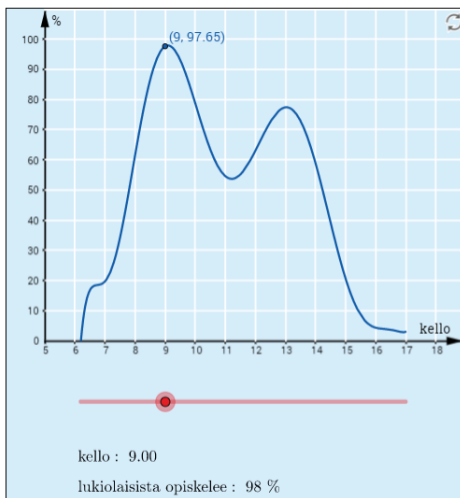


1 MATEMAATTINEN MALLINTAMINEN

1.1 Mallin tulkintaa

ALOITA PERUSTEISTA

101. a) Appletin mukaan kello 9.00 lukiolaisista opiskelee noin 98 %.



Vastaus: 98 %

b) Appletin mukaan ennen kello 8:aa, kello 10.40–11.50 ja kello 14 jälkeen alle 60 % lukiolaisista opiskelee.

Vastaus: ennen kello 8, kello 10.40–11.50 ja kello 14 jälkeen

c) Kello 10.30–12.00 opiskeluaktiivisuus laskee hetkellisesti, koska osa opiskelijoista on lounaalla.

Vastaus: ruokailun vuoksi.

- d) Kuvaaja loppuu kello 17:ään, joten kotitehtäviin käytettyä aikaa ei voida arvioida mallin perusteella.

Vastaus: ei voida

102. a) Koska lukuvälin päätepisteiden kohdalla olevat ympyrät on väritetty, kuuluvat sekä 2 että 5 lukuvälille. Lukuvälille kuuluvat kaikki pisteet, jotka ovat suurempia tai yhtä suuria kuin 2 mutta pienempiä tai yhtä suuria kuin 5, eli epäyhtälömerkintänä $2 \leq x \leq 5$ ja hakasulkumerkintänä $[2, 5]$.

Vastaus: $2 \leq x \leq 5$, $[2, 5]$

- b) Koska 2 on väritetty, lukuvälille kuuluvat kaikki luvut, jotka ovat suurempia tai yhtä suuria kuin 2 eli epäyhtälömerkintänä $x \geq 2$ ja hakasulkumerkintänä $[2, \infty[$.

Vastaus: $x \geq 2$, $[2, \infty[$

- c) Koska 4 ei ole väritetty, kuuluu lukuvälille kaikki luvut, jotka ovat pienempiä kuin 4, eli epäyhtälömerkintänä $x < 4$ ja hakasulkumerkintänä $] -\infty, 4[$.

Vastaus: $x < 4$, $] -\infty, 4[$

- d) Koska -1 on väritetty ja 3 ei ole, -1 kuuluu välille, mutta 3 ei kuulu. Lukuvälille kuuluvat kaikki pisteet, jotka ovat suurempia tai yhtä suuria kuin -1 mutta pienempiä kuin 3 eli epäyhtälömerkintänä $-1 \leq x < 3$ ja hakasulkumerkintänä $[-1, 3[$.

Vastaus: $-1 \leq x < 3$, $[-1, 3[$

103. a) Massa x voi saada vain ei-negatiivisia arvoja eli $x \geq 0$.

Vastaus: $x \geq 0$

- b) Aika x alkaa nolasta ja päättyy neljään tuntiin eli $0 \leq x \leq 4$.

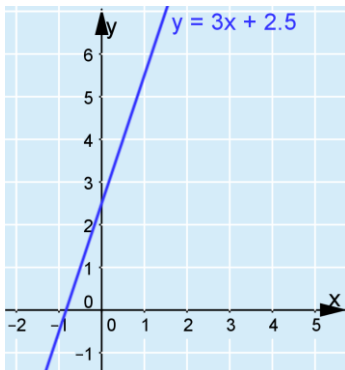
Vastaus: $0 \leq x \leq 4$

- c) Lämpötila x alkaa 0 asteesta ja päättyy 35 asteeseen eli $0 \leq x \leq 35$.

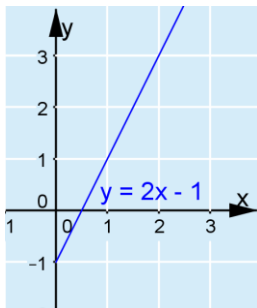
Vastaus: $0 \leq x \leq 35$

104. Piirretään funktion kuvaajat ohjelmalla.

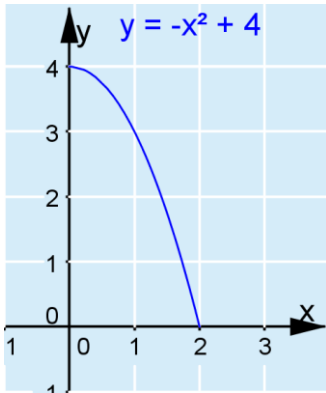
- a) $f(x) = 3x + 2,5$



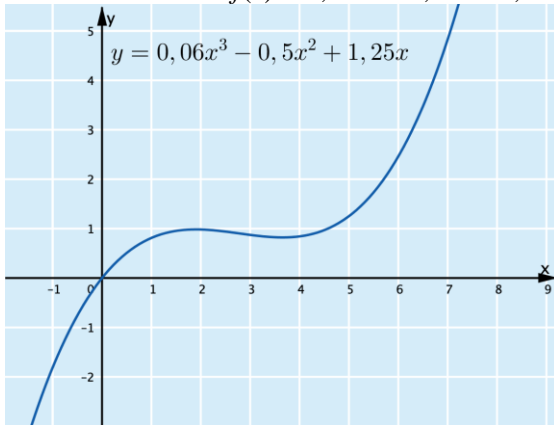
- b) $g(x) = 2x - 1, x \geq 0$



c) $h(x) = -x^2 + 4, 0 \leq x \leq 2$



105. Piirretään funktion $f(x) = 0,06x^3 - 0,5x^2 + 1,25x$ kuvaaja ohjelmalla.



a) Määritetään ohjelmalla funktion arvo, kun muuttujan x arvo on 3.

1	$f(x) := 3 / 50 x^3 - 1 / 2 x^2 + 5 / 4 x$
<input checked="" type="radio"/>	$\approx f(x) := 0.06 x^3 - 0.5 x^2 + 1.25 x$
2	$f(3)$
<input type="radio"/>	≈ 0.87

Funktion arvoksi saadaan $f(3) \approx 0,87$.

Vastaus: $f(3) \approx 0,87$

- b) Määritetään ohjelmalla, millä muuttujan x arvolla funktion arvo on 4 yhtälöstä $f(x) = 4$.

3	$f(x)=4$
<input type="radio"/>	RatkaiseNumeerisesti: $\{x = 6.70919\}$

Funktion arvo on 4 muuttujan arvolla $x = 6,709\dots \approx 6,71$.

Vastaus: $x \approx 6,71$

106. a) $f(45) = 1,349 \cdot 45 = 60,705$.

Tulos tarkoittaa sitä, että täysi 45 litran tankillinen polttoainetta maksaa 60,705 € \approx 60,71 €.

Vastaus: $f(45) = 60,71$. 45 litraa polttoainetta maksaa 60,71 €

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 42 \\ 1,349x &= 42 && \parallel :1,349 \\ x &= 31,134\dots \\ x &\approx 31 \end{aligned}$$

Tulos tarkoittaa sitä, että Samuel tankkasi 31 litraa bensiiniä.

Vastaus: $x \approx 31$. Samuel tankkasi 31 litraa bensiiniä

107. a) Kuvaajasta nähdään, että $f(0) \approx 800$. Tulos tarkoittaa sitä, että testin alkuhetkellä bakteereja oli 800.

Vastaus: $f(0) \approx 800$. Alkuhetkellä oli 800 bakteeria.

- b) Kuvaajasta nähdään, että $f(t) = 0$, kun $t \approx 7,1$. Tulos tarkoittaa sitä, että hieman yli 7 minuutin kuluttua testin alkuhetkestä kaikki bakteerit olivat kuolleet.

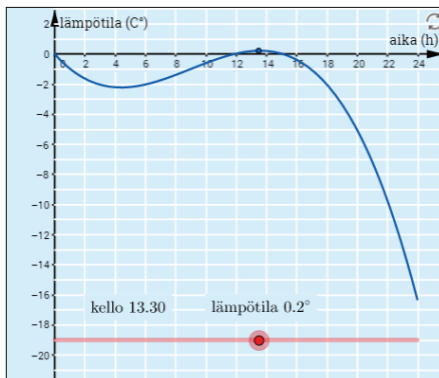
Vastaus: $t \approx 7,1$. Hieman yli 7 minuutin kuluttua kaikki bakteerit ovat kuolleet.

- c) Malli on käyttökelpoinen, kun koe on aloitettu, mutta bakteereja on vielä jäljellä, eli välillä $[0, 7]$.

Vastaus: aikavälillä $[0, 7]$

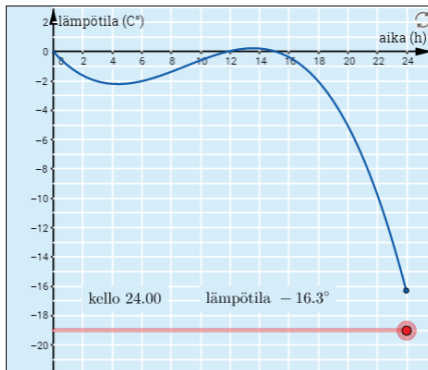
VAHVISTA OSAAMISTA

108. a) Appletin mukaan lämpötila oli korkeimmillaan klo 12.45 – 14.30, jolloin se oli $0,2^\circ\text{C}$.



Vastaus: $0,2^\circ\text{C}$, klo 12.45–14.30

- b) Appletin mukaan vuorokauden matalin lämpötila oli $-16,3\text{ }^{\circ}\text{C}$ kello 24.00.



Vastaus: $-16,3\text{ }^{\circ}\text{C}$, klo 24.00

- c) Lämpötila oli alle $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ kello 0:n ja 11.45:n välillä sekä kello 15:n jälkeen.

Vastaus: klo 0.00–11.45 ja klo 15.00–24.00.

- d) Lämpötila laski kello 0.00 ja klo 4.30 välillä, nousi klo 4.30 ja klo 13.30 välillä ja laski kello 13.30 ja klo 24.00 välillä.

Vastaus: laski klo 0.00–4.30 ja klo 13.30–24.00, nousi klo 4.30–13.30

109. a) Sanayhdistelmän ”Elvis Presley” esiintymistiheys oli suurin vuonna 2000 ja sanayhdistelmän ”The Rolling Stones” vuonna 2002.

Vastaus: 2000 ja 2002

- b) The Rolling Stones mainittiin useammin kuin Elvis Presley aikavälillä 1971–1973 ja vuonna 2011

Vastaus: 1971–1973 ja 2011

- c) Vuonna 2010 molempien sanayhdistelmien esiintymistiheydet olivat vähenemässä.

Vastaus: vähenivät

110. a) Lukua -3 suuremmat ja lukua 1 pienemmät reaali-luvut merkitään epäyhtälönä $-3 < x < 1$ ja hakasulkumerkintänä $] -3, 1[$. Lukusuoralle piirrettäessä välin päätepisteissä olevat ympyrät jätetään värittämättä, koska -3 ja 1 eivät kuulu lukuvälille.



Vastaus:



$-3 < x < 1$ ja $] -3, 1[$

- b) Negatiiviset reaali-luvut merkitään epäyhtälönä $x < 0$, hakasulkumerkintänä $] -\infty, 0[$. Lukusuoralle piirrettäessä luvun 0 kohdalla oleva ympyrä jätetään värittämättä, koska 0 ei kuulu lukuvälille.



Vastaus:



$x < 0$ ja $] -\infty, 0[$

- c) Ei-negatiiviset reaaliluvut ovat suurempia tai yhtä suuria kuin 0. Ne merkitään epäyhtälönä $x \geq 0$, hakasulkumerkintänä $[0, \infty[$. Lukusuoralle piirrettäessä luvun 0 kohdalla oleva ympyrä väritetään, koska 0 kuuluu lukuvälille.

