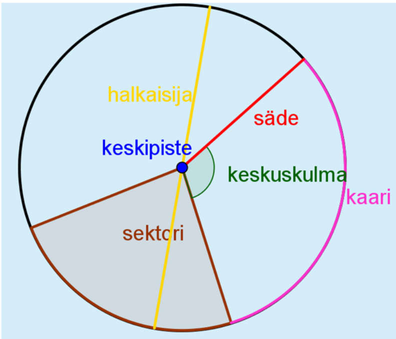
3 Ympyrä

3.1 Ympyrään liittyviä pituuksia ja kulmia

ALOITA PERUSTEISTA

301. Vastaus:



302. **a)** Ympyrän halkaisija $d = 4{,}6$ m.

Ympyrän kehän pituus on
$p = \pi d = \pi \cdot 4{,}6 \text{ m} = 14{,}451\ldots \text{ m} \approx 14 \text{ m}.$

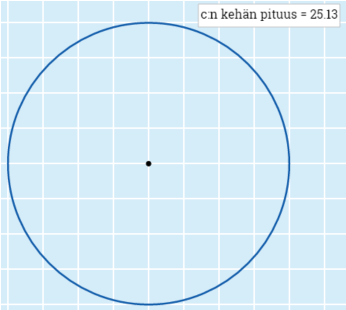
Vastaus: 14 m

b) Ympyrän säde $r = 3{,}45$ cm.

Ympyrän kehän pituus on $p = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}45 \text{ cm}$
$= 21{,}676\ldots \text{ cm} \approx 21{,}7 \text{ cm}.$

Vastaus: 21,7 cm

303. Videossa näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista appletin avulla.



Vastaus: kehän pituus 25,13

304. **a)** Ympyrän säde r = 4,9 dm ja sektorin keskuskulma α = 35°.

Kaaren pituus on

$$b = \frac{35°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 4{,}9 \text{ dm} = 2{,}993... \text{ dm} \approx 3{,}0 \text{ dm}.$$

Vastaus: $b \approx 3{,}0$ dm

b) Ympyrän säde r = 2,4 cm ja sektorin keskuskulma α = 90°.

Kaaren pituus on

$$b = \frac{90°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2{,}4 \text{ cm} = 3{,}769... \text{ cm} \approx 3{,}8 \text{ cm}.$$

Vastaus: $b \approx 3{,}8$ cm

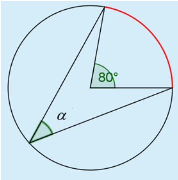
c) Ympyrän säde r = 2,8 cm ja sektorin keskuskulma
α = 360° – 220° = 140°.

Kaaren pituus on

$$b = \frac{140°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2{,}8 \text{ cm} = 6{,}841... \text{ cm} \approx 6{,}8 \text{ cm}.$$

Vastaus: $b \approx 6{,}8$ cm

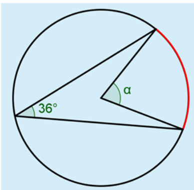
305. **a)** Kehäkulma α ja 80°:n keskuskulma vastaavat samaa kaarta.



Kehäkulma on puolet keskuskulman suuruudesta,
joten $\alpha = \dfrac{80°}{2} = 40°$.

Vastaus: $\alpha = 40°$

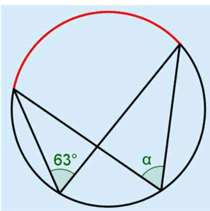
b) Keskuskulma α ja 36°:n kehäkulma vastaavat samaa kaarta.



Keskuskulman suuruus on kaksinkertainen kehäkulmaan verrattuna,
joten $\alpha = 2 \cdot 36° = 72°$.

Vastaus: $\alpha = 72°$

c) Kehäkulma α ja 63°:n kehäkulma vastaavat samaa kaarta.



Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret, joten $\alpha = 63°$.

Vastaus: $\alpha = 63°$

306. Puun ympärysmitta eli poikkileikkausympyrän kehän pituus on 865 cm.

Muodostetaan yhtälö ympyrän kehän pituudelle ja ratkaistaan siitä halkaisija *d*.

$$\begin{aligned} \pi d &= 865 \quad \| :\pi \\ d &= 275{,}338... \\ d &\approx 275 \end{aligned}$$

Puun halkaisija olisi noin 275 cm.

Vastaus: 275 cm

307. **a)** Maastopyörän renkaan ulkohalkaisija on 29 · 2,54 cm = 73,66 cm

Renkaan kehän pituus on $p = \pi d$

$$\begin{aligned} &= \pi \cdot 73{,}66 \text{ cm} \\ &= 231{,}409\ldots \text{ cm} \\ &\approx 231 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Vastaus: 231 cm

b) 20 km = 20 000 m = 2 000 000 cm

Kahden kymmenen kilmoterin matkalla rengas pyörähtää

2 000 000 cm / 231,409 cm = 8642,679… ≈ 8600 kertaa.

Vastaus: 8600 kertaa

308. **a)** Merkitään puun poikkileikkausympyrän sädettä kirjaimella r.

Puun ympärysmitta 91 cm on poikkileikkausympyrän kehän pituus $2\pi r$.

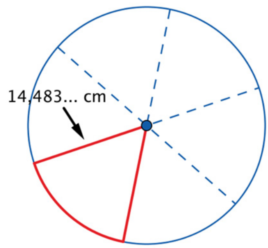
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde r.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 91 \qquad \| :2\pi \\ r &= \frac{91}{2\pi} \\ r &= 14,483... \\ r &\approx 14,5 \end{aligned}$$

Puun poikkileikkauksen säde on 14,5 cm.

Vastaus: 14,5 cm

b) Ympyrän muotoinen puukiekko jaetaan kuuteen yhtenevään sektoriin. Yhden koristeen reunustamiseen tarvitaan messinkilistaa sektorin kaaren pituuden ja kahden säteen verran.



Kohdassa a säteen pituudeksi saatin 14,483… cm.

Sektorin kaaren pituus on kuudesosa koko ympyrän kehän pituudesta

$$\frac{91\,\text{cm}}{6} = 15,166...\,\text{cm}.$$

Messinki listaa tarvitaan

$15,166…\text{ cm} + 2 \cdot 14,483…\text{ cm} = 44,132…\text{ cm} \approx 44\text{ cm}.$

Vastaus: 44 cm

VAHVISTA OSAAMISTA

309. Ympyrän kehän pituus $p = 2\pi r = 153$ mm.

Keskuskulma $\alpha = 129°$, joten kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r = \frac{129°}{360} \cdot 153 \text{ mm} = 54{,}825 \text{ mm} \approx 54{,}8 \text{ mm}.$$

Vastaus: $b \approx 54{,}8$ mm

310. **a)** Yhdeksäsosaympyrän kaaren pituus on $\frac{1}{9}$ ympyrän kehän pituudesta $2\pi r$. Ympyrän säde on 74 mm, joten kaaren pituus on

$b = \frac{1}{9} \cdot 2\pi \cdot 74 \text{ mm} = 51{,}661\ldots \text{ mm} \approx 52 \text{ mm}.$

Keskuskulman suuruus on $\frac{1}{9}$ täyskulman suuruudesta.

