{,}571...}{60}\ \text{min} = 30{,}992...\ \text{min}$$

$30{,}992...\ \text{min} = 30\ \text{min} + 0{,}992... \cdot 60\ \text{s} = 30\ \text{min}\ 59{,}57...\ \text{s} \approx 31\ \text{min}.$

Valmentajan käyttämässä muodossa ilmoitettuna aika on 31.00.

Vastaus: 8000 metrin väliaika, oikea aika 31.00

256.



Lineaarinen malli on $f(x) = 0{,}468x + 857{,}122$.

a) Lasketaan mallin mukainen hiilijalanjälki henkilölle, jonka kulutusmenot ovat 100 000 euroa vuodessa.

$f(100\,000) = 0{,}467... \cdot 100\,000 + 857{,}121... = 47\,607{,}299...$

Mallin mukaan henkilön hiilijalanjälki on noin 48 000 kgCO_2.

Vastaus: 48 000 kgCO_2

b) Ratkaistaan yhtälön avulla, kuinka suuret kulutusmenot ovat mallin mukaan henkilöllä, jonka hiilijalanjälki vastaa 5000 kg:n hiilidioksidipäästöjä.

$$\begin{aligned} 5000 &= 0{,}467...x + 857{,}121... \\ 5000 - 857{,}121... &= 0{,}467...x \\ 0{,}467...x &= 4142{,}878... \quad \| : 0{,}467... \\ x &= 8861{,}738... \end{aligned}$$

Henkilön kulutusmenot ovat noin 8900 euroa vuodessa.

Vastaus: 8900 €

VAHVISTA OSAAMISTA

257. **a)** Sokeriruo'on tuotanto mallin mukaan nähdään kuvassa olevasta suorasta. Piste (2018, 2000) näyttää olevan suoralla, joten sokeriruo'on tuotanto oli mallin mukaan vuonna 2018 2000 miljoonaa tonnia.

Mallin $y = 42{,}94x - 83\,737{,}397$ avulla tuotanto vuonna 2018 on
$y = 42{,}94 \cdot 2018 - 83\,737{,}397 = 2007{,}423 \approx 2000$.

Väite on oikein.

Vastaus: oikein

b) Sokeriruo'on tilastotiedon mukainen tuotanto (ei siis mallin mukainen) nähdään kuvassa olevista pisteistä. Kuvassa on piste, jonka koordinaatit ovat likimain (2018, 1900), joten sokerin tuotanto vuonna 2018 oli noin 1900 miljoonaa tonnia. Väite on siis väärin.

Vastaus: väärin

c) Mallissa tuotanto y riippuu vuodesta x yhtälön $y = 42{,}49x - 837\,37{,}397$ mukaisesti. Suoran kulmakerroin on 42,49, joten mallin mukaan sokeriruo'on tuotanto kasvaa 42,49 miljoonalla tonnilla vuosittain. Jos luku pyöristetään miljoonien tonnien tarkkuuteen, saadaan vuosikasvuksi noin 42 miljoonaa tonnia, joten väitteen voidaan tulkita olevan oikein.

Vastaus: oikein

d) Malli antaa ennusteen, joka pitää likimain paikkansa, jos kehitys jatkuu samanlaisena kuin ennen. Ennuste ei anna varmaa tietoa.

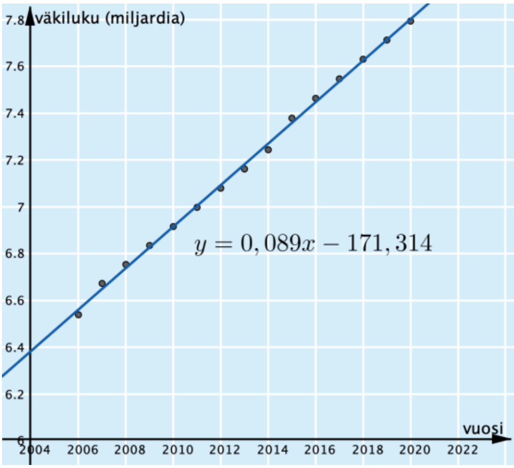
Vastaus: väärin

e) Lasketaan kokeeksi mallin mukainen sokeriruo'on tuotanto esimerkiksi vuonna 1990.
$y = 42{,}49x - 83737{,}40$
$y = 42{,}49 \cdot 1990 - 83737{,}40 = 817{,}619\ldots \approx 820$

Mallin mukaan vuonna 1990 tuotettiin sokeriruokoa noin 820 miljoonaa tonnia, joten väite on väärin.

Vastaus: väärin

258. **a)** Sovitetaan aineistoon ohjelman avulla lineaarinen malli.



Lineaarinen malli on $f(x) = 0{,}089x - 171{,}314$, jossa x on vuosi ja y maailman väkiluku miljoonina.

Vastaus: $f(x) = 0{,}089x - 171{,}314$

b) Lasketaan väkiluku vuonna 1980 sijoittamalla mallin yhtälöön $x = 1980$.

$f(1980) = 0{,}088... \cdot 1980 - 171{,}313... = 4{,}2557...$

Mallin mukaan väkiluku oli 4,256 miljardia vuonna 1980. Mallin antama tulos on lähellä oikeaa arvoa (4,449 mrd).

Vastaus: 4,256 mrd

c) Määritetään mallin mukainen väkiluku esimerkiksi vuodelle 2020 (kirjan kirjoittamishetki).

$f(2020) = 0{,}088... \cdot 2020 + 171{,}313... = 7{,}802...$

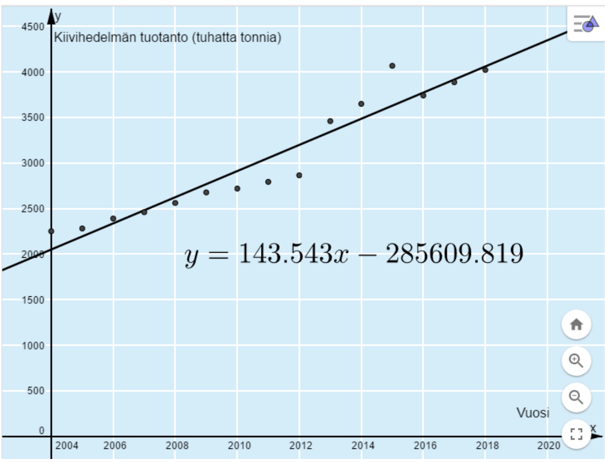
Mallin mukaan maailman väkiluku vuonna 2020 oli n. 7,8 miljardia.