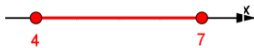


Vastaus:



$$x \geq 0 \text{ ja } [0, \infty[$$

- d) Luku 4 ja sitä suuremmat reaaliluvut, jotka ovat korkeintaan 7, tarkoittaa lukujen 4 ja 7 välissä olevia reaalilukuja ja lisäksi lukuja 4 ja 7. Ne merkitään epäyhtälönä $4 \leq x \leq 7$, hakasulkumerkintänä $[4, 7]$ ja lukusuoralle piirrettynä



Vastaus:



$$4 \leq x \leq 7 \text{ ja } [4, 7]$$

111. a) Lukuväli merkitään epäyhtälönä $2 < x < 3$ ja hakasulkumerkintänä $]2, 3[$. Lukusuoralle piirrettynä väli on



Lukuvälillä on esimerkiksi luku 2,5.

Vastaus:

$$2 < x < 3,]2, 3[, \text{esim. } 2,5$$



- b) Luvuista pienempi on ilmoitettava ensin, joten lukuväli merkitään epäyhtälönä $-6 < x < -5$ ja hakasulkumerkintänä $] -6, -5[$. Lukusuoralle piirrettynä väli on



Esimerkiksi luku $-5,5$ on kyseisellä välillä.

$$\text{Vastaus: } -6 < x < -5,] -6, -5[, \text{esim. } -5,5,$$



c) Tutkitaan, kumpi luvuista on pienempi. $-\frac{1}{3} = -0,333\dots$ ja

$-\frac{2}{9} = -0,222\dots$, eli $-\frac{1}{3}$ on pienempi. Lukuväli merkitään epäyhtälönä

$-\frac{1}{3} < x < -\frac{2}{9}$, hakasulkumerkintänä $]-\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}[$ ja lukusuoralle

piirrettynä



Lukuvälillä on esimerkiksi luku $-0,3$.

Vastaus: $]-\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}[$, esim. $-0,3$,



112. Selvitetään kysytyt asiat funktion lausekkeen avulla.

a) Lasketaan ilman lämpötila merenpinnan tasolla.

$f(0) = 20 - 6,5 \cdot 0 = 20$, joten ilman lämpötila merenpinnan tasolla on 20 °C . Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, 20 °C

b) Koska muuttujan x kerroin on $-6,5$, niin ilman lämpötila laskee $6,5\text{ °C}$ jokaista kilometriä kohti ylöspäin mentäessä. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, laskee $6,5\text{ °C}$

c) Lasketaan ilman lämpötila $1,0$ kilometrin korkeudella.

$f(1) = 20 - 6,5 \cdot 1 = 13,5$, joten ilman lämpötila kilometrin korkeudella on $13,5\text{ °C}$. Väite on tosi.

Vastaus: tosi

- d) Tutkitaan yhtälön avulla, millä muuttujan x arvolla ilman lämpötila on 0 °C .

$$20 - 6,5x = 0$$

$$-6,5x = -20 \quad ||: (-6,5)$$

$$x = 3,076\dots$$

Lämpötila on 0 °C noin 3,1 kilometrin korkeudessa. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, 3,1 kilometrin

- e) Edellisen kohdan perusteella lämpötila on 0 °C noin 3,1 kilometrin korkeudella ja b-kohdan perusteella lämpötila laskee siitä ylöspäin mentäessä. Väite on siis tosi.

Vastaus: tosi

- f) Lämpötila on matalin 10 kilometrin korkeudessa. Lasketaan lämpötila siellä.

$f(10) = 20 - 6,5 \cdot 10 = -45$, joten lämpötila 10 kilometrin korkeudessa on -45 °C . Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, -45 °C

113. a) $f(150) = 1,26 \cdot 150 + 120 = 309$.

Tulos tarkoittaa, että auton vuokraaminen 150 kilometrin matkalle maksaa 309 €.

Vastaus: $f(150) = 309$. 150 km ajomatka maksaa 309 €.

b) Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 500$.

$$f(x) = 500$$

$$1,26x + 120 = 500$$

$$1,26x = 500 - 120$$

$$1,26x = 380 \quad || :1,26$$

$$x = 301,587\dots$$

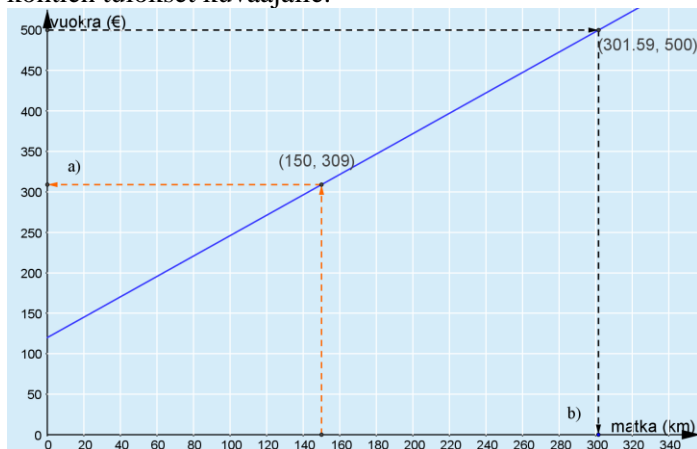
$$x \approx 300$$

Tulos tarkoittaa, että 500 euroa riittää 300 kilometrin ajomatkaan.

Vastaus: $x \approx 300$. 500 euroa riittää 300 kilometrin ajomatkaan.

- c) Videossa <https://vimeo.com/210763704/ebe068f0c8> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

Piirretään funktion $f(x) = 1,26x + 120$ kuvaaja ja merkitään a- ja b-kohtien tulokset kuvaajalle.



- d) Muuttujan x kertoimella eli luvulla 1,26 kerrotaan ajettujen kilometrien määrä, joten kilometriveloitusta on 1,26 euroa. Lopputulokseen lisätään luku 120, joten vuokrauksen lähtöhinta on 120 euroa.

Vastaus: 1,26 €/km on kilometriveloitusta ja 120 € on perusmaksu.

114. a) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 191$.

$$f(191) = 0,414 \cdot 191 = 79,074, \text{ joten Jessen askelpituus on } 79,074 \text{ cm.}$$

Muunnetaan pituudet samaan yksikköön:

$$5 \text{ km} = 5\,000 \text{ m} = 500\,000 \text{ cm.}$$

Lasketaan askelten määrä 500 000 cm:n matkalla:

$$\frac{500\,000 \text{ cm}}{79,074 \text{ cm}} = 6323,190\dots, \text{ joten Jesse ottaa viiden kilometrin matkalla}$$

mallin mukaan noin 6 300 askelta.

Vastaus: 6300 askelta

- b) Koska Jaanan pituus on 168 cm, sijoitetaan muuttujan x paikalle luku 168.

$$f(168) = 0,414 \cdot 168 = 69,552, \text{ joten Jaanan askelpituus on } 69,552 \text{ cm.}$$

$$10\,000 \cdot 69,552 \text{ cm} = 10\,000 \cdot 0,69552 \text{ m} = 6955,2 \text{ m} = 6,9552 \text{ km},$$

joten Jaanan pitäisi kävellä noin 7,0 km.

Vastaus: 7,0 km

- c) Kaksi metriä pitkän ihmisen askelpituus on mallin mukaan $f(200) = 0,414 \cdot 200 = 82,8$. Hyvin vanhan ihmisen askelpituus on yleensä pienempi kuin yhtä pitkän nuoren ihmisen, joten mallia ei voi käyttää.

Vastaus: ei voi

115. a) Tilastotiedot ulottuvat vuodesta 2010 vuoteen 2018, joten tilasto antaa luotettavaa tietoa aikaväliltä [2010, 2018].

Vastaus: [2010, 2018]

- b) $f(2016) = 1972 \cdot 2016 - 3\,863\,525 = 112\,027$. Tulos tarkoittaa, että vuonna 2016 sairaanhoitajia oli noin 112 000.

Vastaus: $f(2016) = 112\,027$. Vuonna 2016 oli noin 112 000 sairaanhoitajaa.

- c) Lasketaan lukujen 112 027 ja 111 417 suhde

$$\frac{112\,027}{111\,417} = 1,00547\dots = 105,47\dots\%, \text{ joten mallin antama arvo on}$$

$105,47\% - 100\% = 5,47\dots\% \approx 5,5\%$ suurempi kuin todellinen lukuarvo.

Vastaus: 5,5 %

- d) Ratkaistaan funktion f nollakohta yhtälön avulla.

$$1972x - 3\,863\,525 = 0$$

$$1972x = 3\,863\,525 \quad || :1972$$

$$x = 1959,191\dots$$

Mallin mukaan sairaanhoitajia ei ollut lainkaan vuonna 1959,191... \approx 1959. Tulos ei ole uskottava, koska sairaanhoitajia tiedetään olleen kauan ennen vuotta 1959.

Vastaus: vuonna 1959, ei ole

116. Kun tuotteiden määrä on x ja kappalehinta 1,20 on tuotteiden kokonaishinta $1,20x$, joten ilmaisuun A sopii funktio $i(x) = 1,20x$ eli IV.

Kun tuotteiden määrä on x ja kappalehinta 1,20 ja lisäksi tulee muovikassin hinta 0,10 on tuotteiden kokonaishinta $1,20x + 0,10$ joten ilmaisuun B sopii funktio $g(x) = 1,20x + 0,10$ eli II.

Kun tuotteiden kokonaishinta on x ja kappalehinta 1,20, saadaan tuotteiden määrä jakamalla kokonaishinta kappalehinnalla eli $\frac{x}{1,20}$, joten ilmaisuun C sopii funktio $f(x) = \frac{x}{1,20}$ eli I.

Kun tuotteiden määrä on x ja kappalehinta 1,20 sekä alennus 10 % on tuotteiden alennettu kokonaishinta $0,9 \cdot 1,20x$, joten ilmaisuun D sopii funktio $h(x) = 0,9 \cdot 1,20x$ eli III.

Vastaus: A: IV, B: II, C: I ja D: III

117. a) Lasketaan, kuinka paljon yksi puu sitoo hiilidioksidia yhden vuoden aikana.

$$\frac{4400 \text{ kg}}{700} = 6,285... \text{ kg} = 0,006285...t$$

Yksi puu sitoo hiilidioksidia $0,006285... \text{ tonnia}$, joten kysytyt funktio on $f(x) = 0,006285...x \approx 0,0063x$.

Vastaus: $f(x) = 0,0063x$

- b) Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 4\,500\,000$.
 $0,006285...x = 4\,500\,000 \quad ||: 0,006285...$
 $x = 715\,909\,090,909...$
 $x \approx 716\,000\,000$

Tulos tarkoittaa, että tarvitaan $716\,000\,000$ puuta sitomaan Suomen kaukolämpövoimaloiden yhden vuoden päästöt. Koska $716\,000\,000 > 500\,000\,000$, Suomen metsissä olevien suurten puiden määrä ei riitä sitomaan kaukolämpövoimaloiden päästöjä.

Vastaus: $x = 716\,000\,000$. Voimaloiden vuosipäästöjen sitomiseen tarvitaan $716\,000\,000$ puuta. Suomen metsissä olevien suurten puiden määrä ei riitä sitomaan kaukolämpövoimaloiden päästöjä.

118. Funktion f kuvaajan pisteiden x -koordinaatit ovat välillä $[0,2; 5,5]$, funktion g kuvaajan välillä $[5,5; 6,9]$ ja funktion h välillä $[6,9; 9]$.

Vastaus: Funktio f välille $[0,2; 5,5]$, funktio g välille $[5,5; 6,9]$, funktio h välille $[6,9; 9]$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 119. a)** Säiliö on tyhjentynyt, kun tilavuus on 0.
Ratkaistaan yhtälöstä $V(t) = 0$ tyhjenemiseen kuluva aika t .

$$\begin{aligned}520(20-t)^2 &= 0 && \parallel : 520 \\(20-t)^2 &= 0 \\20-t &= 0 \\t &= 20\end{aligned}$$

Säiliö on tyhjä 20 minuutin kuluttua.

Vastaus: 20 min kuluttua

- b)** Lasketaan veden määrä tyhjennyksen alkaessa eli, kun $t = 0$.
 $V(0) = 520 \cdot (20 - 0)^2 = 208\,000$, joten vettä on tyhjennyksen alkaessa 208 000 litraa.

Vastaus: 208 000 litraa

- c)** Funktion V arvo on mielekäs laskea, kun tyhjennys on alkanut eikä se ole vielä loppunut, eli kun $0 \leq t \leq 20$.