$\alpha = \frac{1}{9} \cdot 360° = 40°$

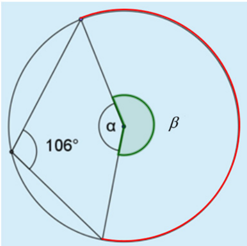
Vastaus: 52 mm, 40°

b) Ympyrän säde on 74 mm ja kaaren pituus 144 mm. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä keskuskulma α.

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r \\
144 &= \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 74 && \| \cdot 360° \\
144 \cdot 360° &= 148\pi \cdot \alpha && \| : 148\pi \\
\alpha &= \frac{144 \cdot 360°}{148\pi} \\
\alpha &= 111{,}494\ldots° \\
\alpha &\approx 110°
\end{aligned}$$

Vastaus: 110°

311. **a)** Merkitään isomman sektorin keskuskulmaa kirjaimella β.
Keskuskulma β ja 106°:n kehäkulma vastaavat samaa kaarta.



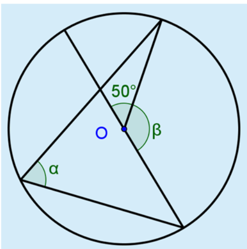
Keskuskulman suuruus on kaksinkertainen kehäkulman suuruuteen verrattuna, joten $\beta = 2 \cdot 106° = 212°$.

Kulmat α ja β muodostavat yhdessä täyskulman eli 360°:n kulman,

joten $\alpha = 360° - \beta = 360° - 212° = 148°$.

Vastaus: $\alpha = 148°$

b) Merkitään 50°:n kulman vieruskulmaa kirjaimella β.



Vieruskulmien summa on 180°, joten $\beta = 180° - 50° = 130°$.

Koska piste O on ympyrän keskipiste, kulma β on keskuskulma.
Kulmat α ja β vastaavat samaa kaarta, joten kehäkulma α on puolet keskuskulman β suuruudesta.

$$\alpha = \frac{130°}{2} = 65$$

Vastaus: $\alpha = 65$

312. **a)** Mopoauton renkaan ulkohalkaisija on 56 cm. Renkaan ympärysmitta on $p = \pi \cdot 56 \text{ cm} = 175{,}929 \ldots \text{ cm} \approx 176 \text{ cm}$.

Vastaus: 176 cm

b) Pyörähdysten lukumäärä saadaan jakamalla matka yhden kierroksen, eli renkaan kehän, pituudella.

Muutetaan matka samaan yksikköön kuin renkaan kehän pituus:
5,3 km = 5300 m = 530 000 cm.

Kierrosten lukumäärä on

$$\frac{530\,000 \text{ cm}}{175{,}929\ldots \text{ cm}} = 3012{,}575\ldots \approx 3000.$$

Vastaus: 3000 kierrosta

c) Mopoauto valuu alaspäin matkan, joka on 17°:n keskuskulmaa vastaava kaaren pituus.

$$b = \frac{17°}{360°} \cdot 175{,}929\ldots \text{ cm} = 8{,}307\ldots \text{ cm} \approx 8{,}3 \text{ cm} .$$

Mopoauto valuu alaspäin noin 8,3 cm.

Vastaus: 8,3 cm

313. Janan l pituus on $\sqrt{(4-(-3))^2+(-7-17)^2}=25.$.

a) Nyt $d=25$

Piiri:

$$p=\pi d=\pi\cdot 25=25\pi$$

Vastaus: 25π

b) Nyt $r=25$

Piiri:

$$p=2\pi r=2\pi\cdot 25=50\pi$$

Vastaus: 50π

c) Lasketaan a- ja b-kohdassa saatujen piirien suhde

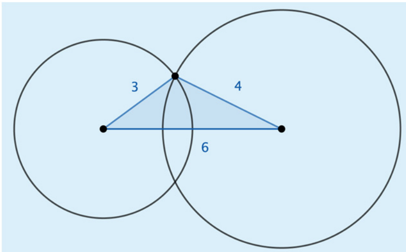
$$\frac{p_a}{p_b}=\frac{25\pi}{50\pi}=\frac{1}{2}$$

a-kohdan piiri on siis puolet b-kohdan piiristä.

Vastaus: $\frac{1}{2}$

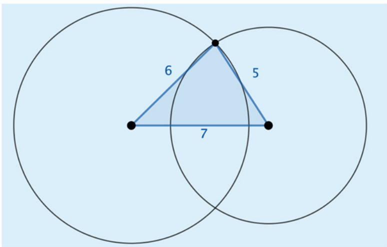
314. **a)** Videossa näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Vastaus:

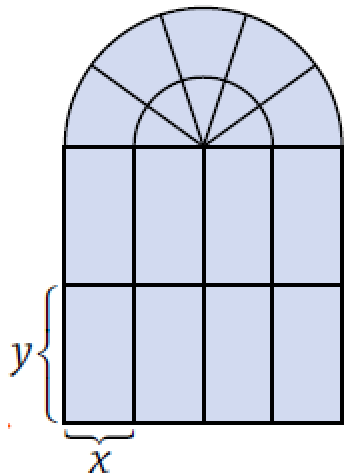


b) Videossa näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Vastaus:



315. Ikkunassa on kahdeksan suorakulmiota, joiden sivut ovat x ja y, sekä $2x$-säteinen puoliympyrä, joka on jaettu x-säteisen puoliympyrän kaarella kahteen osaan.



Rimojen pituudet ovat $x = 20$ cm ja $y = 40$ cm. Suorakulmioihin käytetään rimaa $10y + 12x = 10 \cdot 40 \text{ cm} + 12 \cdot 20 \text{ cm} = 640 \text{ cm}$.

Kaari-ikkunan vaakasuuntaisista säteistä kaksi on suorakulmioiden sivuina, joten kaariosan säteisiin tarvitaan rimaa

$4 \cdot 2x = 4 \cdot 2 \cdot 20 \text{ cm} = 160 \text{ cm}$.

Lasketaan lisäksi kahden puoliympyrän kaaren pituudet.
Pienemmän, x-säteisen, puoliympyrän kaaren

pituus on $\dfrac{2 \cdot \pi \cdot 20 \text{ cm}}{2} = 62{,}831\ldots \text{cm}$.

Isomman, $2x$-säteisen, puoliympyrän kaaren pituus on

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 20 \text{ cm}}{2} = 125{,}663\ldots \text{cm}.$$

Rimaa tarvitaan yhteensä

$$640 \text{ cm} + 160 \text{ cm} + 62{,}831\ldots \text{ cm} + 125{,}663\ldots \text{ cm} = 988{,}495\ldots \text{ cm} \approx 988 \text{ cm}.$$

Vastaus: 988 cm

316. Juomatölkin halkaisija on 6,5 cm, joten sen ympärysmitta on
$p = \pi \cdot 6{,}5 \text{ cm} = 20{,}420\ldots \text{ cm}$.