Maailman todellinen väkiluku oli 12.12.2020 noin 7,8 miljardia

(http://www.worldometers.info/fi/ , luettu 12.12.2020). Mallin antama ennuste on likimain sama kuin vuoden puolivälin väkiluku.

Vastaus: –

259. **a)** Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



Ohjelma antaa mallin yhtälöksi $f(x) = 143{,}543x - 285609{,}819$.

Vastaus: $f(x) = 143{,}543x - 285\,609{,}819$

b) Kiivihedelmän tuotanto y vuonna 2030 saadaan sijoittamalla malliin vuosiluvuksi $x = 2030$.
$f(2030) = 143{,}542... \cdot 2030 - 285609{,}819... = 5782{,}180... \approx 5800$

Kiivihedelmän tuotantomäärä vuonna 2030 on mallin mukaan n. 5800 tuhatta tonnia.

Vastaus: 5800 tuhatta tonnia

c) Arvioidaan maailman väkiluvun olevan vuonna 2030 noin 8,5 miljardia. (Lähde: https://www.worldometers.info/world-population/world-population-projections/ luettu 30.12.2020)

Kiivihedelmän tuotanto on tuolloin mallin mukaan
5782,180... tuhatta tonnia = $5782{,}180 \cdot 1000 \cdot 1000$ kg
= 5 782 180 000 kg.

Yhden kiivin massa on 100 g = 0,1 kg, joten tuotanto on
$10 \cdot 5\,782\,180\,000$ kiiviä = 57 821 180 000 kiiviä.

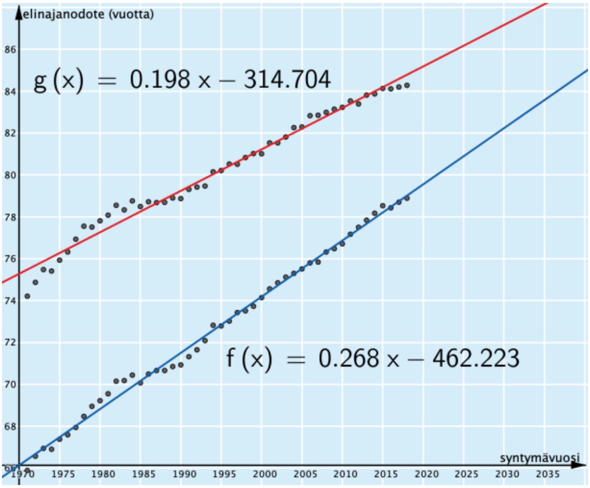
Jaetaan kiivien määrä ihmisten määrällä.

$$\frac{57\,821\,180\,000}{8\,500\,000\,000} = 6{,}802... \approx 7$$

Vuonna 2030 ihminen syö keskimäärin noin 7 kiiviä vuodessa.

Vastaus: 7 kiiviä

260. Sovitetaan aineistoihin suorat.



Naisten eliniänodotetta kuvaa suora $y = 0{,}198x – 315{,}704$ ja miesten eliniänodotetta suora $y = 0{,}268x - 462{,}223$.

a) Sijoittamalla vuosi $x = 2030$ suorien yhtälöihin saadaan mallin mukainen eliniänodote vuonna 2030 syntyville tytöille ja pojille.

Naiset: $f(2030) = 0{,}197... \cdot 2030 - 315{,}704... = 87{,}159... \approx 87$

Miehet: $g(2030) = 0{,}268... \cdot 2030 - 462{,}223... = 82{,}230... \approx 82$

Vuonna 2030 syntyvän tytön eliniänodote on mallin mukaan noin 87 vuotta ja pojan noin 82 vuotta.

Vastaus: tytöt 87 vuotta, pojat 82 vuotta

b) Muodostetaan malleista yhtälöpari ja ratkaistaan siitä arvio avulla, milloin elinajanodotteet saavuttavat toisensa ja mikä silloin on elinajanodote.
Ratkaistaan ohjelmalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = 0{,}197...x - 314{,}704... \\ y = 0{,}268...x - 462{,}223... \end{cases}.$$

Ratkaisuksi saadaan

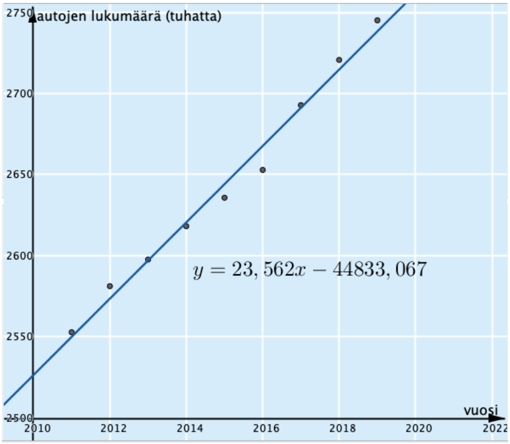
$$\begin{cases} x = 2100{,}168... \\ y = 101{,}049... \end{cases}.$$

Elinajanodotteet saavuttavat toisensa vuonna 2100 ja elinajanodote on silloin 101 vuotta.

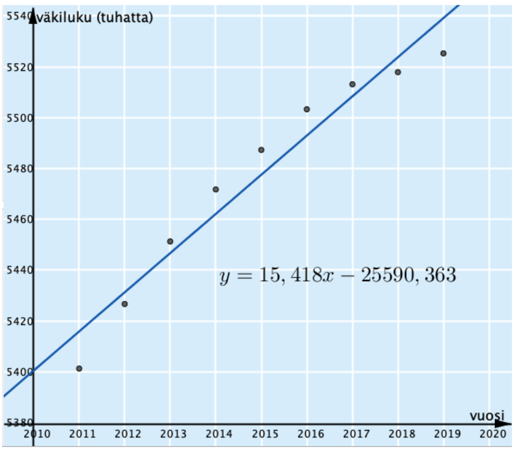
Vastaus: vuonna 2100, 101 vuotta

261. **a)** Sovitetaan pisteisiin lineaariset mallit ohjelmalla.