Vastaus: $[0, 20]$

- 120. a)** Lasketaan kokonaistuotantokustannukset, kun tuotetaan 20 kappaletta tuotetta.

$$f(20) = 20^3 - 25 \cdot 20^2 + 300 \cdot 20 + 500 = 4500$$

Vastaus: 4500 €

- b)** 20 tuotteen kokonaistuotantokustannukset ovat 4500 euroa, joten yhden tuotteen keskimääräiset tuotantokustannukset ovat

$$\frac{4500 \text{ €}}{20} = 225 \text{ €}.$$

Vastaus: 225 €

- c) Kahdennenkymmenennen tuotteen tuotantokustannukset saadaan vähentämällä 20 tuotteen tuotantokustannuksista 19 tuotteen tuotantokustannukset.

$$f(19) = 19^3 - 25 \cdot 19^2 + 300 \cdot 19 + 500 = 4034$$

20 tuotteen tuotantokustannukset ovat b-kohdan mukaan 4500 euroa ja 19 tuotteen tuotantokustannukset 4034 euroa, joten 20:n tuotteen tuotantokustannukset ovat $4500 \text{ €} - 4034 \text{ €} = 466 \text{ €}$.

Vastaus: 466 €

- d) Lasketaan 21. tuotteen tuotantokustannukset vähentämällä 21 tuotteen tuotantokustannuksista 20 tuotteen tuotantokustannukset.

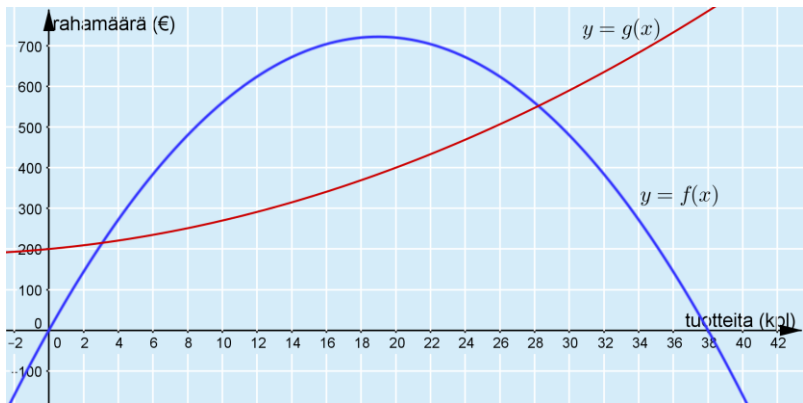
$$f(21) = 21^3 - 25 \cdot 21^2 + 300 \cdot 21 + 500 = 5036$$

20 tuotteen tuotantokustannukset ovat b-kohdan mukaan 4500 euroa, joten 21. tuotteen tuotantokustannukset ovat $5036 \text{ €} - 4500 \text{ €} = 536 \text{ €}$.

Yhden tuotteen keskimääräiset kokonaistuotantokustannukset näyttävät koko ajan kasvavan, vaikka olettaisi yksikkökohtaisten kustannusten laskevan, kun tuotetaan enemmän. Malli ei siis ole käyttökelpoinen suurilla tuotantomäärillä.

Vastaus: Yhden tuotteen keskimääräiset kokonaistuotantokustannukset näyttävät koko ajan kasvavan. Malli ei ole käyttökelpoinen suurilla tuotantomäärillä.

121. a) Piirretään funktioiden $f(x) = 76x - 2x^2$ ja $g(x) = 0,3x^2 + 4x + 200$ kuvaajat.



- b) Lasketaan $f(38) = 76 \cdot 38 - 2 \cdot 38^2 = 0$. Tulos tarkoittaa, että kun valmistetaan 38 tuotetta, myyntitulo on 0.

Vastaus: $f(38) = 0$, valmistettaessa 38 tuotetta myyntitulo on 0.

- c) Lasketaan $g(0) = 0,3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 200 = 200$. Tulos tarkoittaa, että vaikka ei valmistettaisi yhtään tuotetta, kustannukset ovat 200 euroa.

Vastaus: $g(0) = 200$, valmistettaessa 0 tuotetta kustannukset ovat 200 €

- d) Myyntituloja kuvaava funktio f on käyttökelpoinen, kun myyntitulo on ei-negatiivinen. Määritetään alaspäin aukeavan funktion $f(x) = 76x - 2x^2$ nollakohdat.

Ratkaistaan yhtälö $76x - 2x^2 = 0$ ohjelmalla.

Ratkaisuksi saadaan $x = 0$ tai $x = 38$, joten funktio f on käyttökelpoinen, kun $0 \leq x \leq 38$.

Tuotantokustannuksia kuvaava funktio g on käyttökelpoinen, kun valmistettava määrä on ei-negatiivinen, eli, kun $x \geq 0$.

Vastaus: funktio f , kun $0 \leq x \leq 38$, funktio g , kun $x \geq 0$

- e) Valmistaminen on voitollista, kun myyntitulot ylittävät tuotantokustannukset, eli kun funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella. Näin käy kuvaajan mukaan, kun $3 \leq x \leq 28$.

Tarkistetaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = g(x)$. Yhtälön ratkaisuna ovat ne x :n arvot, joilla tulot ja kustannukset ovat yhtä suuret.

$$76x - 2x^2 = 0,3x^2 + 4x + 200$$

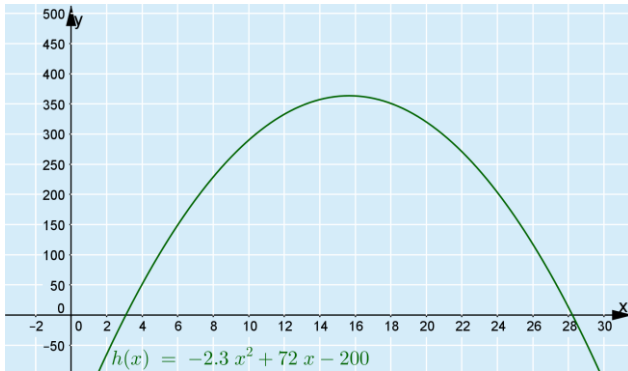
Yhtälön ratkaisuksi saadaan ohjelmalla
 $x = 3,0810\dots \approx 3,0$ tai $x = 28,2233\dots \approx 28$.

Alaraja 3,0810... joudutaan pyöristämään ylöspäin, koska jos valmistetaan 3 tuotetta, tuotantokustannukset ovat suuremmat kuin myyntitulot.

Vastaus: $4 \leq x \leq 28$

- f) Voitto on suurin, kun funktion f kuvaaja on mahdollisimman kaukana funktion g kuvaajan yläpuolella. Tutkitaan funktioiden f ja g erotusta ja merkitään se funktioksi h .

$$h(x) = f(x) - g(x) = 76x - 2x^2 - (0,3x^2 + 4x + 200) = -2,3x^2 + 72x - 200$$



Voitto on suurin, kun funktio $h(x)$ saa suurimman arvonsa. Määritetään ohjelmalla, millä muuttujan x arvolla saavutetaan funktion h suurin arvo.

CAS	
1	$h(x) := -2.3x^2 + 72x - 200$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow h(x) := -\frac{23}{10}x^2 + 72x - 200$
2	$h(x)$
<input type="radio"/>	$\approx -2.3x^2 + 72x - 200$
3	Ääriarvopisteet(h)
<input type="radio"/>	$\approx \{(15.652, 363.478)\}$

Funktion h suurin arvo eli voiton suurin arvo saavutetaan, kun tuotantomäärä x on 15,652.. ≈ 16 kpl.

Vastaus: 16 kpl

122. a) Sykekäyrästä huomataan, että syke pienenee hyvin nopeasti jopa nolnaan asti, mikä on mahdotonta. Sykekäyrä on käyttökelpoinen mittausrvojen aikavälillä eli kun aikaa on kulunut vähintään 0 minuuttia ja korkeintaan 5,5 minuuttia.

Vastaus: $[0; 5,5]$

- b) Kuvaajalta katsottuna $f(5) \approx 90$. Tulos tarkoittaa sitä, että viiden minuutin kuluttua mittausten alkamisesta opiskelijan syke oli noin 90.

Vastaus: $f(5) \approx 90$. 5 min kohdalla syke oli noin 90 lyöntiä/min

- c) Kuvaajalta katsottuna $g(5) \approx -30$. Tulos tarkoittaa sitä, että viiden minuutin kuluttua mittausten alkamisesta opiskelijan sykkeen hidastumisnopeus oli noin 30 lyöntiä/minuutti.

Vastaus: $g(5) \approx -30$. 5 min kohdalla sykkeen hidastumisnopeus oli noin 30 lyöntiä/min.

- d) Tarkastellaan vain käyttökelpoista aikaväliä $[0; 5,5]$. Sykekäyrältä havaitaan, että sykkeen hidastumisnopeus oli suurin mittausten alussa eli 0 minuutin kohdalla, jolloin se oli noin 50 lyöntiä/min.

Vastaus: 0 min; 50 lyöntiä/min

- e) Sykkeen hidastuminen oli pienimmillään eli lähellä nolaa noin 3 minuutin kuluttua mittausten alusta.

Vastaus: 3 minuutin kohdalla

1.2 Mallin sovittaminen mittaustuloksiin

ALOITA PERUSTEISTA

- 123.** Appletin funktion muuttujana on aika vuodesta 1980. Koska vuodesta 1980 vuoteen 2030 aikaa kuluu $2030 - 1980 = 50$ vuotta, katsotaan appletin funktion arvo kohdassa $x = 50$. Funktion arvo on 7181,65.

Koska funktion arvot ovat tuhansia, on katsojamääräennuste $7\,181\,650 \approx 7,2$ miljoonaa.

Vastaus: 7,2 miljoonaa kertaa

- 124.** **A** III, koska funktion $f(x) = x - 1$, kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin 1 ja se kulkee pisteen $(0, -1)$ kautta.
- B** V, koska funktion $f(x) = -x + 1$, kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin -1 ja se kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta.
- C** IV, koska funktion $f(x) = x^2 - 1$, kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.
- D** II, koska funktion $f(x) = -x^2 + 1$, kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.
- E** VI, koska funktion $f(x) = x^3 - 1$, kolmannen asteen polynomifunktion kuvaaja nousee vasemmalta oikealle mentäessä, kun 3. asteen termin kerroin on positiivinen. Lasketaan yksi testipiste esimerkiksi arvolla $x = 0$, jolloin funktion arvo eli käyrän y -koordinaatti on $f(0) = 0^3 - 1 = -1$. Funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(0, -1)$ kautta, kuten kuvaajastakin nähdään.
- F** I, koska funktion $f(x) = -x^3 + 1$, kolmannen asteen polynomifunktion kuvaaja laskee vasemmalta oikealle mentäessä, kun 3. asteen termin kerroin on negatiivinen.

Vastaus: A: III, B: V, C: IV, D: II, E: VI ja F: I

125. a) Vasemmanpuoleinen malli on 2. asteen polynominen malli, koska toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli.

Oikeanpuoleinen malli on 3. asteen polynominen malli.

Vastaus: 2. aste: vasemmanpuoleinen malli, 3. aste: oikeanpuoleinen malli

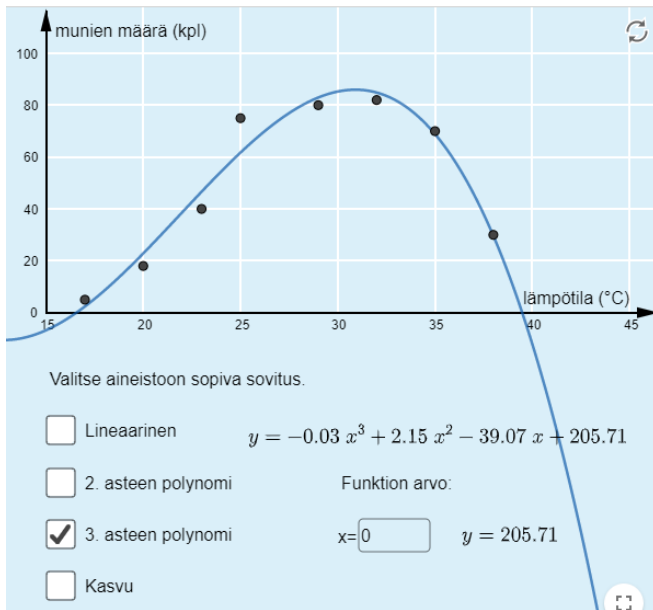
- b) 2. asteen polynominen malli poikkeaa pistejoukon pisteistä melkoisesti, mutta 3. asteen polynominen malli noudattelee pistejoukkoa kohtalaisen hyvin.