Tölkin ympärille kirjoitetaan teksti, jossa on 50 merkkiä.
Lasketaan, kuinka leveä yksi merkki saa korkeintaan olla.

$$\frac{p}{50} = \frac{20{,}420\ldots \text{ cm}}{50} = 0{,}408\ldots \text{ cm}$$

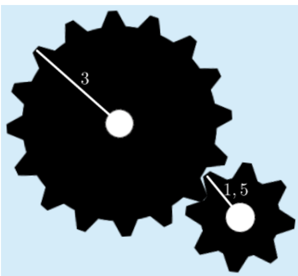
Yksi pt on 0,376 mm eli 0,0376 cm, joten merkin suurin mahdollinen leveys yksikössä pt on

$$\frac{0{,}4084\ldots \text{ cm}}{0{,}0376 \text{ cm}} = 10{,}861\ldots$$

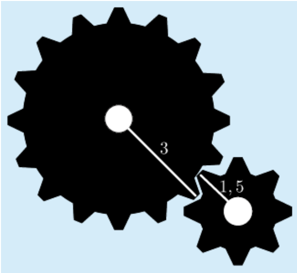
Suurin fonttikoko on 10 pt.

Vastaus: 10 pt

317. **a)** Kierretään pienempää ratasta kokonainen kierros.
Isompi ratas kiertyy tällöin noin puoli kierrosta.



Kierretään pienempää ratasta vielä toinen kierros.
Isompi ratas kiertyy toiset puoli kierrosta.



Kun pientä ratasta kierrettiin kaksi kierrosta, iso ratas kiertyi kokonaisen kierroksen.

Vastaus: 2 kierrosta

b) Isomman rattaan säde on 7,2 cm ja pienemmän rattaan 2,4 cm.

Isomman rattaan yksittäinen hammas kulkee yhdessä ison rattaan pyörähdyksessä ison rattaan ympärysmitan 2π · 7,2 cm verran.

Pienemmän rattaan yksittäinen hammas kulkee yhdessä pienemmän rattaan pyörähdyksessä pienemmän rattaan ympärysmitan 2π · 2,4 cm verran.

Kun rattaat pyörivät yhdessä, niin jokainen hammas kulkee yhtä pitkän matkan. Ison rattaan pyörähtäessä kerran pieni ratas pyörähtää kierrosmäärän, jota merkitään kirjaimella x.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kierrosten määrä x.

$$
\begin{aligned}
2\pi \cdot 7{,}2 &= x \cdot 2\pi \cdot 2{,}4 \quad \| : 2\pi \cdot 2{,}4 \\
x &= \frac{{}^{1}\cancel{2\pi} \cdot 7{,}2}{{}^{1}\cancel{2\pi} \cdot 2{,}4} \\
x &= \frac{7{,}2}{2{,}4} \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Pieni ratas pyörähtää 3 kierrosta.

(Pienemmän rattaan kierrosten lukumäärä saadaan siis jakamalla isomman rattaan kehän pituus pienemmän rattaan kehän pituudella, tai vielä lyhyemmin jakamalla isomman rattaan säde pienemmän rattaan säteellä.)

Vastaus: 3 kierrosta

318. **a)** Merkitään maapallon sädettä kirjaimella *R*. Muodostetaan yhtälö maapallon ympärysmitalle ja ratkaistaan siitä säde *R*.

$$\begin{aligned} 2\pi R &= 40\,000 \quad \| :2\pi \\ R &= \frac{40\,000}{2\pi} \\ R &= 6366{,}197... \end{aligned}$$

Jos köysi nostettaisiin 1,0 metrin eli 0,0010 kilometrin korkeudelle maasta, olisi ympyrän säde

6366,197… km + 0,0010 km = 6366,198… km.

Tällöin köyttä olisi 2π · 6366,198… km = 40 000,006 283… km, joten sitä tarvittaisiin lisää 0,006 283… km = 6,283… m ≈ 6,3 m.

Vastaus: 6,3 m.

b) Pallon ympärille kierretyn köyden pituus on 2π · 1,00 m = 6,283… m.

Jos köysi nostettaisiin metrin korkeudelle pallosta, köyden muodostaman ympyrän uusi säde olisi 1,00 m + 1,00 m = 2,00 m.

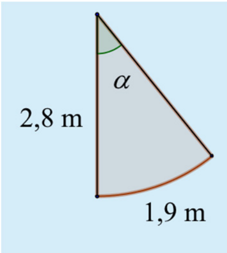
Tällöin köyden pituuden pitäisi olla 2π · 2,00 m = 12,566… m.

Köyttä tarvittaisiin lisää 12,566…m – 6,283… m = 6,283… m ≈ 6,3 m.

Vastaus: 6,3 m.

319. **a)** Keinu liikkuu pitkin ympyräkaarta, jonka säde on ketjun pituus 2,8 m ja jonka keskipiste on ketjun kiinnityskohta.

Piirretään mallikuva ja merkitään kiertymiskulmaa kirjaimella α.



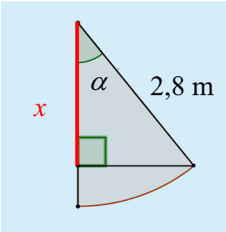
Muodostetaan yhtälö kaaren pituuden kaavan avulla ja ratkaistaan siitä kulma α.

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r \\
1{,}9 &= \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2{,}8 && \| \cdot 360° \\
684° &= \alpha \cdot 5{,}6\pi && \| : 5{,}6\pi \\
\alpha &= 38{,}879...° \\
\alpha &\approx 39°
\end{aligned}
$$

Keinu kiertyi noin 39°.

Vastaus: 39°

b) Piirretään mallikuva ja merkitään keinun pystysuoraa etäisyyttä kiinnityspisteestä kirjaimella x.



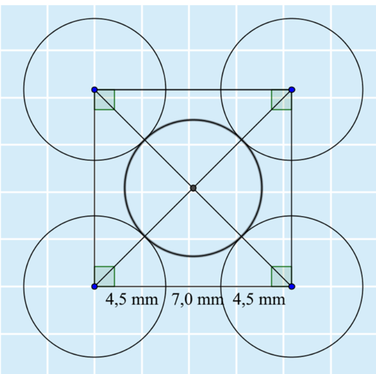
Etäisyys x on suorakulmaisen kolmion kateetti ja ketju suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. Edellisen kohdan mukaan kiertymiskulma $\alpha = 39{,}879\ldots°$, joten etäisyys x saadaan kosinin avulla.

$$\cos 39{,}879...° = \frac{x}{2{,}8} \quad \| \cdot 2{,}8$$
$$x = 2{,}8 \cdot \cos 39{,}879...°$$
$$x = 2{,}179...$$

Keinun korkeus lähtötasosta on säteen ja janan x pituuksien erotus.
2,8 m – 2,179… m = 0,620… m ≈ 0,62 m = 62 cm.

Vastaus: 62 cm

320. Piirretään mallikuva, johon on merkitty annetut mitat.



Legokukka sopii vielä paikoilleen, jos kukan varsi sivuaa legopalikan renkaita. Kuvasta havaitaan, että legopalikan renkaiden keskipisteet muodostavat neliön, jonka sivun pituus on

4,5 mm + 7,0 mm + 4,5 mm = 16,0 mm.

Kukan varren halkaisija saadaan, kun neliön lävistäjän pituudesta vähennetään legopalikan kahden renkaan säteiden pituudet.

Merkitään neliön lävistäjän pituutta kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 16^2 + 16^2$$
$$x^2 = 512$$
$$x = \sqrt{512} \text{ tai } x = -\sqrt{512}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$x = \sqrt{512} = 22{,}627\ldots$$

Legokukan varren halkaisijan pituus saadaan vähentämällä neliön lävistäjän x pituudesta legopalikan kahden renkaan säteen pituudet.