Autot:



Väkiluku:



Autojen lukumäärää tuhansina noudattaa mallia
$y = 23{,}562x – 44\,833{,}067$.

Väkiluku tuhansina asukkaina noudattaa mallia
$y = 15{,}418x – 25\,590{,}363$.

Vastaus: autot $y = 23{,}562x – 44\,833{,}067$, väkiluku $y = 15{,}418x – 25\,590{,}363$

b) Autojen lukumäärää tuhansina noudattaa mallia
$y = 23{,}562x - 44833{,}067$.
Väkiluku tuhansina asukkaina noudattaa mallia
$y = 15{,}418x - 25590{,}363$.

Koska autojen mallissa kulmakerroin on suurempi kuin väkiluvun mallissa, autojen määrä kasvaa nopeammin kuin väkiluku.

Kulmakerroin kertoo kasvunopeuden.
Autojen määrä kasvaa $23{,}562 \approx 24$ tuhatta autoa vuodessa ja väkilukua kasvaa $15{,}418 \approx 15$ tuhatta asukasta vuodessa.

Vastaus: autojen määrä kasvoi nopeammin, autot: 24 tuhatta vuodessa, väkiluku: 15 tuhatta vuodessa

c) Muodostetaan a-kohdan mallien avulla yhtälöpari ja ratkaistaan siitä, milloin autojen määrä saavuttaa ihmisten määrän.
Ratkaistaan ohjelmalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = 23{,}561...x - 44\,833{,}067... \\ y = 15{,}418...x - 25590{,}362... \end{cases}.$$

Yhtälöparin ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} x = 2362{,}947... \\ y = 10842{,}315... \end{cases}.$$

Kohdan a mallien mukaan autojen määrä saavuttaa ihmisten määrän vuonna 2363.

Tämänhetkisen maailman tilanteen perusteella vaikuttaa varsin epätodennäköiseltä, että maailmassa olisi auto jokaista ihmistä kohden. Toisaalta ennusteen antamaan vuoteen on hyvin pitkä aika ja parin sadan vuoden päästä maailma luultavimmin on hyvinkin erilainen 2020-lukuun verrattuna.

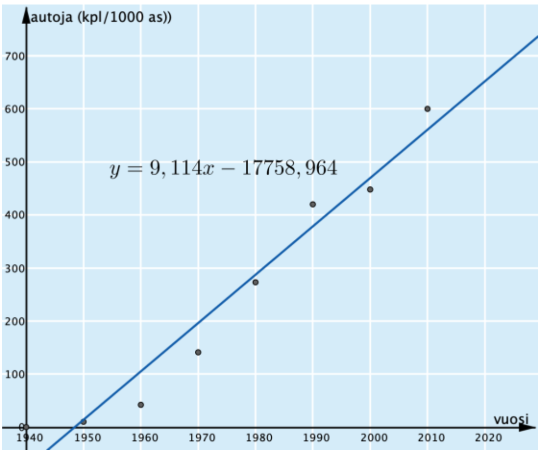
Vastaus: vuonna 2363

262. **a)** Siirretään pisteet kuvaajalle.

Kopioidaan taulukon luvut ohjelmaan.

	A	B
1	Vuosi	Autot
2	1940	0
3	1950	10
4	1960	42
5	1970	141
6	1980	273
7	1990	420
8	2000	448
9	2010	600

Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



Mallin yhtälöksi saadaan $f(x) = 9{,}114x - 17758{,}964$.

Vastaus: esim. $f(x) = 9{,}114x - 17\,758{,}964$

b) Lasketaan mallin $f(x) = 9{,}114x - 17758{,}964$ avulla autojen määrä, kun muuttuja $x = 2030$.

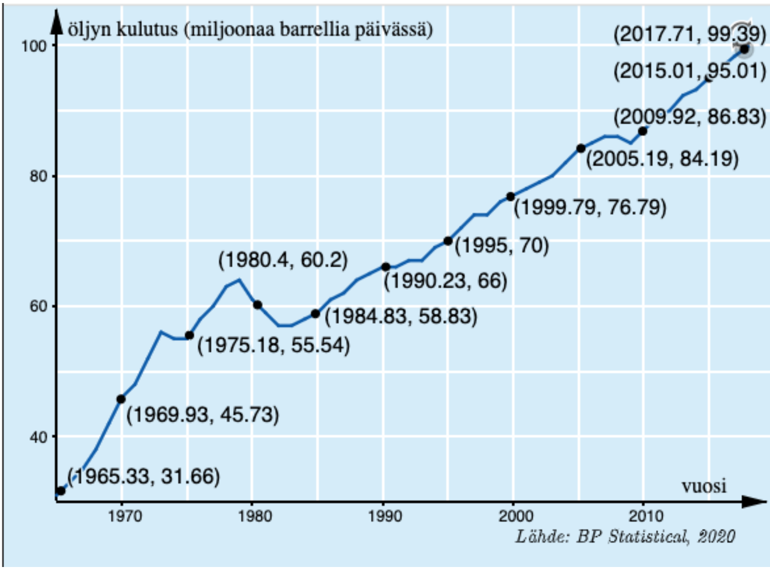
$f(2030) = 9{,}114... \cdot 2030 - 17758{,}964... = 743{,}035... \approx 740$

Mallin mukaan autojen määrä tuhatta asukasta kohti vuonna 2030 on 740.

Pisteet ovat suurin piirtein suoralla, joten autokannan kasvu on ollut likimain lineaarista. Mallin antama arvio voi olla järkevä, muttei kovin tarkka.