Vastaus: 2. aste: ei sovi kovin hyvin, 3. aste: sopii kohtalaisen hyvin

- c) Muuttujan x arvojen kasvaessa 2. asteen malli antaa pistejoukon arvoja pienempiä arvoja tai jopa negatiivisia arvoja. Muuttujan x arvojen kasvaessa 3. asteen mallin tuottamat arvot kasvavat voimakkaasti.

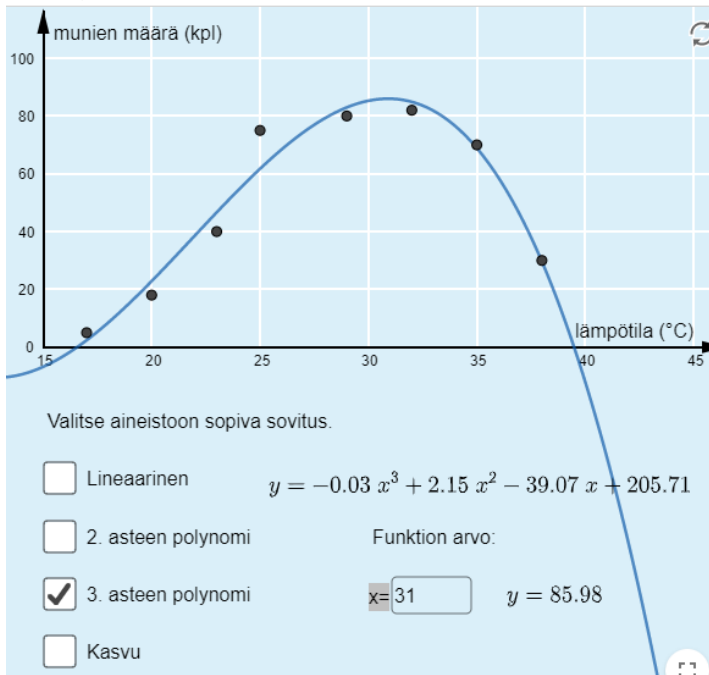
Vastaus: 2. aste: malli antaa pistejoukon arvoja pienempiä ja jopa negatiivisia arvoja, 3. aste: mallin arvot kasvavat voimakkaasti.

126. a) Huomataan, että 3. asteen polynominen malli $f(x) = -0,03x^3 + 2,15x^2 - 39,07x + 205,71$ sopii parhaiten havaintoaineistoon.



Vastaus: 3. asteen polynominen malli $f(x) = -0,03x^3 + 2,15x^2 - 39,07x + 205,71$

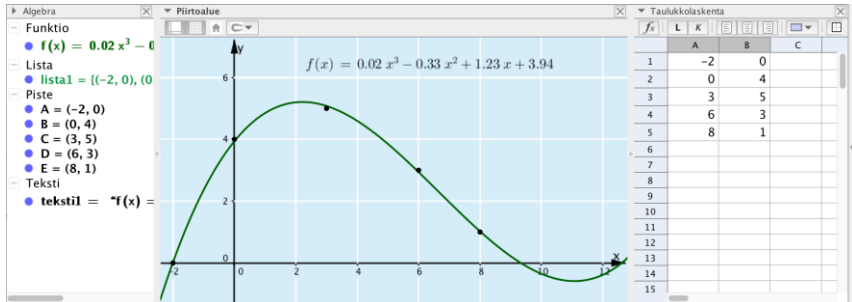
- b) Katsomalla kuvaajaa ja kokeilemalla x :n eri arvoja, huomataan, että yhden asteen tarkkuudella 31 asteen lämpötilassa tulee suurin määrä munia, 86 munaa.



Vastaus: 31°, 86 munaa

127. Videossa <https://vimeo.com/210763710/24c240de71> näytetään, kuinka kolmannen asteen polynomifunktio sovitetaan pisteisiin.

Taulukoidaan annetut pisteet ohjelmaan ja sovitetaan pisteisiin kolmannen asteen polynomifunktion kuvaaja.

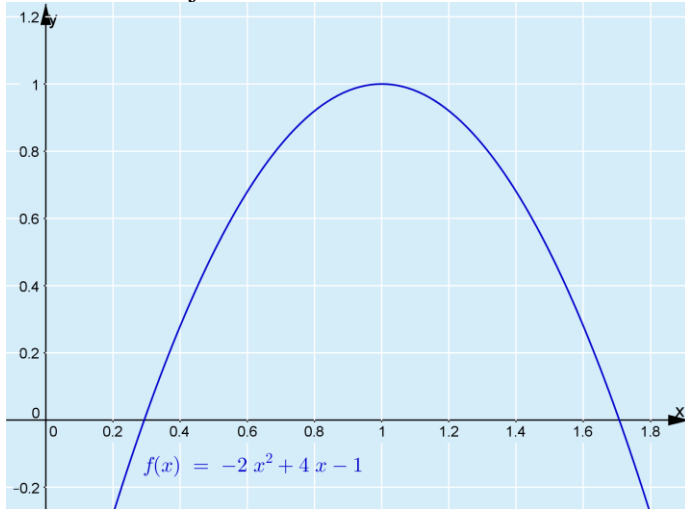


Funktioksi saadaan

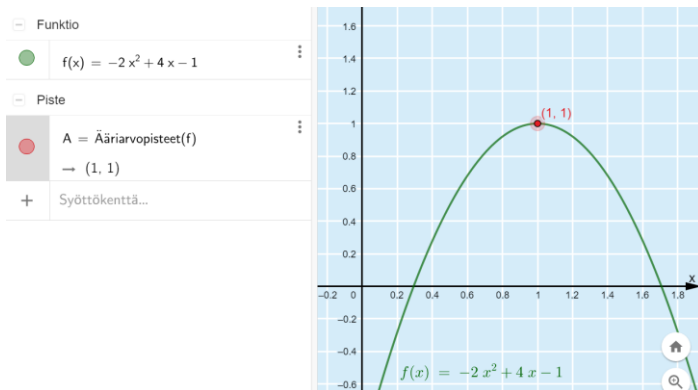
$$f(x) = 0,02x^3 - 0,33x^2 + 1,23x + 3,94.$$

Vastaus: $f(x) = 0,02x^3 - 0,33x^2 + 1,23x + 3,94.$

128. a) Funktion kuvaaja



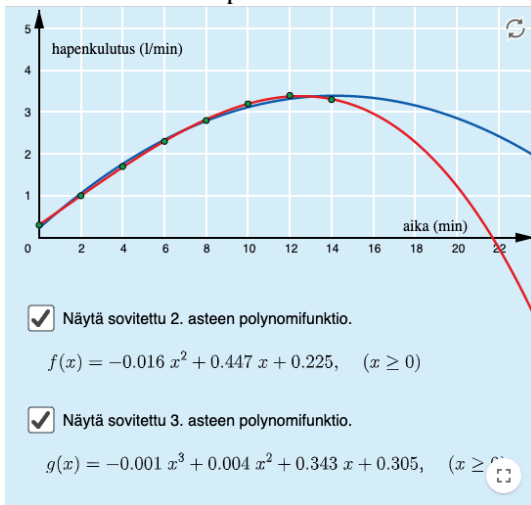
b)



Ohjelman mukaan funktion suurin arvo on 1.

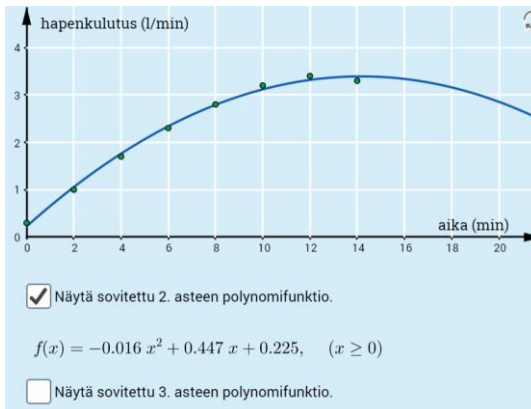
Vastaus: 1

129. a) Appletissa huomataan, että 3. asteen funktion kuvaaja kulkee tarkemmin mittauspisteiden kautta.



Vastaus: 3. asteen malli

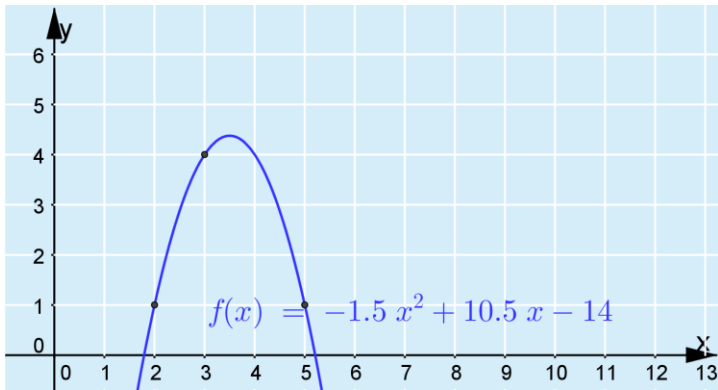
b)



Kuvaajia verrattaessa huomataan, että 22 minuutin kohdalla 3.asteen malli antaa hapenkulutukseksi negatiivisen lukeman, joka ei ole realistinen. Toisen asteen malli antaa realistisemman arvon.

Vastaus: 2. asteen malli

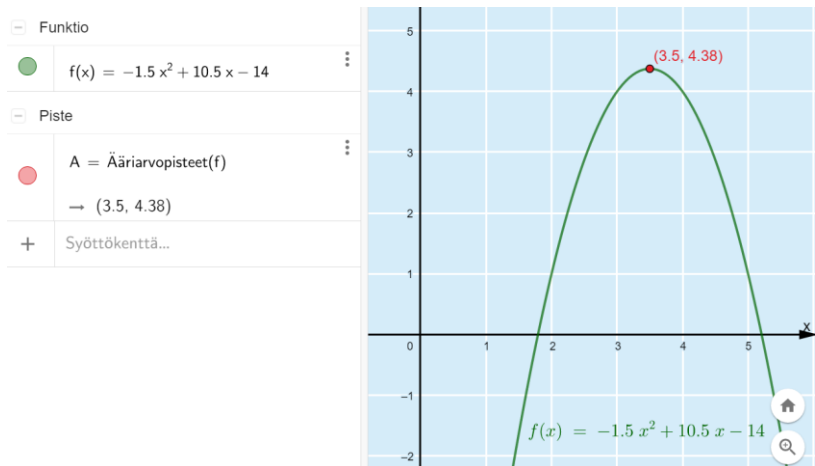
130. a) Syötetään pisteet ohjelmaan ja sovitetaan pisteisiin 2. asteen polynomifunktio.



Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = -1,5x^2 + 10,5x - 14$.

Vastaus: $f(x) = -1,5x^2 + 10,5x - 14$.

b)

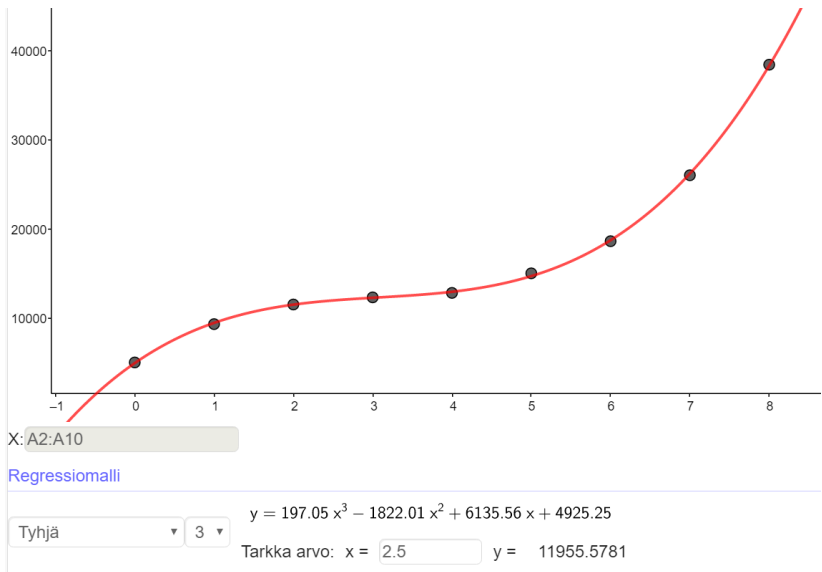


Ohjelman mukaan funktion suurin arvo on 4,38, joten kivi kävi noin 4,4 metrin korkeudella.