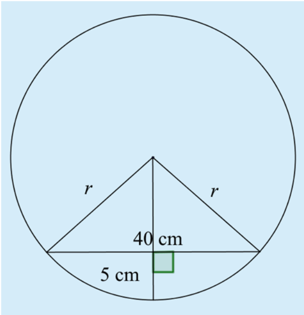
22,627… mm – 2 · 4,5 mm = 13,627… mm ≈ 13,6 mm

Legokukan varren halkaisija on noin 13,6 mm.

Vastaus: 13,6 mm

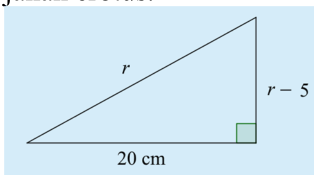
SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

321. Täydennetään kuva ympyräksi ja merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r*.



Tarkastellaan kuvaan muodostunutta suorakulmaista kolmiota. Kolmion vaakasuuntainen kateetti on jänteen puolikas, 20 cm, ja hypotenuusa *r*.

Kolmion pystysuuntainen kateetti on säteen *r* ja 5 cm:n pituisen janan erotus.



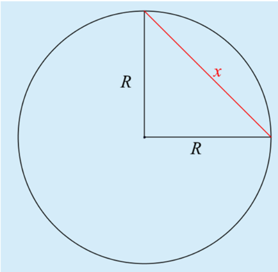
Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$
\begin{aligned}
r^2 &= 20^2 + (r-5)^2 \\
r^2 &= 400 + (r-5)(r-5) \\
r^2 &= 400 + r^2 - 5r - 5r + 25 \\
r^2 &= 425 + r^2 - 10r \\
0 &= r^2 - r^2 - 10r + 425 \\
10r &= 425 \quad \| :10 \\
r &= 42{,}5
\end{aligned}
$$

Ruukun säde on 42,5 cm ≈ 43 cm.

Vastaus: 43 cm.

322. **a)** Piirretään mallikuva ja merkitään päiväntasaajan ja pohjoisnavan yhdistävän tunnelin pituutta kirjaimella x.



Päiväntasaajan ja pohjoisnavan välinen etäisyys maata pitkin on 10 000 km ja maapallon ympärysmitta 40 000 km.

Kaaren pituus on siis

$\dfrac{10000}{40000}^{(10000} = \dfrac{1}{4}$ koko ympyrän kehän pituudesta.

Keskuskulman suuruus on siten $\dfrac{1}{4} \cdot 360° = 90°$.

Jana x sekä maapallon säteet R muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Janan x pituuden laskemista varten tarvitaan säteen R pituus.

Muodostetaan yhtälö maapallon ympärysmitalle ja ratkaistaan siitä säde R.

$$\begin{aligned} 2\pi R &= 40000 \quad \|: 2\pi \\ R &= 6366{,}197... \end{aligned}$$

Janan x pituus saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = R^2 + R^2$$
$$x^2 = 2R^2$$
$$x^2 = 2 \cdot 6366{,}197\ldots^2$$
$$x^2 = 81\ 056\ 946{,}913\ldots$$
$$x = \sqrt{81\ 056\ 946{,}913\ldots} \text{ tai } x = -\sqrt{81\ 056\ 946{,}913\ldots}$$

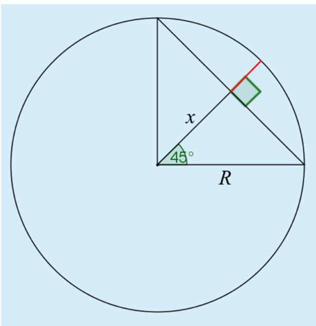
Jana pituus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$x = 9003{,}163\ldots$$
$$x \approx 9000$$

Tunneli olisi noin 9000 km pitkä.

Vastaus: 9000 km

b) Piirretään mallikuva ja merkitään tunnelin syvimmän kohdan etäisyyttä maapallon keskipisteestä kirjaimella x.



Jana x, tunnelin puolikas ja maapallon säde R muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Jana x on 45°:n kulman viereinen sivu ja säde R on hypotenuusa, joten ratkaistaan janan x pituus kosinin avulla.

$$\begin{aligned}
\cos 45° &= \frac{x}{R} \qquad \| \cdot R \\
R \cdot \cos 45° &= x \\
x &= R \cdot \cos 45° \\
x &= 6366{,}197... \cdot \cos 45° \\
x &= 4501{,}581...
\end{aligned}$$

Tunnelin syvimmän kohdan etäisyys maanpinnalta on säteen R ja janan x erotus.

6366,197… km – 4501,581… km = 1864,616… km ≈ 1900 km.

Tunnelin syvin kohta olisi noin 1900 km syvyydessä.

Vastaus: 1900 km

323. **a)** Ympyrän, jonka säde on 1, kehän pituus on

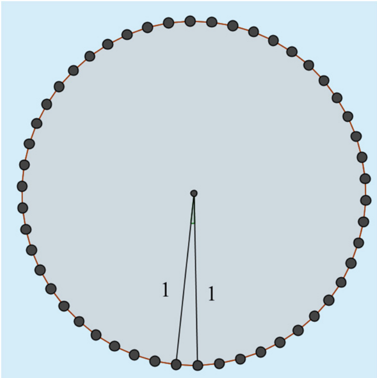
$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi = 6{,}283...$

Kehän pituuden suhde halkaisijaan on

$$\frac{2\pi}{2} = \pi = 3{,}141...$$

Vastaus: 2π, suhde π

b) Säännöllinen 50-kolmio koostuu 50:stä tasakylkisestä kolmiosta.



Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on puolet 50-kulmion pisimmän

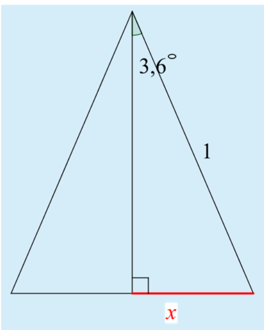
lävistäjän pituudesta, eli $\frac{2}{2} = 1$.

Kolmion huippukulma on $\frac{1}{50}$ täyskulmasta, eli $\frac{360°}{50} = 7{,}2°$. $= 7{,}2°$.

Säännöllisen 50-kulmion piiri on tasakylkisten kolmioiden kantojen summa. Ratkaistaan ensin tasakylkisen kolmion kannan pituus.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa sekä huippukulman että kannan, jolloin syntyy kaksi yhtenevää suorakulmaista kolmiota.

Merkitään kannan puolikasta kirjaimella x.



Huippukulman puolikkaan vastainen kateetti on x ja hypotenuusa on 1. Ratkaistaan x sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 3,6° &= \frac{x}{1}\\ \sin 3,6° &= x\\ x &= \sin 3,6°\\ x &= 0,0627...\end{aligned}$$

Tasakylkisen kolmion kannan pituus on

$2x = 2 \cdot 0{,}0627\ldots = 0{,}125\ldots$

Säännöllisessä 50-kulmiossa on 50 tasakylkistä kolmiota,
joten 50-kulmion piiri on

$p = 50 \cdot 2x = 50 \cdot 0{,}125\ldots = 6{,}279\ldots \approx 6{,}28.$

Piirin suhde pisimpään lävistäjään on

$$\frac{6,279...}{2} = 3,139... \approx 3,14.$$

Vastaus: 6,28, suhde 3,14

c) Säännöllisen 50-kulmion ja 1-säteisen ympyrän kehän pituus ovat likimain yhtä suuret. Ympyrän kehän pituutta voidaan siis arvioida monikulmion piirin avulla. Arvio on sitä parempi, mitä enemmän säännöllisessä monikulmiossa on kärkiä.