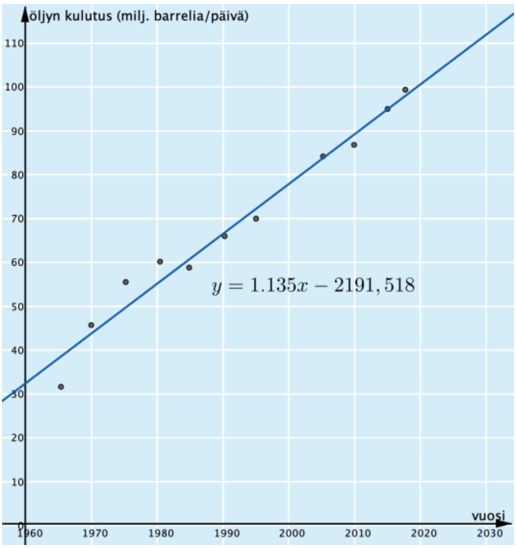
Vastaus: 740 autoa tuhatta asukasta kohti

263. **a)** Merkitään pisteitä kuvaajalle ja taulukoidaan tiedot.



Vuosi	Öljyn kulutus (miljoonaa barrelia päivässä)
1965,33	31,66
1969,93	45,73
1975,18	55,54
1980,4	60,2
1984,83	58,83
1990,23	66
1995	70
2005,19	84,19
2009,92	86,83
2015,01	95,01
2017,71	99,39

Sovitetaan aineistoon suora.



Suoran yhtälöksi saadaan esimerkiksi $y = 1{,}135x - 2191{,}518$.
Suora kulkee melko hyvin pisteiden kautta vuodesta 1985 alkaen, sitä ennen epätarkemmin.

Mitä enemmän valitaan pisteitä kuvaajalta, sitä tarkemmin saatu lineaarinen malli sopii alkuperäiseen kuvaajaan. Myös melko tasaisin välein merkityt pisteet parantavat mallin toimivuutta ja luotettavuutta.

Vastaus: esim. $f(x) = 1{,}135x - 2191{,}518$.

b) Kirja on kirjoitettu vuonna 2020, joten lasketaan kulutus vuonna 2020.
$f(x) = 1{,}134... \cdot 2020 - 2191{,}518... = 100{,}598...$

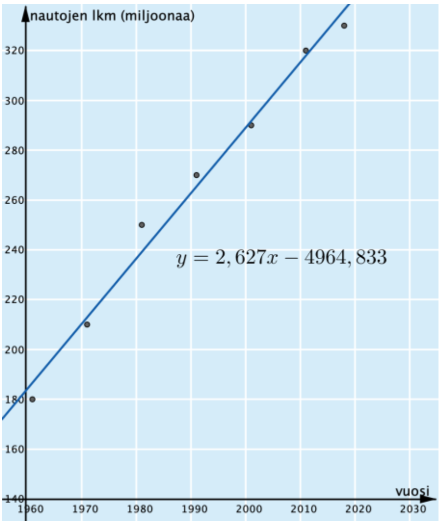
Mallin mukaan öljyn kulutus oli vuonna 2020 noin 101 miljoonaa barrelia päivässä. Todellinen kulutus vuonna 2019 oli noin 100 miljoonaa barrelia päivässä (https://www.statista.com/statistics/271823/daily-global-crude-oil-demand-since-2006/ , luettu 12.12.2020), eli hieman vähemmän kuin malli ennusti.

Vastaus: 101 miljoonaa barrelia päivässä (2020)

264. Taulukoidaan nautojen määrä n. 10 vuoden välein lukemalla kuvaajasta pisteitä.

Vuosi x	Nautojen lukumäärä y (miljoonaa)
1961	180
1971	210
1981	250
1991	270
2001	290
2011	320
2018	330

Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



Ohjelma antaa mallin yhtälöksi $f(x) = 2{,}627x – 4964{,}833$.

Teurastettujen nautojen lukumäärä vuonna 2050 saadaan sijoittamalla malliin vuosiluku $x = 2050$.
$f(2050) = 2{,}626... \cdot 2050 - 4964{,}833... = 420{,}401... \approx 420$

Mallin mukaan vuonna 2050 nautoja teurastetaan 420 miljoonaan.

Vuosi, jona teurastettujen nautojen määrä ylittää 500 miljoonaa, saadaan ratkaisemalla yhtälöstä $500 = 2{,}626...x – 4964{,}833...$ vuosiluku x.

Yhtälön ratkaisuksi saadaan ohjelmalla
$x = 2080{,}300... \approx 2080$.

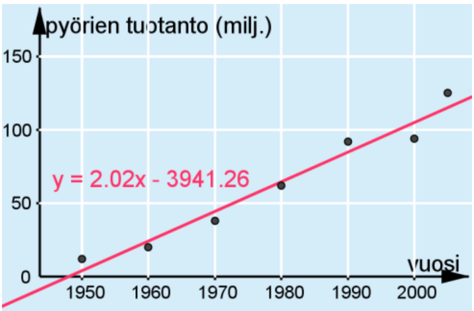
Teurastettujen nautojen määrä ylittää mallin mukaan 500 miljoonan vuosittaisen määrän vuonna 2080.

Vastaus: $f(x) = 2{,}627x – 4964{,}833$; 420 miljoonaa; vuonna 2080

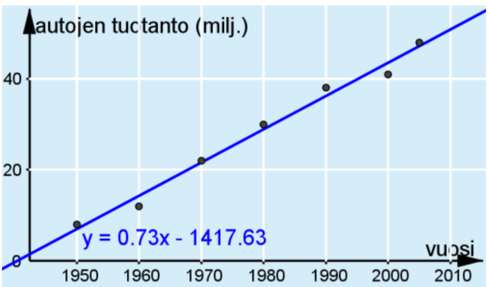
265. Taulukoidaan polkupyörien ja autojen tuotantomääriä 10 vuoden välein silmämääräisesti. Otetaan mukaan vuosia 10 vuoden välein ja lisäksi vielä vuosi 2005.

vuosi	polkupyöriä (miljoonaa)	autoja (miljoonaa)
1950	12	8
1960	20	12
1970	38	22
1980	62	30
1990	92	38
2000	94	41
2005	125	48

Sovitetaan aineistoihin lineaariset mallit.



Suoran kulmakerroin on 2,02, joten polkupyörien tuotanto kasvaa mallin mukaan 2,02 miljoonalla vuosittain.