Vastaus: 4,4 m:n korkeudella

VAHVISTA OSAAMISTA

131. a)



Ohjelma antaa funktioksi esimerkiksi

$$f(x) = 197,05x^3 - 1822,01x^2 + 6135,56x + 4925,25.$$

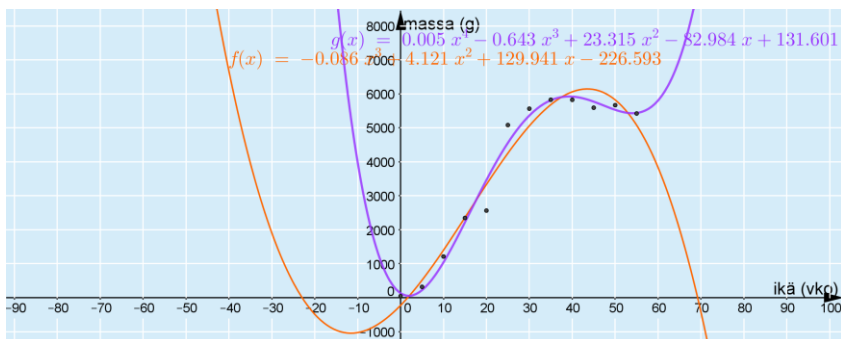
Vastaus: esim. $f(x) = 197,05x^3 - 1822,01x^2 + 6135,56x + 4925,25$.

- b) Koska muuttujan x yksikkönä on 10 000 kpl, saadaan 25 000 kpl:een kustannukset sijoittamalla funktion lausekkeeseen $x = 2,5$ eli ohjelman avulla

$$f(2,5) = 11\,955,57\dots \\ \approx 12\,000 \text{ (€)}$$

Vastaus: 12 000 €

132. a) Sovitetaan aineistoon 3. ja 4. asteen polynomit.



3. asteen malli

$$f(x) = -0,086x^3 + 4,121x^2 + 129,941x - 226,593$$

4. asteen malli

$$f(x) = 0,005x^4 - 0,643x^3 + 23,315x^2 - 82,984x + 131,601$$

Vastaus: 3. asteen malli

$$f(x) = -0,086x^3 + 4,121x^2 + 129,941x - 226,593$$

4. asteen malli

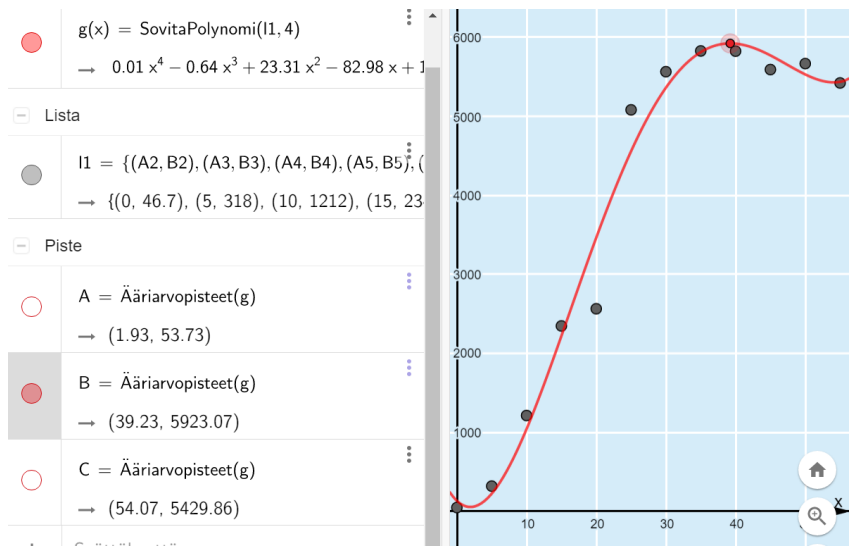
$$f(x) = 0,005x^4 - 0,643x^3 + 23,315x^2 - 82,984x + 131,601$$

b) Kuvaajien perusteella huomataan, että 4. asteen malli

$f(x) = 0,005x^4 - 0,643x^3 + 23,315x^2 - 82,984x + 131,601$ noudattaa paremmin kalkkunan painon kehitystä aikavälillä 25–60 viikkoa.

Vastaus: 4. asteen malli

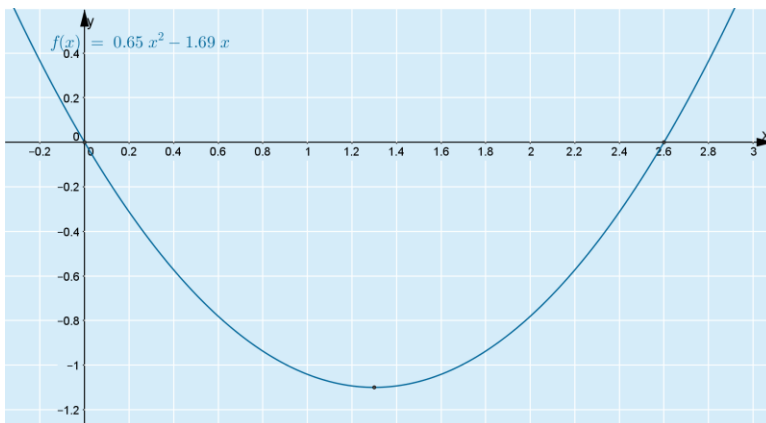
c)



Mallin perusteella kalkkunan paino on suurimmillaan noin viikolla 39.

Vastaus: 39 viikon ikäisenä.

133. a) Annettujen tietojen perusteella paraabeli kulkee pisteiden $(0,0)$ ja $(2,6;0)$ kautta. Kolmas piste saadaan tiedosta, että ojan syvyys on 1,1 m. Ojan syvin kohta on paraabelin huipussa. Huipun x -koordinaatti on nollakohtien $x = 0$ ja $x = 2,6$ keskiarvo $\frac{0+2,6}{2} = 1,3$, joten paraabelin huippu on pisteessä $(1,3; -1,1)$. Syötetään pisteet ohjelmaan ja sovitetaan pisteisiin 2. asteen polynomifunktio.



Ohjelma antaa funktioksi

$f(x) = 0,65x^2 - 1,69x$ ja paraabelin yhtälö on $y = 0,65x^2 - 1,69x$.

Vastaus: $y = 0,65x^2 - 1,69x$.

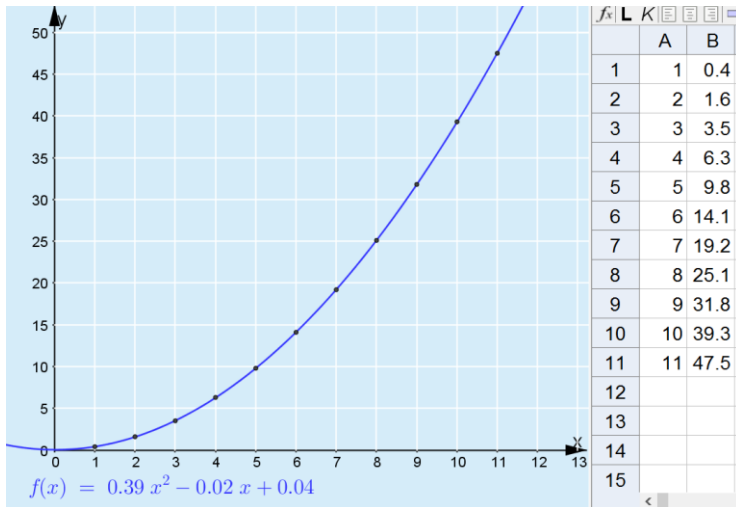
- b) Videossa <https://vimeo.com/210764741/0bd7f6a67f> näytetään miten tehtävän voi ratkaista ohjelmalla.

Ojan syvyys puolen metrin päässä reunasta saadaan määritettyä laskemalla ohjelmalla funktion arvo, kun $x = 0,5$ eli $f(0,5) = -0,6825 \approx -0,68$.

Ojan syvyys puolen metrin päässä reunasta on noin 0,68 m.

Vastaus: 0,68 m

134. Valitaan muuttujaksi roottorin halkaisija (m) ja funktion arvoksi tuulivoimalan energian tuotto (kW). Sovitetaan arvoihin 2. asteen polynomifunktion.



Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = 0,39x^2 - 0,02x + 0,04$.

- a) Ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 35$ voidaan määrittää 35 kilowatin tehoisen tuulivoimalan roottorin halkaisija.

Ohjelma antaa ratkaisuksi $x = 9,44231\dots$, joten 35 kW:n tuulivoimalan roottorin halkaisija on oltava suurempi kuin 9,4 eli noin 9,5 m.

Vastaus: 9,5 m

- b) Roottorin halkaisijaltaan 160 m tuulivoimalan teho saadaan sijoittamalla funktion lausekkeeseen $x = 160$. Teho on $f(160) = 10\,087,787\dots \approx 10\,000$ (kW).

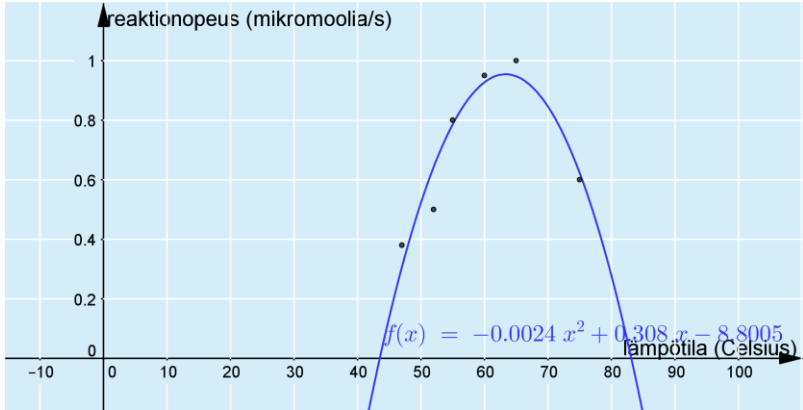
Laskennallisen tehon 10 087,787... kW suhde todelliseen tehoon

8 MW = 8 000 kW on $\frac{10087,787\dots}{8000} = 1,260\dots$ eli laskennallinen teho

on 26 % suurempi kuin todellinen teho.

Vastaus: 10 000 kW, 26 % suurempi

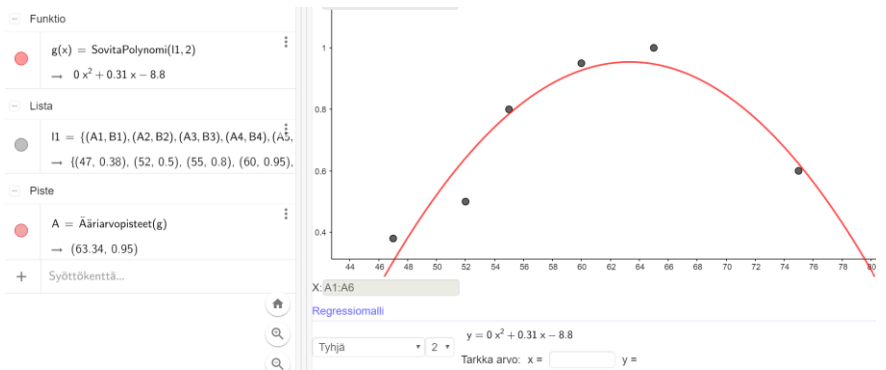
135. a) Sovitetaan aineistoon 2. asteen polynomi.



Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = -0,0024x^2 + 0,3080x - 8,8005$.

Vastaus: $f(x) = -0,0024x^2 + 0,3080x - 8,8005$

b) Ohjelmalla havaitaan, että reaktionopeus on suurimmillaan noin 63 asteen lämpötilassa.

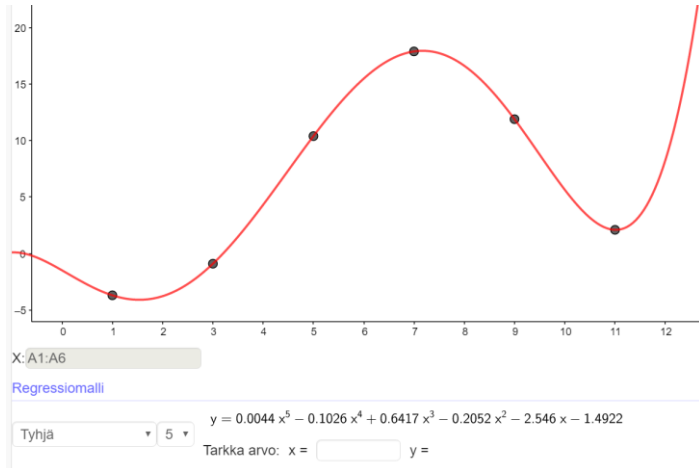


Vastaus: 63 °C

c) Malli on käyttökelpoinen mittaustulosten perusteella välillä [47,75].