Ympyrän kehän pituuden suhde halkaisijaan on vakio π. Säännöllisen 50-kulmion piirin suhde halkaisijaan on likimain yhtä suuri.

Kasvatettaessa säännöllisen monikulmion kärkien lukumäärää monikulmion piirin suhde pisimpään lävistäjään lähestyy vakiota π.

Vastaus: Tulokset ovat likimain yhtä suuria. Kun säännöllisessä monikulmiossa on paljon kulmia, se muistuttaa ympyrää.

324. **a)** Ympyrän keskipiste on origo ja säde $r = 3$.

Ympyrän yhtälö on siten

$$x^2 + y^2 = 3^2$$
$$x^2 + y^2 = 9.$$

Vastaus: $x^2 + y^2 = 9$

b) Ympyrän keskipiste on origo ja kehän piste on (1, –1).
Ympyrän säde on näiden pisteiden välinen etäisyys.

$(x_1, y_1) = (0, 0)$
$(x_2, y_2) = (1, -1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2}$$
$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$$
$$r = \sqrt{2}$$

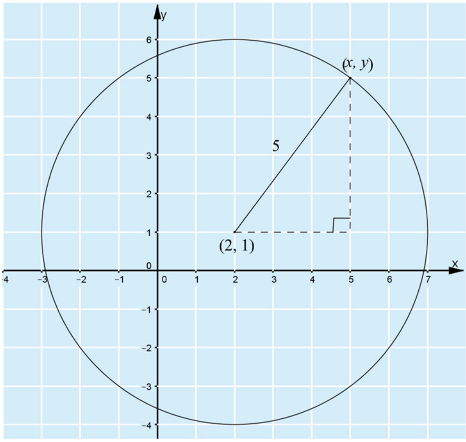
Ympyrän yhtälö on

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$x^2 + y^2 = 2$$

Vastaus: $x^2 + y^2 = 2$

c) Ympyrän keskipiste on (2, 1) ja säde $r = 5$.

Merkitään mielivaltaista ympyrän kehän pistettä koordinaateilla (x, y) ja piirretään tästä pisteestä pysty- ja vaakasuuntaiset janat siten, että saadaan suorakulmainen kolmio.



Huomataan, että ympyrän säde on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa. x-akselin suuntaisen kateetin pituuden neliö on $(x - 2)^2$ ja y-akselin suuntaisen kateetin pituuden neliö on $(y - 1)^2$.

Pythagoraan lauseen mukaan kateettien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan pituuden neliö, joten

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$
$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

Mikä tahansa ympyrän kehän piste (x, y) toteuttaa tämän yhtälön, joten yhtälö on kysytty ympyrän yhtälö.

Vastaus: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

3.2 Ympyrään liittyviä pinta-aloja

ALOITA PERUSTEISTA

325. **a)** Ympyrän säde $r = 3{,}6$ cm, joten ympyrän pinta-ala on

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (3{,}6\text{ cm})^2 = 40{,}715\ldots\text{ cm}^2 \approx 41\text{ cm}^2.$$

Vastaus: 41 cm^2

b) Ympyrän halkaisija $d = 67$ m, joten ympyrän säde on

$$r = \frac{67\text{ m}}{2} = 33{,}5\text{ m}.$$

Ympyrän pinta-ala on

$$A = \pi \cdot (33{,}5\text{ m})^2 = 3525{,}652\ldots\text{ m}^2 \approx 3500\text{ m}^2.$$

Vastaus: 3500 m^2

326. Sektorin keskuskulma saadaan, kun täysi kulma kerrotaan annetulla murtoluvulla.

A Puoliympyrää vastaava keskuskulma on $\frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Tätä vastaa vaihtoehto III.

B Neljännesympyrää vastaava keskuskulma on $\frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$.

Tätä vastaa vaihtoehto IV.

C Kymmenesosa ympyrää vastaava keskuskulma on $\frac{1}{10} \cdot 360° = 36°$.

Tätä vastaa vaihtoehto V.

D Viidesosa ympyrää vastaava keskuskulma on $\frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$.

Tätä vastaa vaihtoehto I.

E $\frac{2}{15}$ ympyrää vastaava keskuskulma on $\frac{2}{15} \cdot 360° = 48°$.

Tätä vastaa vaihtoehto II.

Vastaus: A: III, B: IV, C: V, D: I ja E: II

327. **a)** Ympyrän säde $r = 15$ m ja sektorin keskuskulma on 133°.

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{133°}{360°} \cdot \pi \cdot (15\,\text{m})^2 = 261{,}144...\,\text{m}^2 \approx 260\,\text{m}^2$$

Vastaus: 260 cm^2

b) Ympyrän säde $r = 38$ mm ja sektorin keskuskulma on
360° – 103° = 257°.

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{257°}{360°} \cdot \pi \cdot (38\,\text{mm})^2 = 3228{,}528...\,\text{mm}^2 \approx 3200\,\text{mm}^2$$

Vastaus: 3200 mm^2

328. **a)** Ympyrän säde $r = 4{,}56$ cm, joten ympyrän pinta-ala on
$A = \pi r^2 = \pi \cdot (4{,}56 \text{ cm})^2 = 65{,}325... \text{ cm}^2$.

Puoliympyrän pinta-ala on puolet ympyrän pinta-alasta.

$$A_{\text{puoliympyrä}} = \frac{65{,}325...\text{ cm}^2}{2} = 32{,}662...\text{ cm}^2 \approx 32{,}7\text{ cm}^2$$

Vastaus: 32,7 cm^2

b) Ympyrän säde r = 4,56 cm ja keskuskulma α = 56°.
Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{56°}{360°} \cdot \pi \cdot (4{,}56 \text{ cm})^2 = 10{,}161... \text{ cm}^2 \approx 10{,}2 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: 10,2 cm^2

329. **a)** Vesitornin poikkileikkausympyrän kehän pituus p = 204 m.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde r.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ 204 &= 2\pi r \quad \| :2\pi \\ r &= \frac{204}{2\pi} \\ r &= 32{,}467... \\ r &\approx 32{,}5 \end{aligned}$$

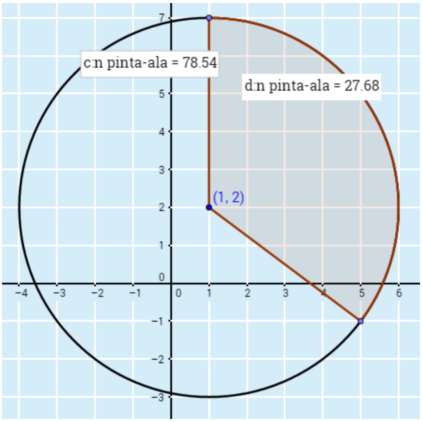
Vastaus: 32,5 m.

b) Tornin pohjan pinta-ala on

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (32{,}467\ldots \text{ m})^2 = 3311{,}696\ldots \text{ m}^2 \approx 3310 \text{ m}^2.$$