Suoran kulmakerroin on 0,73, joten autojen tuotanto kasvaa mallin mukaan 0,73 miljoonalla vuosittain.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia nopeammin polkupyörien tuotanto kasvaa kuin autojen tuotanto.

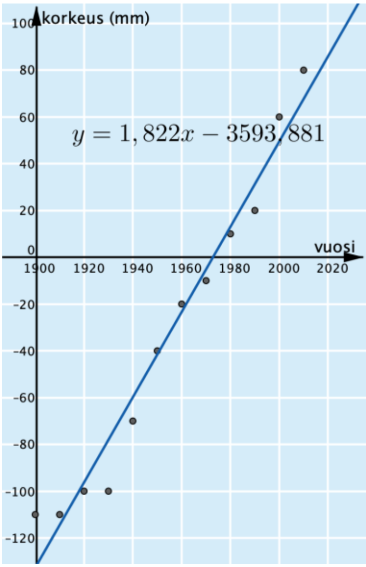
$$\frac{2,02-0,73}{0,73}=1,76712...=176,712...\% \approx 180\%$$

Polkupyörien tuotanto kasvaa noin 180 % nopeammin kuin autojen tuotanto.

Vastaus: esim. $f(x) = 2,02x - 3941,26$ ja $f(x) = 0,73x - 1417,63$; 180 %

266. Merkitään vuosilukua kirjaimella *x* ja merenpinnan korkeutta millimetreinä nollatasoon verrattuna kirjaimella *y*.

Pisteet (1900, −110), (1910, −110), (1920, −100), (1930, −100), (1940, −70), (1950, −40), (1960, −20), (1970, −10), (1980, 10), (1990, 20), (2000, 60) ja (2010, 80) ovat likimain mittaussarjojen keskiarvokäyrällä. Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



Ohjelma antaa mallin yhtälöksi *f*(*x*) = 1,822*x* – 3593,881.

Vastaus: *f*(*x*) = 1,822*x* – 3593,881, jossa *x* on vuosiluku

a) Korkeus vuonna 2050 saadaan laskemalla funktion *f* arvo, kun *x* = 2050.
f(2050) = 1,821... · 2050 – 3593,881... = 140,559...

Vuonna 2050 merenpinnan korkeus on noin +141 mm nollatasoon verrattuna.

Mallin mukaan merenpinnan korkeus vuonna 2020 on
f(2020) = 1,821... · 2020 – 3593,881... = 85,909... ≈ 86 (mm)

IPCC:n raportin mukaan maailman valtamerinen pinta kohoaa vuoden 2019 mittausten mukaan noin 5 mm/vuosi.
Tämän perusteella vuonna 2050 merenpinnan korkeus on noin
86 mm + 30 · 5 mm = 236 mm. Tämä on noin puolitoista kertaa suurempi kuin mallin antama ennuste.

Vastaus: +141 mm

b) Tehtävänannon tilanne alkaa vuodesta 2020, jolloin merenpinta oli mallin mukaan $f(2020) = 85{,}909...$ mm vertailutason yläpuolella.

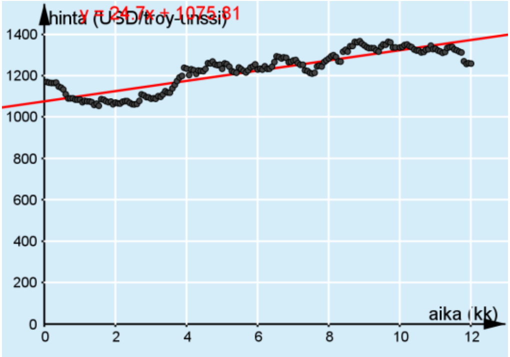
Määritettävä ajankohta, jona merenpinta on 1 m = 1000 mm korkeammalla kuin vuonna 2020, eli korkeudella
1000 mm + 85,909... mm = 1085,909....

Kyseinen ajankohta saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 1085{,}909...$
Ohjelmalla saadaan $x = 2568{,}944...$

Mallin mukaan Malediivien pinta-alasta alle 20 % on merenpinnan yläpuolella 2570-luvulla.

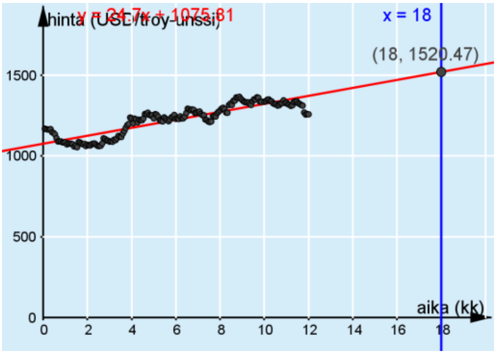
Vastaus: 2570-luvulla

267. **a)** Sovitetaan aineistoon suora.



Suoran yhtälö on $y = 24{,}7x + 1075{,}81$.

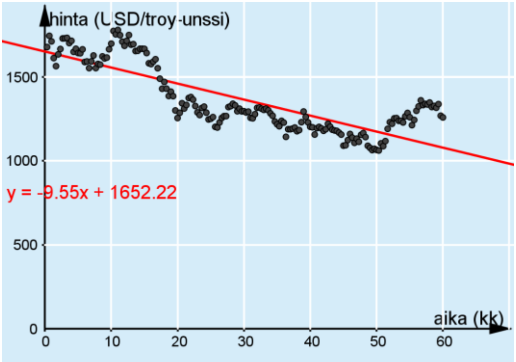
Aikasarjan lopussa aikaa oli kulunut 12 kuukautta aloitushetkestä ja puolen vuoden päästä siitä 18 kuukautta. Määritetään mallin mukainen kullan hinta 18 kuukauden kuluttua aloitushetkestä suorien $y = 24{,}7x + 1075{,}81$ ja $x = 18$ leikkauspisteen avulla.



Leikkauspiste on (18; 1520,47), joten mallin mukaan hinta on 1520,47 USD/troy-unssi ≈ 1520 USD/troy-unssi.