Vastaus: [47,75]

136. a) Valitaan muuttujaksi x kuukauden järjestysluku, joten tammikuussa $x = 1$, maaliskuussa $x = 3$ ja niin edelleen. Keskilämpötilat ovat funktion arvoja. Taulukoidaan annetut koordinaatit ja sovitetaan pisteisiin viidennen asteen polynomifunktion kuvaaja.



Ohjelma antaa funktion lausekkeeksi

$$f(x) = 0,0044x^5 - 0,1026x^4 + 0,6417x^3 - 0,2052x^2 - 2,546x - 1,4922.$$

Vastaus: $f(x) = 0,0044x^5 - 0,1026x^4 + 0,6417x^3 - 0,2052x^2 - 2,546x - 1,4922$

- b) Muiden kuukausien lämpötilat voidaan määrittää sijoittamalla arvoja funktion lausekkeeseen ohjelman avulla.

Arvot ovat:

$$f(2) = -3,77\dots \approx -3,8$$

$$f(4) = 4,32\dots \approx 4,3$$

$$f(6) = 15,48\dots \approx 15,5$$

$$f(8) = 16,63\dots \approx 16,6$$

$$f(10) = 5,65\dots \approx 5,7$$

$$f(12) = 8,24\dots \approx 8,2$$

Taulukoidaan kysytyt keskilämpötilat.

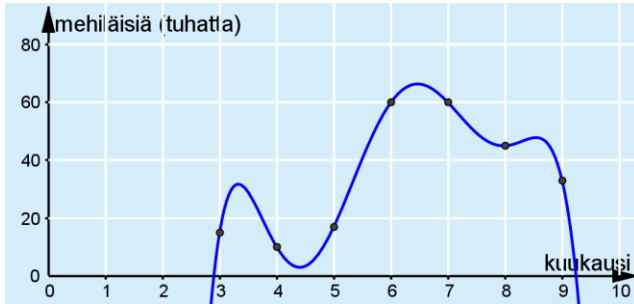
kuukausi	keskilämpötila (°C)
helmikuu	-3,8
huhtikuu	4,3
kesäkuu	15,5
elokuu	16,6
lokakuu	5,7
joulukuu	8,2

- c) Malli vaikuttaa muuten melko realistiselta, mutta sen mukaan lämpötilat lähtevät loppuvuodesta jyrkkään nousuun, toisin kuin kokemus osoittaa. Joulukuun keskilämpötila 30 vuoden tarkastelujaksolta tuskin voi olla 8,2 astetta.

kuukausi	keskilämpötila (°C)
tammikuu	-3,7
helmikuu	-3,8
maaliskuu	-0,9
huhtikuu	4,3
toukokuu	10,4
kesäkuu	15,5
heinäkuu	17,9
elokuu	16,6
syyskuu	11,9
lokakuu	5,7
marraskuu	2,1
joulukuu	8,2

Vastaus: Malli on melko realistinen joulukuuta lukuun ottamatta.

137. a) Koska muuttujana on kuukauden järjestysluku, niin maalikuussa $x = 3$, huhtikuussa $x = 4$ ja niin edelleen. Mehiläisten määrät tuhansina yksilöinä ovat muuttujan y arvoja. Taulukoidaan annetut pisteet ja sovitetaan listan pisteisiin kuudennen asteen polynomifunktion kuvaaja.

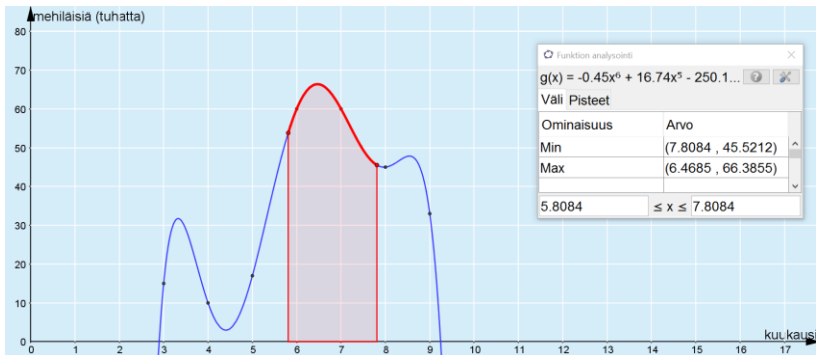


Ohjelma antaa mallin yhtälöksi

$$y = -0,5x^6 + 16,7x^5 - 250,1x^4 + 1933,8x^3 - 8128,9x^2 + 17\,578,9x - 15\,249.$$

Vastaus: $y = -0,5x^6 + 16,7x^5 - 250,1x^4 + 1933,8x^3 - 8128,9x^2 + 17\,578,9x - 15\,249.$

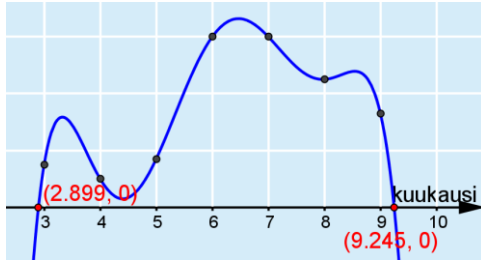
b)



Ohjelma antaa funktion suurimmaksi arvoksi noin 66, kun $x \approx 6,5$, joten mehiläisiä on eniten kesäkuun puolessavälissä, jolloin niitä on noin 66 000.

Vastaus: kesäkuun puolivälissä, 66 000

c)



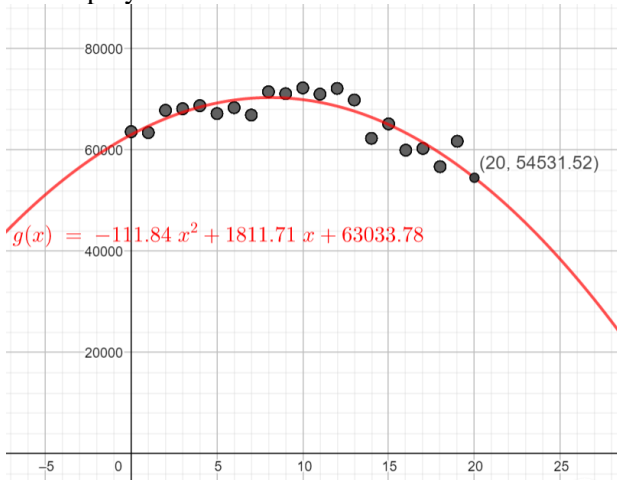
Mehiläispopulaation suuruus on mallin mukaan 0 kuvaajan ja x -akselin leikkauspisteissä $(2,899; 0)$ ja $(9,245; 0)$.

Hetki $x = 3$ vastaa maaliskuun alkua, joten hetki $x = 2,899$ on helmikuun loppupuolella.

Hetki $x = 9$ vastaa syyskuun alkua, joten hetki $x = 9,245$ on syyskuun alkupuolella

Vastaus: Helmikuun loppupuolella ja syyskuun , 0.

138. Valitaan muuttujaksi x aika vuosina vuodesta 2000 mallinnuksen helpottamiseksi. Sovittamalla pisteisiin eri asteisia polynomifunktioita huomataan, että 2. ja 3. asteen polynomit antavat melko samanlaiset ja aineistoon sopivan käyrän. Korkeamman asteen käyrät muuttuvat epäuskottavan jyrkästi pistejoukon ulkopuolella. Valitaan esimerkiksi 2. asteen polynomi.

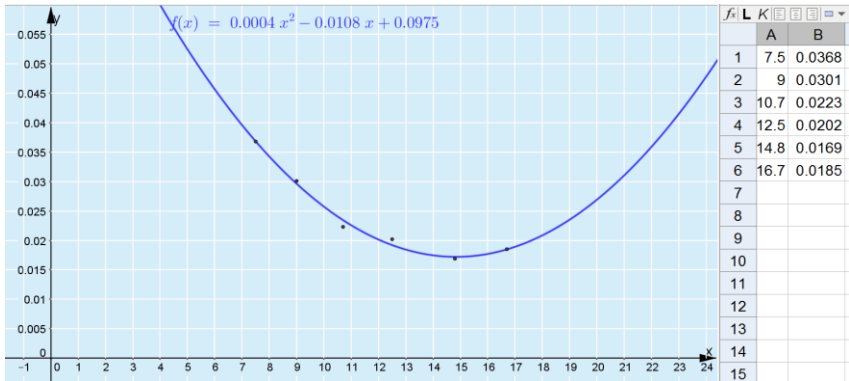


Toisen asteen malliksi saadaan $g(x) = -111,84x^2 + 1811,71x + 63033,78$.

Malli antaa ennusteeksi esimerkiksi vuoden 2020 suoritettujen ajokokeiden määräksi 54 531, joka on liian alhainen todelliselle lukumäärälle, joka on yli 60 000.

Vastaus: esim. $f(x) = -111,84x^2 + 1811,71x + 63033,78$, malli antaa ennusteeksi esimerkiksi vuoden 2020 suoritettujen ajokokeiden määräksi 54 531, joka on liian alhainen todelliselle lukumäärälle, joka on yli 60 000.

139. Sovitetaan pisteisiin 2. asteen polynomifunktio.

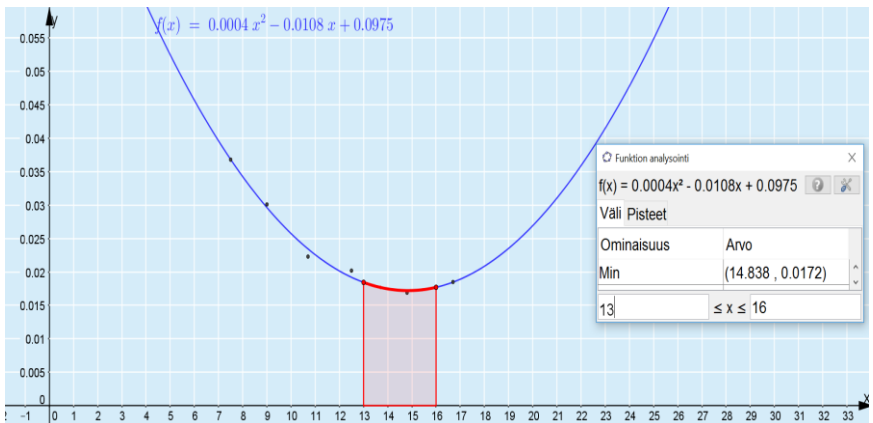


Funktioksi saadaan $f(x) = 0,0004x^2 - 0,0108x + 0,0975$.

Tilavuus on tiheydelle käänteinen suure, joten suurin tilavuus saavutetaan pienimmällä tiheydellä.

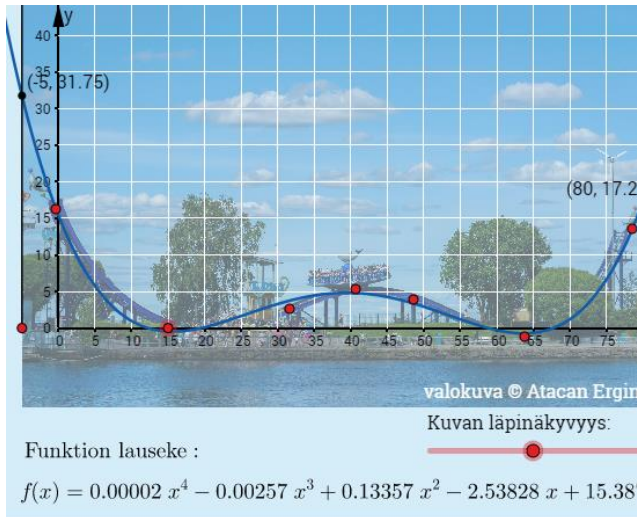
Funktion analysointitoiminnolla havaitaan, että funktion pienin arvo saavutetaan, kun $x = 14,838 \approx 14,8$.