Vastaus: 3310 m^2

330. Videossa näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.



Vastaus: ympyrän pinta-ala 78,5 ja sektorin pinta-ala 27,7

331. Lasketaan sektorien keskuskulmien suuruudet kertomalla 360°:n kulma prosenttikertoimella:

Viljatuotteet, peruna: $0,29 \cdot 360° = 104,4° \approx 104°$
Kasvikset ym.: $0,35 \cdot 360° = 126°$
Liha ym.: $0,12 \cdot 360° = 43,2° \approx 43°$
Maitotuotteet: $0,15 \cdot 360° = 54°$
Rasvat, sokeriset tuotteet: $0,09 \cdot 360° = 32,4° \approx 32°$

Vastaus:

rasvat, sokeriset tuotteet	32°
liha, kala, kananmuna	43°
maitotuotteet	54°
viljatuottee, peruna	104°
kasvikset, hedelmät, vihannekset	126°

VAHVISTA OSAAMISTA

332. Sektorin pinta-ala on 34 m^2 ja säde on 4,6 m.

Merkitään keskuskulmaa kirjaimella α. Muodostetaan sektorin pinta-alan laskukaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä keskuskulma α.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\alpha}{360°}\cdot \pi r^2 \\
34 &= \frac{\alpha}{360°}\cdot \pi \cdot 4,6^2 && \| \cdot 360° \\
12240° &= \alpha \cdot \pi \cdot 21,16 && \| : 21,16 \\
\alpha \cdot \pi &= 578,449...° && \| : \pi \\
\alpha &= 184,126...° \\
\alpha &\approx 184°
\end{aligned}$$

Keskuskulma on noin 184°.

Vastaus: 184°

333. **a)** Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r. Muodostetaan yhtälö ympyrän pinta-alalle, kun pinta-ala on 4,67 cm^2.

Ratkaistaan yhtälöstä säde r.

$$\begin{aligned}
A &= \pi r^2 \\
4,67 &= \pi r^2 && \| : \pi \\
r^2 &= \frac{4,67}{\pi} \\
r^2 &= 1,486... \\
r &= \sqrt{1,486...} \text{ tai } r = -\sqrt{1,486...}
\end{aligned}$$

Säteen pituus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$r = \sqrt{1,486...} = 1,219... \approx 1,22$$

Ympyrän säde on noin 1,22 cm.

Vastaus: 1,22 cm

b) Sektorin pinta-ala on 1,2 m^2 ja sektorin keskuskulma on 41°.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r*.

Muodostetaan sektorin pinta-alan laskukaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\alpha}{360°}\cdot \pi r^2 \\
1{,}2 &= \frac{41°}{360°}\cdot \pi r^2 \quad \| \cdot 360° \\
41\pi r^2 &= 360°\cdot 1{,}2 \quad \| : 41\pi \\
r^2 &= \frac{432°}{41\pi} \\
r^2 &= 3{,}353... \\
r &= \sqrt{3{,}353...} \text{ tai } r = -\sqrt{3{,}353...}
\end{aligned}
$$

Säteen pituus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

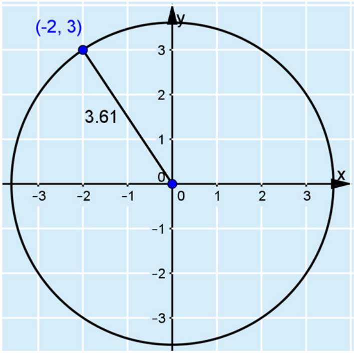
$$r = \sqrt{3{,}353...} = 1{,}831... \approx 1{,}8$$

Ympyrän säde on noin 1,8 m.

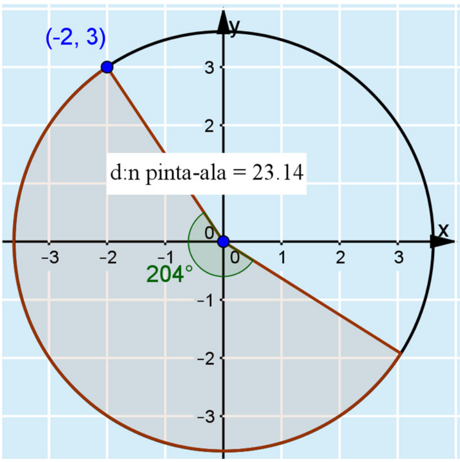
Vastaus: 1,8 m

334. Piirretään sopivalla ohjelmalla ympyrä, jonka keskipiste on origo eli (0, 0) ja kehän piste on (–2, 3).

Säteen pituudeksi saadaan ohjelman avulla 3,61.



a) Piirretään sektori sopivalla ohjelmalla ja mitataan sektorin pinta-ala.

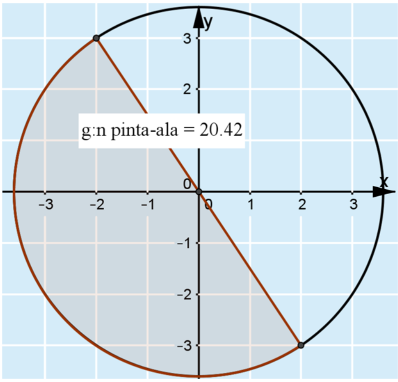


b) Sektorin keskuskulman kärki on ympyrän keskipisteessä.

Segmentti on ympyrän jänteen ja kaaren rajoittama alue.

Ainoa jänne, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta, on ympyrän halkaisija.

On siis piirrettävä puoliympyrä.



c) Säteen pituudeksi saadaan ohjelman avulla 3,61.

Ohjelmalla a-kohdan sektorin pinta-alaksi saadaan 23,14.
Ohjelmalla b-kohdan sektorin pinta-alaksi saadaan 20,42

Vastaus: säteen pituus 3,61, a-kohdan sektorin pinta-ala 23,14, b-kohdan sektorin pinta-ala 20,42

335. Janan l pituus on $\sqrt{(4-(-3))^2+(-7-17)^2}=25$. .

a) Nyt $d = 25$

Pinta-ala:

$$A=\pi r^2=\pi\cdot\left(\frac{25}{2}\right)^2=\frac{625}{4}\pi$$

Vastaus: $\frac{625}{4}\pi$

b) Nyt $r = 25$

Pinta-ala:

$$A=\pi r^2=\pi\cdot 25^2=625\pi$$

Vastaus: 625π

c) Lasketaan a- ja b-kohdassa saatujen pinta-alojen suhde.

$$\frac{A_a}{A_b}=\frac{\frac{625}{4}\pi}{625\pi}=\frac{1}{4}$$

a-kohdan pinta-ala on siis neljännes b-kohdan pinta-alasta.

Vastaus: $\frac{1}{4}$

336. Aleksi syö kokonaisen pitsan, jonka halkaisija on 45 cm.

Pitsan säde on $r = \dfrac{45\text{ cm}}{2} = 22{,}5\text{ cm}$.

Aleksin syömän pitsan pinta-ala on

$A_{\mathrm{A}} = \pi r^2 = \pi \cdot (22{,}5\text{ cm})^2 = 1590{,}431\ldots\text{ cm}^2$.

Leevi jättää syömättä pitsan reunat, joiden leveys on 1,5 cm.

Täyteosan halkaisija on siten 45 cm – 2 · 1,5 cm = 42 cm.

Täyteosan säde on $r = \dfrac{42\text{ cm}}{2} = 21\text{ cm}$.