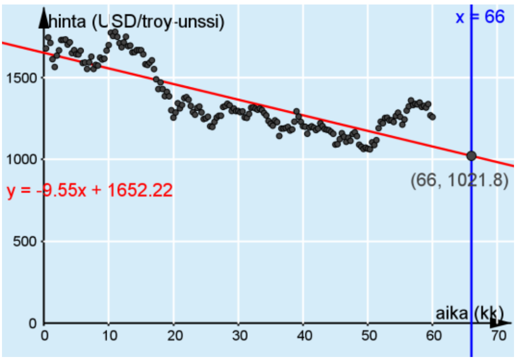
Vastaus: $y = 24{,}7x + 1075{,}81$, 1520 USD/troy-unssi

b) Sovitetaan aineistoon suora.



Suoran yhtälö on $y = -9,55x + 1652,22$.

Puolen vuoden kuluttua aikasarjan lopusta aikaa on kulunut $60 + 6 = 66$ kuukautta aloitushetkestä. Määritetään mallin mukainen kullan hinta 66 kuukauden kuluttua aloitushetkestä suorien $y = -9,55x + 1652,22$ ja $x = 66$ leikkauspisteen avulla.

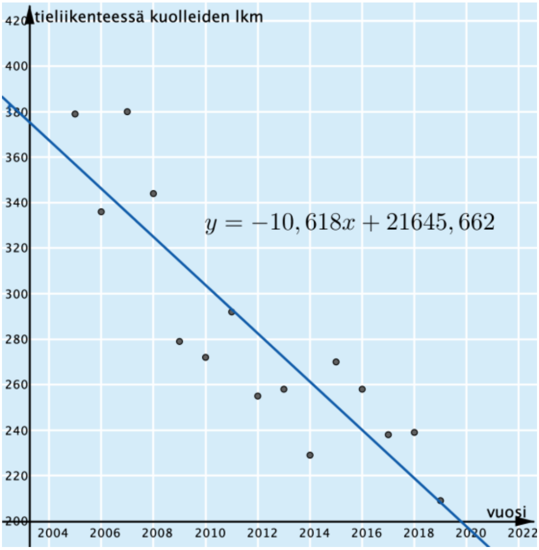


Leikkauspiste on (66; 1021,8), joten mallin mukaan hinta on noin 1021,8 USD/troy-unssi ≈ 1020 USD/troy-unssi, eli huomattavasti vähemmän kuin tehtävän 1 tuloksen mukaan.

Vastaus: $y = -9,55x + 1652,22$, 1020 USD/troy-unssi.

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

268. **a)** Valitaan muuttujaksi vuosiluku ja sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



Malliksi saadaan $f(x) = -10{,}618x + 21\,645{,}662$, jossa x on vuosiluku ja y kuolleiden määrä.

Vastaus: $f(x) = -10{,}618x + 21\,645{,}662$, kun muuttuja x on vuosiluku

b) Lasketaan keskiarvot taulukkoon.

C	D	E
Liikennekuolemat	Keskiarvo 3 vuoden välein	
379		
336		
380	358	'=keskiarvo(C2:C4)
344		
279		
272	275.5	
292		
255		
258	256.5	
229		
270		
258	264	
238		
239		
209	224	

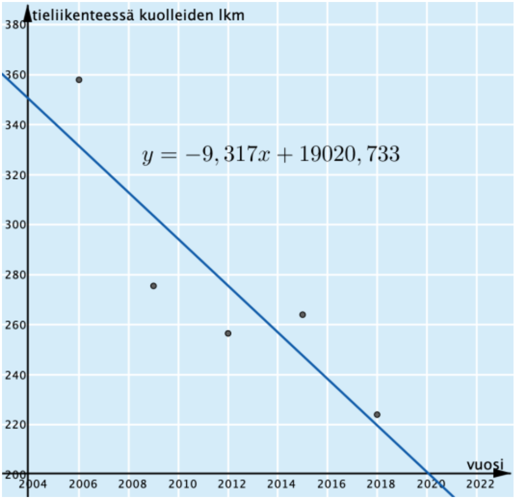
Poimitaan keskiarvon annettuun taulukkoon

Vuodet	2005–2007	2008–2010	2011–2013	2014–2016	2017–2019
Tieliikenteessä vuosittain kuolleiden määrän keskiarvo	358	275,5	256,5	264	224

Uuden taulukon pisteiden y-koordinaatit ovat vanhan taulukon y-koordinaattien keskiarvoja. Vastaavat x-koordinaatit ovat vuosien keskiarvoja.

Vuodet	2006	2009	2012	2015	2018
Tieliikenteessä vuosittain kuolleiden määrän keskiarvo	358	275,5	256,5	264	224

Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.

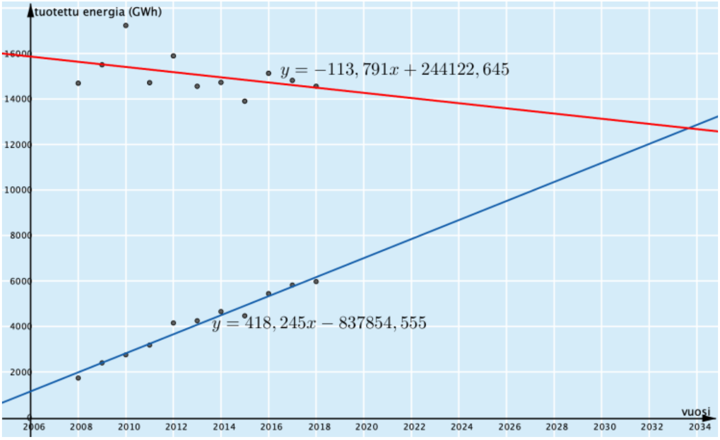


Mallin yhtälö on $g(x) = -9{,}317x + 19\,020{,}733$, kun muuttuja x on vuosiluku.