Siis suurin tilavuus on vesipitoisuudella 14,8 %



Vastaus: $f(x) = 0,0004x^2 - 0,0108x + 0,0975$, 14,8 %

140. Siirtämällä punaisia pisteitä sopiviin radan kohtiin saadaan käyrä, joka noudattaa suurin piirtein radan profiilia.



- a) Radan päätepisteet ovat mallin mukaan pisteissä $(0; 15,38)$ ja $(80; 17,2)$, joten mallin mukaan radan suurin korkeus maanpinnasta on noin 16 m.

Vastaus: esim. 16 m

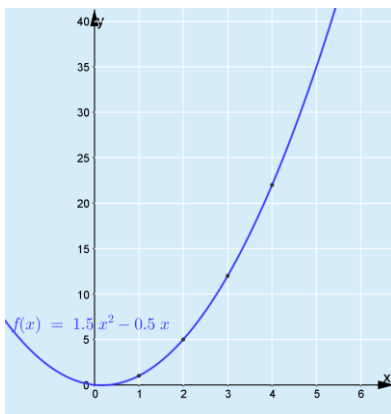
- b) Mallin avulla voi arvioida, että vaunu käy maanpinnan tasolla noin 15 metrin ja 62 metrin päässä radan vasemmasta reunasta katsoen.

Vastaus: esim. 15 metrin ja 62 metrin päässä radan vasemmasta reunasta katsoen

141. Muodostetaan taulukko.

Kuvion järjestysnumero n	Pisteiden lukumäärä
1	1
2	5
3	12
4	22
5	35

Sovitetaan pisteisiin sopiva polynomifunktio kokeilemalla.



Huomataan, että 2. asteen funktio $f(x) = 1,5x^2 - 0,5x$ näyttäisi sopivan pisteisiin hyvin. Tarkistetaan laskemalla antaako funktio täsmälleen oikeat pisteiden lukumäärät.

x	$f(x) = 1,5x^2 - 0,5x$
1	$1,5 \cdot 1^2 - 0,5 \cdot 1 = 1$
2	$1,5 \cdot 2^2 - 0,5 \cdot 2 = 5$
3	$1,5 \cdot 3^2 - 0,5 \cdot 3 = 12$
4	$1,5 \cdot 4^2 - 0,5 \cdot 4 = 22$
5	$1,5 \cdot 5^2 - 0,5 \cdot 5 = 35$

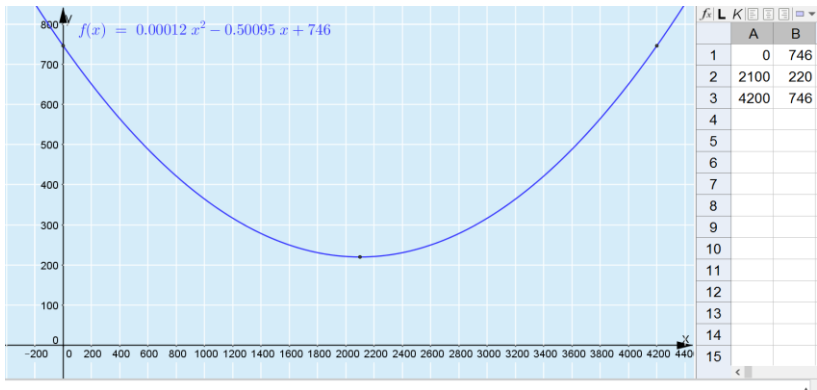
Koska funktio antaa oikeat arvot, näyttää siltä, että kuviojonon pisteiden lukumäärä voidaan laskea funktiolla f . Kuvion 15. jäsenen pisteiden lukumäärä on täten $f(15) = 1,5 \cdot 15^2 - 0,5 \cdot 15 = 330$.

Vastaus: $f(x) = 1,5x^2 - 0,5x$, 330

142. Merkitään kirjaimella y vaijerien korkeutta merenpinnasta x metrin päässä toisesta tornista. Valitaan pituuden yksiköksi jalka.

Pisteet (x, y) muodostavat paraabelin, jolla pisteet $(0, 746)$ ja $(4200, 746)$ annettujen tietojen perusteella ovat. Tornien puolessavälissä vaijerin korkeus on 220 jalkaa, ja sen etäisyys tornista on $\frac{4200}{2} = 2100$ jalkaa, joten myös piste $(2100, 220)$ on paraabelilla.

Taulukoidaan paraabelin tunnettujen pisteiden koordinaatit, luodaan pistelista ja sovitetaan siihen toisen asteen polynomifunktion kuvaaja.



500 metriä on jalkoina $\frac{500}{0,305}$ jalkaa = 1639,344... jalkaa. Vaijerien

korkeus kysytyssä kohdassa saadaan laskemalla funktion $f(x) = 0,00012x^2 - 0,50095x + 746$ arvo kohdassa $x = 1639,344...$

Ohjelmalla saadaan $f(1639,344...) = 247,264... \approx 247,3$.

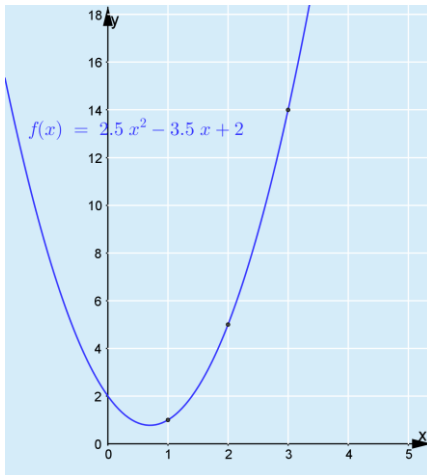
Vaijerien korkeus merenpinnasta on 247,3 jalkaa eli $247,3 \cdot 0,305 \text{ m} = 75,415... \text{ m} \approx 75 \text{ m}$.

Vastaus: 75 m:n korkeudella

143. Muodostetaan taulukko

Kuvion järjestysnumero x	Pallojen lukumäärä
1	1
2	5
3	14

Sovitetaan pisteisiin sopiva polynomifunktio kokeilemalla.



Huomataan, että 2. asteen funktio $f(x) = 2,5x^2 - 3,5x + 2$ näyttäisi sopivan pisteisiin hyvin. Tarkistetaan laskemalla antaako funktio täsmälleen oikeat pallojen lukumäärät.

x	$f(x) = 2,5x^2 - 3,5x + 2$
1	$2,5 \cdot 1^2 - 3,5 \cdot 1 + 2 = 1$
2	$2,5 \cdot 2^2 - 3,5 \cdot 2 + 2 = 5$
3	$2,5 \cdot 3^2 - 3,5 \cdot 3 + 2 = 14$

Koska funktio antaa oikeat arvot, näyttää siltä, että kuviojonon pisteiden lukumäärä voidaan laskea funktiolla f . Kuvion kerrosten määrä on yhtä suuri kuin kuvion järjestysnumero. Muodostetaan yhtälö pallojen määrän avulla ja ratkaistaan siitä x .

$$2,5x^2 - 3,5x + 2 = 838$$

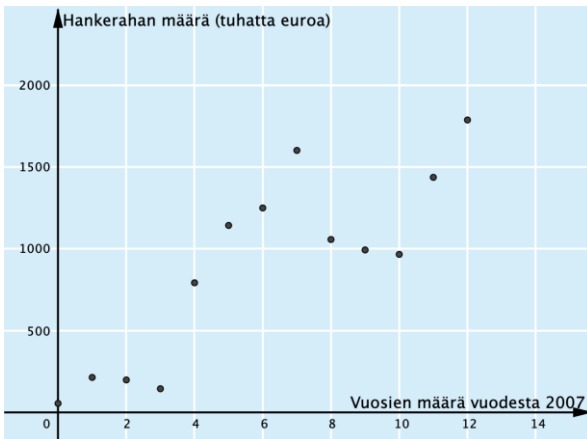
Symbolisen laskennan ohjelmalla saadaan yhtälön ratkaisuksi $x = -17$ tai $x = 19$. Vain positiivinen juuri kelpaa, joten 838 pallon rakennelmassa on 19 kerrosta.

Vastaus: $f(x) = 2,5x^2 - 3,5x + 2$, 19 kerrosta

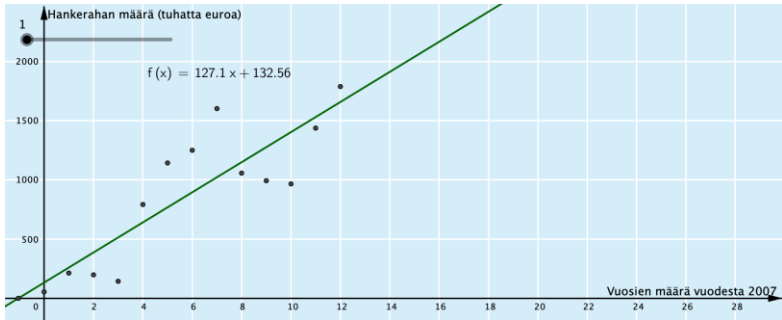
SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

144.

▼ Taulukkolaskenta			
	A	B	C
1	Vuosi	Vuosia vuodesta 2007	Hankerahan määrä (tuhatta euroa)
2	2007	0	54
3	2008	1	213
4	2009	2	198
5	2010	3	144
6	2011	4	792
7	2012	5	1143
8	2013	6	1250
9	2014	7	1602
10	2015	8	1057
11	2016	9	993
12	2017	10	966
13	2018	11	1437
14	2019	12	1788

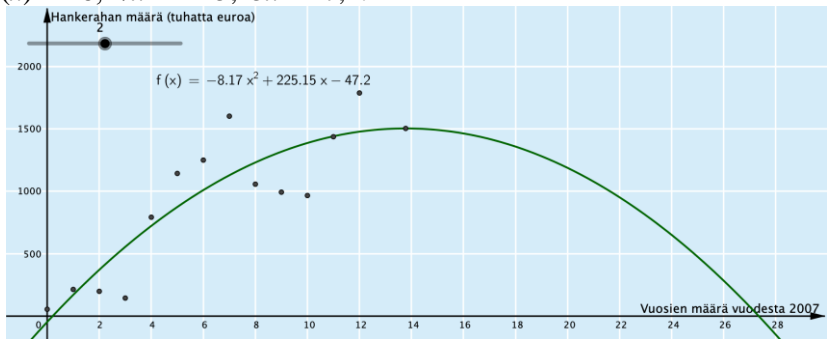


Sovitetaan pistejoukkoon 1., 2. ja 3. asteen polynomit. Kun asteluvuksi valitaan 1, kuvaaja on suora ja sen yhtälö on $y = 127,1x - 132,56$.



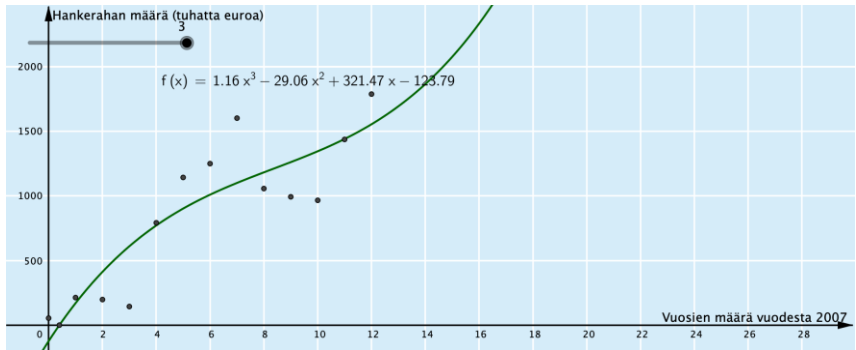
Asteluvulla 2 kuvaajasta tulee paraabeli, jonka huippu on noin hetkellä $x = 14$ eli vuoden $2007 + 14 = 2021$ kohdalla. Sen jälkeen hankerahoituksen määrä vähenee. Malli ennustaa hankerahoituksen loppuvan noin hetkellä $x = 27$ eli vuonna $2007 + 27 = 2034$. Funktio on

$$f(x) = -8,17x^2 + 225,15x - 47,2.$$



Asteluvulla 3 kuvaaja kasvaa voimakkaammin kuin ensimmäisen asteen malli. Funktio on

$$f(x) = 1,16x^3 - 29,06x^2 + 321,47x - 123,79.$$



Vastaus:

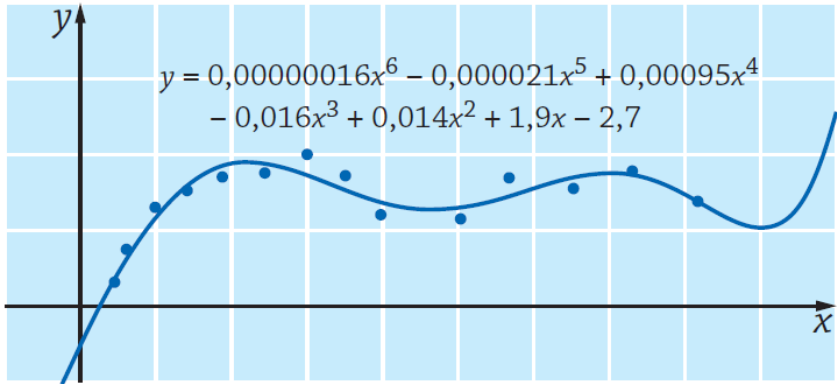
$$f(x) = 127,1x - 132,56;$$

$$f(x) = -8,17x^2 + 225,15x - 47,2;$$

$$f(x) = 1,16x^3 - 29,06x^2 + 321,47x - 123,79.$$

Asteluvulla 1 rahoitus kasvaa melko tasaisesti. Asteluvulla 2 rahoitus loppuu vuonna 2034. Asteluvulla 3 rahoitus kasvaa voimakkaammin, kuin asteluvun 1 mallilla.