Leevin syömän pitsan pinta-ala on

$A_{\mathrm{L}} = \pi r^2 = \pi \cdot (21\text{ cm})^2 = 1385{,}442\ldots\text{ cm}^2$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia Leevin syömän pitsan pinta-ala on Aleksin syömän pitsan pinta-alasta.

$$\frac{A_L}{A_A} = \frac{1385{,}442\ldots\text{ cm}^2}{1590{,}431\ldots\text{ cm}^2} = 0{,}871\ldots \approx 87\ \%$$

Leevi syö pitsaa 100 % – 87 % = 13 % vähemmän kuin Aleksi.

Vastaus: 13 %

337. **a)** Segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin pinta-alasta keskuskolmion pinta-ala.

Sektorin keskuskulma $\alpha = 65°$ ja säde $r = 3{,}00$ cm.

Sektorin pinta-ala

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{65°}{360°} \cdot \pi \cdot (3{,}0\ \text{cm})^2 = 5{,}105...\ \text{cm}^2.$$

Keskuskolmion kanta on 3,2 cm ja korkeus on 2,5 cm.

Kolmion pinta-ala $A_{\text{kolmio}} = \dfrac{3{,}2\ \text{cm} \cdot 2{,}5\ \text{cm}}{2} = 4{,}0\ \text{cm}^2$.

Segmentin pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= 5{,}105\ldots\ \text{cm}^2 - 4{,}0\ \text{cm}^2 \\ &= 1{,}105\ldots\ \text{cm}^2 \\ &\approx 1{,}1\ \text{cm}^2. \end{aligned}$$

Vastaus: $1{,}1\ \text{cm}^2$

b) Segmentin pinta-ala saadaan lisäämällä sektorin pinta-alaan keskuskolmion pinta-ala.

Sektorin keskuskulma $\alpha = 215°$ ja säde $r = 3{,}0$ cm.

Sektorin pinta-ala on $A_{\text{sektori}} = \dfrac{215°}{360°} \cdot \pi \cdot (3{,}0\ \text{cm})^2 = 16{,}886...\ \text{cm}^2$.

Keskuskolmion kanta on 5,7 cm ja korkeus on 0,9 cm.

Kolmion pinta-ala on $A_{\text{kolmio}} = \dfrac{5,7\ \text{cm} \cdot 0,9\ \text{cm}}{2} = 2,565\ \text{cm}^2$.

Segmentin pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} + A_{\text{kolmio}} \\ &= 16,886\ldots\ \text{cm}^2 + 2,565\ \text{cm}^2 \\ &= 19,451\ldots\ \text{cm}^2 \\ &\approx 19\ \text{cm}^2. \end{aligned}$$

Vastaus: 19 cm^2

338. Tarkastellaan ensiksi neliötä, jonka piiri on 10,0 m. Neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten sivun pituus saadaan jakamalla piiri neljällä.

$$\frac{10,0\ \text{m}}{4} = 2,5\ \text{m}$$

Neliön pinta-ala on $A_{\text{neliö}} = (2,5\ \text{m})^2 = 6,25\ \text{m}^2$.

Tarkastellaan seuraavaksi ympyrää, jonka kehän pituus on 10,0 m.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r. Muodostetaan ympyrän kehän pituuden laskukaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä säde r.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ 10 &= 2\pi r \quad \|: 2\pi \\ r &= \frac{10}{2\pi} \\ r &= 1,591\ldots \end{aligned}$$

Ympyrän pinta-ala on

$A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot (1{,}591\ldots\text{ m})^2 = 7{,}957\ldots\text{ m}^2.$

Ympyrän pinta-ala on suurempi kuin neliön pinta-ala.

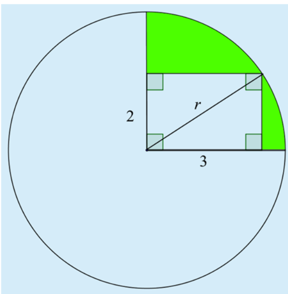
Lasketaan, kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on neliön pinta-alasta.

$$\frac{A_{\text{ympyrä}}}{A_{\text{neliö}}} = \frac{7{,}9577\ldots\text{ m}^2}{6{,}25\text{ m}^2} = 1{,}27323\ldots = 127{,}323\ldots\ \%$$

Ympyrän pinta-ala on 127,323… % – 100 % = 27,323… % ≈ 27,3 % suurempi kuin neliön pinta-ala.

Vastaus: Ympyrän pinta-ala on 27,3 prosenttia suurempi.

339. Neljännesympyrän sisään on piirretty suorakulmio, jonka kanta on 3 ja korkeus 2. Ympyrän säde on suorakulmion lävistäjän pituinen.



Ratkaistaan säteen r pituus Pythagoraan lauseella.

$$r^2 = 2^2 + 3^2$$
$$r^2 = 4 + 9$$
$$r^2 = 13$$
$$r = \sqrt{13} \text{ tai } r = -\sqrt{13}$$

Säteen pituus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

Neljännesympyrän pinta-ala saadaan jakamalla ympyrän pinta-ala neljällä.

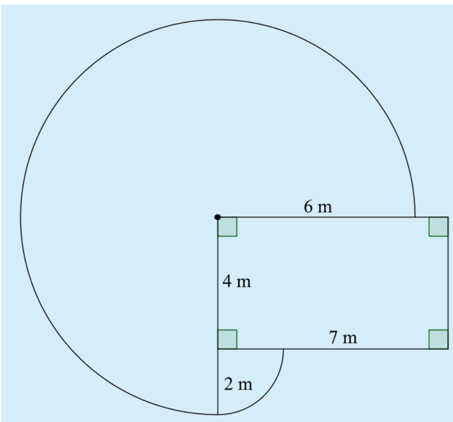
Väritetyn alueen pinta-ala saadaan, kun neljännesympyrän pinta-alasta vähennetään suorakulmion pinta-ala.

$$A = \frac{\pi \cdot \left(\sqrt{13}\right)^2}{4} - 2 \cdot 3 = \frac{\pi \cdot 13}{4} - 6 = \frac{13\pi}{4} - 6\,.$$

Vastaus: $\frac{13\pi}{4} - 6$

340. Talo on ylhäältä katsottuna suorakulmio, jonka sivut ovat 4 m ja 7 m. Koira on kytketty talon kulmaan 6 m pitkällä narulla.

Piirretään mallikuva alueesta, jossa koira pystyy kytkettynä liikkumaan.



Havaitaan, että 6 m pituinen naru muodostaa $\frac{3}{4}$ -ympyrän muotoisen sektorin. Lisäksi naru voi taittua talon lyhyemmän sivun toisen kulman kohdalta, jolloin muodostuu neljännesympyrä, jonka säde on 2 m.

Koiran suurin mahdollinen liikkumatila on näiden sektorien pinta-alojen summa.

$$A = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot (6\text{ m})^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (2\text{ m})^2 = 87{,}964...\text{ m}^2$$

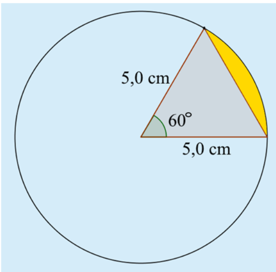
Suurin liikkumatila on noin 88 m^2.