Lasketaan a- ja b-kohtien mallien avulla arviot vuonna 2030 tieliikenteessä kuolleiden määrälle.
$f(2030) = -10{,}617...x + 21645{,}661... = 91{,}411... \approx 91$
$g(2030) = -9{,}316...x + 19\,020{,}733... = 107{,}9 \approx 108$

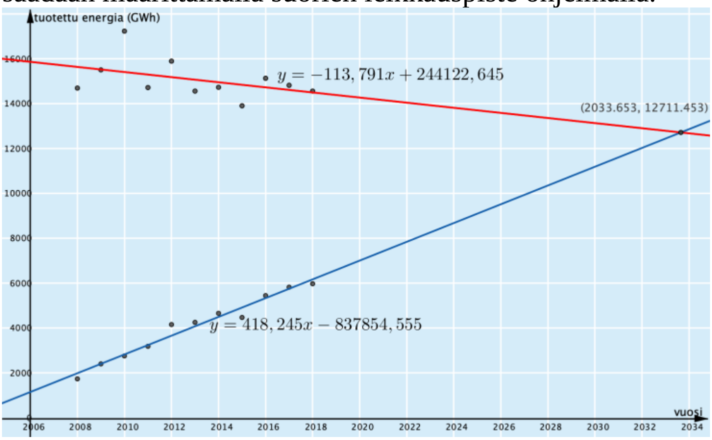
Vastaus: $f(x) = -9{,}317x + 19\,020{,}733$, a-kohdan malli 91, b-kohdan malli 108

269. Sovitetaan aineistoihin lineaariset mallit.



Lämpöpumppuja kuvaava suora on nouseva ja puulämmitystä kuvaava suora laskeva, joten jos kehitys jatkuu samanlaisena, niin lämpöpumput saavat puulämmityksen kiinni tulevaisuudessa.

Ajankohta, jolloin molemmilla lämmitystavoilla lämmitetään yhtä paljon, saadaan määrittämällä suorien leikkauspiste ohjelmalla.



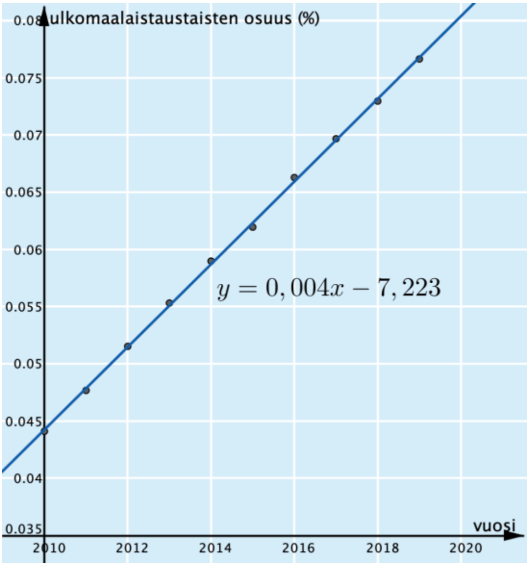
Suorien leikkauspiste on (2033,653; 12 711,453). Mallin mukaan lämpöpumput saavat puulämmityksen kiinni vuoden 2033 aikana eli vuotaan 2034 mennessä.

Vastaus: saavuttavat, vuoteen 2034 mennessä

270. **a)** Lisätään aineistoon sarake, joka ilmoittaa ulkomaalaistaustaisten suhteellisen osuuden desimaalilukuna.

	A	B	C	D
1	Vuosi	Ulkomaal...	Suomen ...	osuus
2	1990	37618	4998478	0.008
3	1991	49165	5029002	0.01
4	1992	57693	5054982	0.011
5	1993	67125	5077912	0.013
6	1994	73463	5098754	0.014
7	1995	79850	5116826	0.016
8	1996	85120	5132320	0.017
9	1997	92621	5147349	0.018
10	1998	100318	5159646	0.019
11	1999	107395	5171302	0.021
12	2000	113245	5181115	0.022
13	2001	122804	5194901	0.024
14	2002	130426	5206295	0.025
15	2003	138039	5219732	0.026
16	2004	146224	5236611	0.028
17	2005	157359	5255580	0.03
18	2006	169808	5276955	0.032
19	2007	185809	5300484	0.035
20	2008	203441	5326314	0.038
21	2009	219855	5351427	0.041
22	2010	237066	5375276	0.044
23	2011	257494	5401267	0.048
24	2012	279616	5426674	0.052
25	2013	301524	5451270	0.055
26	2014	322711	5471753	0.059
27	2015	339925	5487308	0.062
28	2016	364787	5503297	0.066
29	2017	384123	5513130	0.07
30	2018	402619	5517919	0.073
31	2019	423494	5525292	0.077

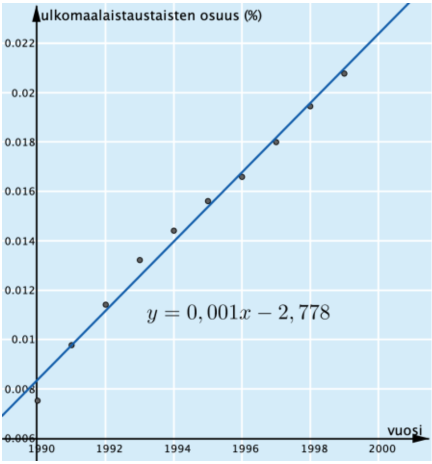
Koska ulkomaalaistaustaisten osuus väestöstä näyttäisi nousseen ajanjakson viimeisen 10 vuoden aikana aiempaa nopeammin, valitaan taulukosta vain viimeiset 10 vuotta. Sovitetaan pisteisiin lineaarinen malli.



Kun muuttuja on vuosiluku, malli on $f(x) = 0{,}004x - 7{,}223$.

Vastaus: esim. $f(x) = 0{,}004x - 7{,}223$, kun muuttuja x on vuosiluku

b) Ajanjakson 10 ensimmäisen vuoden aikana ulkomaalaistaustaisten osuus näyttäisi kasvaneen hitaammin kuin myöhemmin. Valitaan taulukosta vain ensimmäiset 10 vuotta ja sovitetaan pisteisiin lineaarinen malli.