145.



a) Havaitaan, että malli noudattaa pistejoukkoa melko hyvin, mutta poikkeaa joissain kohdissa pistejoukon pisteistä.

Vastaus: Malli noudattaa pistejoukkoa melko hyvin, mutta poikkeaa joissain kohdissa pistejoukon pisteistä.

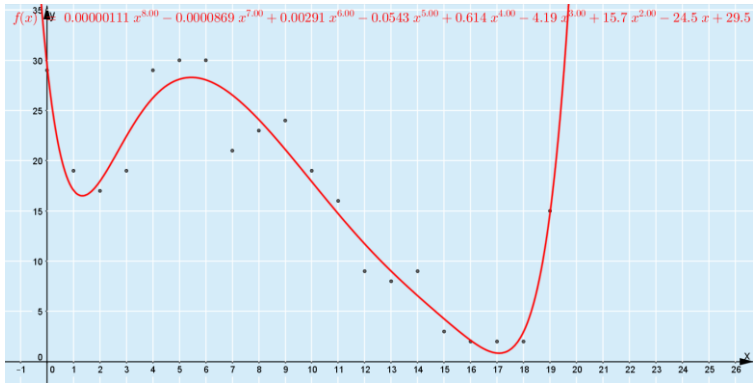
b) Havaitaan, että mallin antamat arvot pienenevät jopa negatiivisiin arvoihin pistejoukon vasemmalla puolella ja kasvavat hyvin voimakkaasti pistejoukon oikealla puolella.

Vastaus: Mallin antamat arvot pienenevät jopa negatiivisiin arvoihin pistejoukon vasemmalla puolella ja kasvavat hyvin voimakkaasti pistejoukon oikealla puolella.

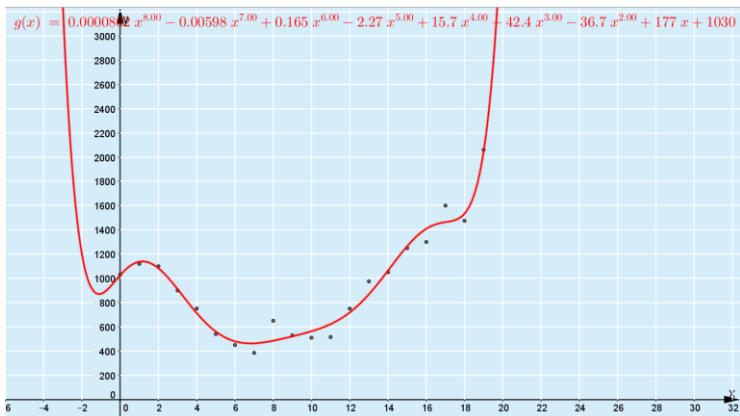
c) Mitä korkeampaa astetta polynomi on sitä herkemmin polynomin arvo muuttuu muuttujan arvon muuttuessa. Tästä johtuen Ennustavuus on usein huono.

Vastaus: Mitä korkeampaa astetta polynomi on sitä herkemmin polynomin arvo muuttuu muuttujan arvon muuttuessa. Ennustavuus on usein huono.

146. a) Valitaan muuttujaksi x vuodesta 2000 kulunut aika. Sovitetaan susien havaintoaineistoon asteluvultaan 1–8 olevat polynomifunktiot. Huomataan, että 8. asteen polynomifunktio kuvaa tilannetta tarkimmin.

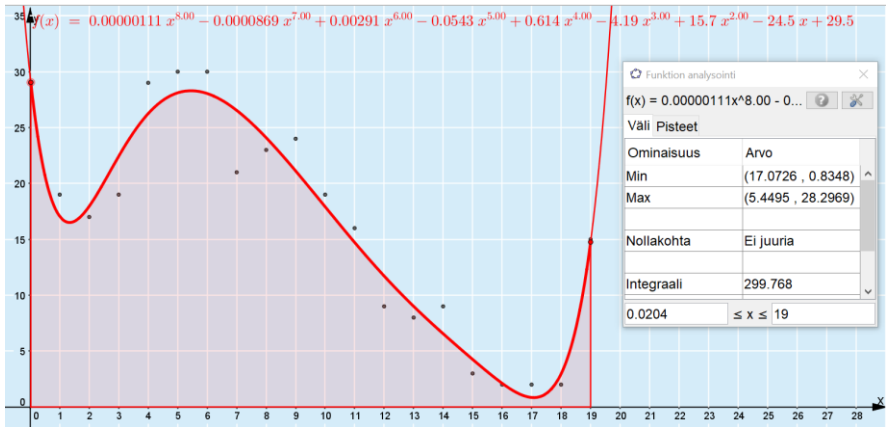


Sovitetaan vastaavasti hirvien määrän aineistoon polynomifunktioita. Tässäkin tapauksessa 8. asteen polynomifunktio kuvaa tilannetta tarkimmin.

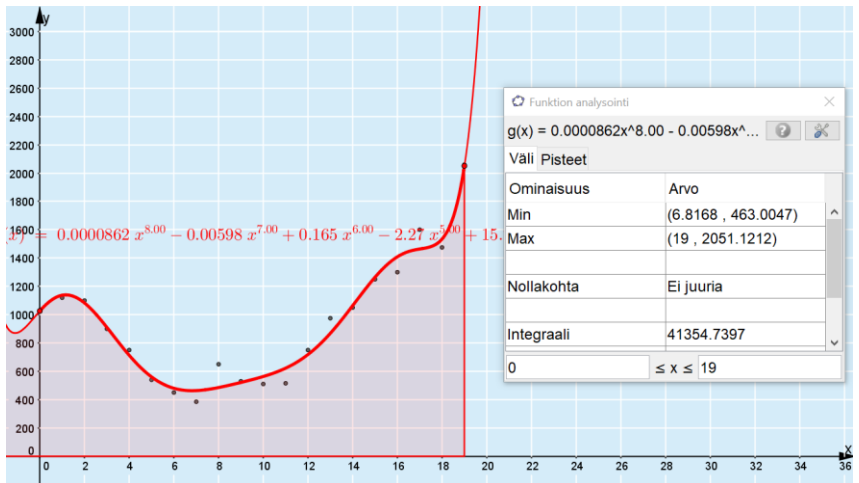


Vastaus: 8. asteen polynomifunktio

- b) Huomataan funktion lausekkeesta ja analysointitoiminnolla, että mallin mukaan susien suurin määrä on noin 29 tarkastelun alussa vuonna 2000 ja vuonna $2000 + 5 = 2005$. Mallin mukaan susien pienin määrä on noin 1 vuonna $2000 + 17 = 2017$.



Huomataan, että mallin mukaan hirvien suurin määrä on 2051 vuonna $2000 + 19 = 2019$. Mallin mukaan hirvien pienin arvo on 463 vuonna $2000 + 6 = 2006$.

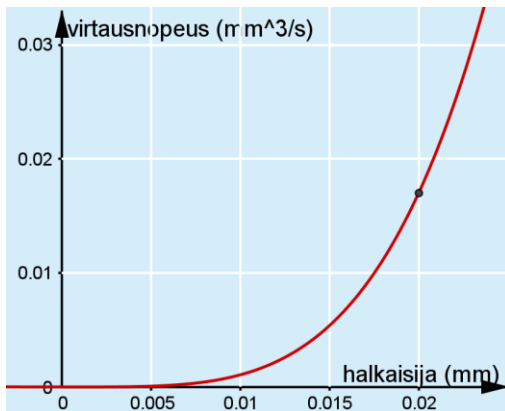


Huomataan, että eläinten määrien huiput seuraavat suurin piirtein toisiaan. Kun hirvien määrä kasvaa, susienkin määrä kasvaa, koska susilla on enemmän saalista. Susien määrän kasvaessa hirvien määrä vähenee, koska niitä saalistetaan enemmän. Kun hirvien määrä vähenee, susienkin määrä vähenee, koska saalistettavaa on vähemmän jne.

Vastaus: Susien suurin määrä 29, saavutettiin vuosina 2000 ja 2005, pienin määrä 1, saavutettiin vuonna 2017. Hirvien suurin määrä 2051, saavutettiin vuonna 2019, pienin määrä 463, saavutettiin vuonna 2006.

147. Videossa <https://vimeo.com/210764751/bd5424e1da> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

- a) Muuttuja x on verisuonen halkaisija ja funktion f arvo virtausnopeus. Annettujen tietojen perusteella piste $(0,020; 0,017)$ on funktion f kuvaajalla. Sovitetaan pisteeseen neljännen asteen potenssifunktion kuvaaja.



Ohjelma antaa funktion lausekkeeksi $f(x) = 106\,250x^4$.

Vastaus: $f(x) = 106\,250x^4$

- b) Kuvaajan perusteella virtaus näyttäisi moninkertaistuvan halkaisijan kaksinkertaistuessa. Selvitetään tarkka tulos laskemalla kirjaimilla. Jos d on verisuonen halkaisija, niin siihen nähden kaksinkertainen halkaisija on $2d$. Lasketaan funktion f arvo molemmissa tapauksissa ja verrataan tuloksia.

$$f(d) = ad^4$$

$$f(2d) = a \cdot (2d)^4 = a \cdot 2^4 d^4 = 16ad^4$$

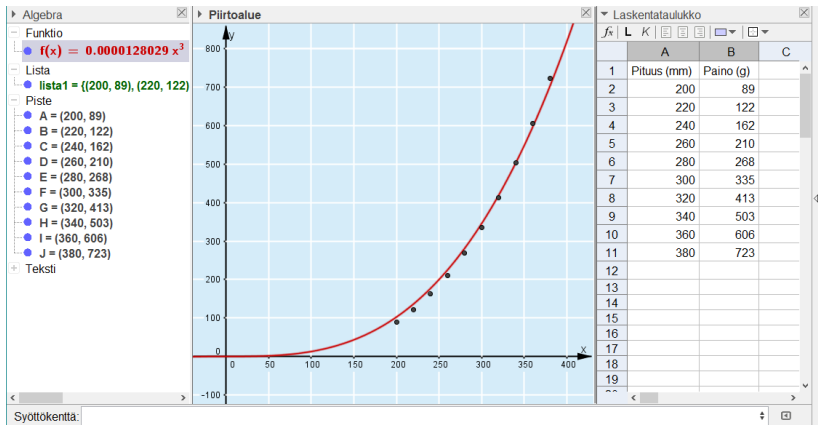
Jälkimmäinen arvo on 16-kertainen edelliseen verrattuna, joten verisuonen halkaisijan kaksinkertaistuessa veren virtausnopeus 16-kertaistuu.

Vastaus: 16-kertaistuu

148. Videossa <https://vimeo.com/210764761/d3afd4ded5> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Sovitetaan pisteisiin muotoa ax^3 oleva funktio.

Sovita[lista1, {x^3}]



Muodostuu funktio $f(x) = 0,0000128029x^3$, joka näyttää sopivan pisteisiin erittäin hyvin. Funktio ilmaisee, että ahvenen massa on suoraan verrannollinen ahvenen piteuden kolmanteen potenssiin.

Näiden mittaustulosten perusteella näyttää siltä, että ahvenet ovat hyvin lähellä yhdenmuotoisia, koska geometrian kurssissa opittiin, että paino on suoraan verrannollinen tilavuuteen ja tilavuus on suoraan verrannollinen piteuden kolmanteen potenssiin.

Vastaus: $f(x) = 0,000\ 012\ 802\ 9x^3$, näyttää