Kun muuttuja on vuosiluku, malli on $f(x) = 0,001x - 2,778$,

Vastaus: esim. $f(x) = 0,001x - 2,778$, kun muuttuja x on vuosiluku

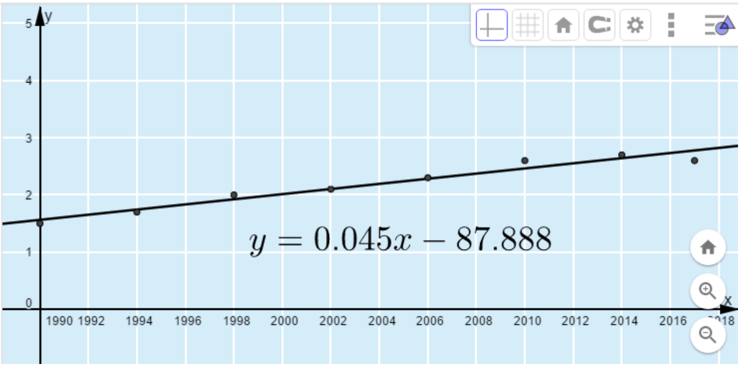
c) Mallien kulmakerroin kertoo mallin antaman väestöosuuden vuosimuutoksen. Kohdan a mallin mukaan ulkomaalaisten osuus kasvaa vuosittain noin 0,4 prosenttiyksikköä ja kohdan b mallin mukaan noin 0,1 prosenttiyksikköä vuodessa.

Vastaus: 0,4 ja 0,1 prosenttiyksiköllä

271. Taulukoidaan hyönteismyrkyn käyttömäärää kuvasta silmämääräisesti.

vuosi	kg/ha
1990	1,5
1994	1,7
1998	2
2002	2,1
2006	2,3
2010	2,6
2014	2,7
2017	2,6

Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



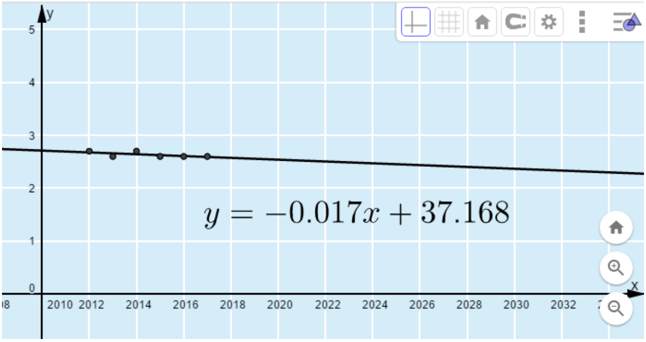
Ohjelma antaa malliksi $f(x) = 0{,}045x - 84{,}888$.

Tämän mallin perusteella vuonna 2050 hyönteismyrkkyjä käytetään $f(2050) = 0{,}044... \cdot 2050 - 87{,}887... = 4{,}260... \approx 4{,}3$ kilogrammaa hehtaaria kohden.

Aineistoa tarkasteltaessa näyttää kuitenkin siltä, että käytön määrä tasaantuu tai jopa hieman vähenee viimeisinä vuosina. Määritetään uusi malli käyttäen vain vuosien 2012–2017 arvoja.

Taulukoidaan aineistoa silmämääräisesti.

vuosi	kg/ha
2012	2,7
2013	2,6
2014	2,7
2015	2,6
2016	2,6
2017	2,6



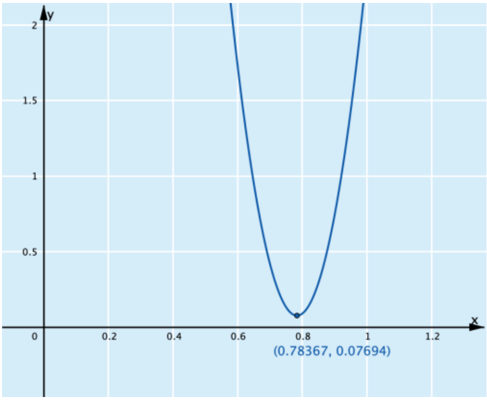
Ohjelma antaa malliksi $f(x) = –0,017x + 37,168$.

Tämän mallin perusteella vuonna 2050 hyönteismyrkkyjä käytetään $f(2050) = –0,017... \cdot 2050 + 37,167... = 2,024... \approx 2,0$ kilogrammaa hehtaaria kohden.

Vastaus: Esim. $f(x) = 0,045x – 84,888$, jolloin myrkkyjä käytetään 4,3 kg/ha tai $f(x) = –0,017x + 37,168$, jolloin myrkkyjä käytetään 2,0 kg/ha.

272. Sievennetään funktion $f(k) = (2k - 1{,}5)^2 + (3k - 2{,}6)^2 + (6k - 4{,}6)^2$ lauseke joko ohjelmalla tai käsin.

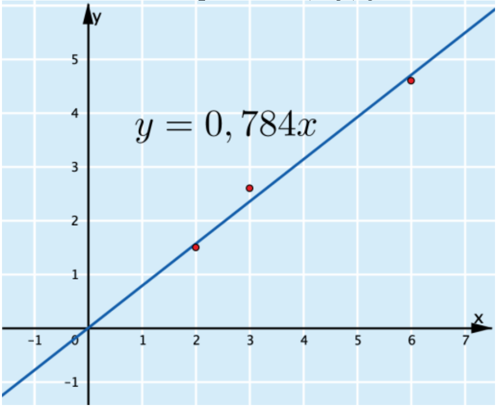
$$\begin{aligned}
f(k) &= (2k - 1{,}5)^2 + (3k - 2{,}6)^2 + (6k - 4{,}6)^2 \\
&= (2k - 1{,}5)(2k - 1{,}5) + (3k - 2{,}6)(3k - 2{,}6) + (6k - 4{,}6)(6k - 4{,}6) \\
&= 4k^2 - 3k - 3k + 2{,}25 + 9k^2 - 7{,}8k - 7{,}8k + 6{,}76 \\
&\quad + 36k^2 - 27{,}6k - 27{,}6k + 21{,}16 \\
&= 49k^2 - 6k - 15{,}6k - 55{,}2k + 30{,}17 \\
&= 49k^2 - 76{,}8k + 30{,}17
\end{aligned}$$



Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa pienimmän arvonsa kohdassa, joka on paraabelin huipun k-koordinaatti.

Määritetään huipun k-koordinaatti ohjelmalla.
k-koordinaatiksi saadaan $k = 0{,}78367...$

Piirretään kuvio pisteistä (x, y) ja suorasta $y = 0{,}784x$.



Vastaus: $k = 0{,}784$