Vastaus: 88 m^2

341. Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat ovat 60°. Tasasivuisen kolmion yksi kärki on ympyrän keskipisteessä ja kaksi muuta ympyrän kehällä.

Kolmion kaikki sivut ovat siis ympyrän säteen pituisia.

Ympyrän halkaisija on 10,0 cm, joten säde on 5,0 cm.



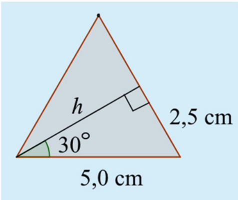
Varjostetun alueen pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin pinta-alasta kolmion pinta-ala.

Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot (5{,}0\text{ cm})^2 = 13{,}089...\text{ cm}^2\,.$$

Kolmion pinta-alan laskemista varten lasketaan ensin kolmion korkeusjanan pituus. Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa sekä

huippukulman että kannan, jolloin syntyy kaksi yhtenevää suorakulmaista kolmiota.
Merkitään korkeusjanaa kirjaimella h ja piirretään tilanteesta mallikuva.



Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} h^2 + 2{,}5^2 &= 5{,}0^2 \\ h^2 &= 5{,}0^2 - 2{,}5^2 \\ h^2 &= 18{,}75 \\ h &= \sqrt{18{,}75} \text{ tai } h = -\sqrt{18{,}75} \end{aligned}$$

Korkeus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$h = 4{,}330\ ...$

Tasasivuisen kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{5{,}0 \text{ cm} \cdot 4{,}330... \text{ cm}}{2} = 10{,}825\ldots \text{ cm}^2.$$

Segmentin pinta-ala on

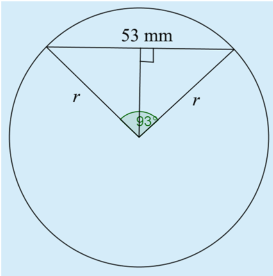
$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= 13{,}089\ldots \text{ cm}^2 - 10{,}825\ldots \text{ cm}^2 \\ &= 2{,}264\ldots \text{ cm}^2 \\ &\approx 2{,}26 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Varjostetun alueen pinta-ala on noin $2{,}26 \text{ cm}^2$.

Vastaus: $2{,}26 \text{ cm}^2$

342. Ympyrän jänne on 53 mm ja sitä vastaava keskuskulma on 93°.

Piirretään mallikuva ja merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r*.

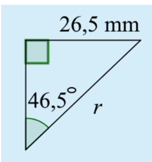


Jänne ja kaksi ympyrän sädettä rajaavat tasakylkisen kolmion, jonka huippukulma on 93°.

Kolmion korkeusjana puolittaa sekä kannan että huippukulman, jolloin syntyy kaksi yhtenevää suorakulmaista kolmiota.

Suorakulmaisista kolmioista tunnetaan toinen kateetti $\frac{53 \text{ mm}}{2} = 26{,}5$ mm

ja sen vastainen kulma $\frac{93°}{2} = 46{,}5°$. Hypotenuusan pituus on *r*.



Ratkaistaan ympyrän säde *r* sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin 46{,}5° &= \frac{26{,}5}{r} && \| \cdot r \\ r \cdot \sin 46{,}5° &= 26{,}5 && \| : \sin 46{,}5° \\ r &= \frac{26{,}5}{\sin 46{,}5°} \\ r &= 36{,}532... \end{aligned}$$

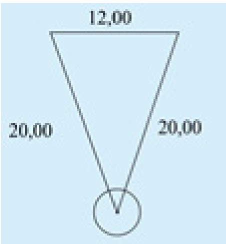
Ympyrän säde on $r = 36{,}532\ldots \text{ mm} = 3{,}653\ldots \text{ cm} \approx 3{,}7 \text{ cm}$.

Ympyrän kehän pituus on
$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 3{,}653\ldots \text{ cm} = 22{,}954\ldots \text{ cm} \approx 23 \text{ cm}$.

Ympyrän pinta-ala on
$A = \pi r^2 = \pi \cdot (3{,}653\ldots \text{ cm})^2 = 41{,}929\ldots \text{ cm}^2 \approx 42 \text{ cm}^2$.

Vastaus: säde 3,7 cm, kehän pituus 23 cm ja pinta-ala 42 cm^2

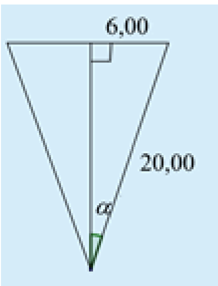
343. Moukarinheittosektori avautuu kuvan mukaisesti.



Kolmion kaksi sivua ovat yhtä pitkät, joten kolmio on tasakylkinen.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa sekä kannan että huippukulman, jolloin syntyy kaksi yhtenevää suorakulmaista kolmiota.

Merkitään huippukulman puolikasta kirjaimella α.



Ratkaistaan kulman α suuruus sinin avulla.

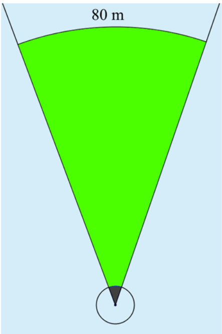
$$\sin\alpha = \frac{6}{20}$$

$$\sin\alpha = 0{,}3$$

$$\alpha = 17{,}457...^\circ$$

Tasakylkisen kolmion huippukulma, joka on myös sektorin keskuskulma, on $2\alpha = 2 \cdot 17{,}457...^\circ = 34{,}915...^\circ$.

80 metrin viivan ja heittoringin väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan, kun 80 metrin heittoviivan rajaamasta sektorista vähennetään heittoringin rajaama sektori.



Heittoringin halkaisija on 213 cm, joten sen säde on

$$r = \frac{213\text{ cm}}{2} = 106{,}5\text{ cm} = 1{,}065\text{ m}.$$

Isomman sektorin säde on 80 m + 1,065 m = 81,065 m.
Sektorin keskuskulma on 34,915…°, joten sektorin pinta-ala on

$$A_1 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{34{,}195...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (81{,}065\text{ m})^2 = 2002{,}298...\text{ m}^2.$$

Pienemmän sektorin pinta-ala on

$$A_2 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{34{,}195...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (1{,}065\text{ m})^2 = 0{,}345...\text{ m}^2.$$

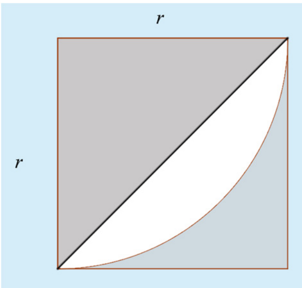
80 metrin viivan ja heittoringin väliin jäävän alueen pinta-ala on

$A_1 - A_2 = 2002{,}298\ldots\ \text{m}^2 - 0{,}3455\ldots\ \text{m}^2 = 2001{,}952\ldots\ \text{m}^2 \approx 2002\ \text{m}^2.$

Vastaus: 2002 m^2

344. Merkitään neljännesympyrän sädettä kirjaimella r.

Jaetaan pikkuleipä pitkittäin kahteen yhtä suureen osaan.



Havaitaan, että pikkuleivän puolikas on ympyräsegmentti.

Segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä neljännesympyrästä kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{segmentti}} = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 - \frac{r \cdot r}{2} = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{r^2}{2}$$

Kokonaisen pikkuleivän pinta-ala on 10 cm^2, joten puolikkaan pikkuleivän pinta-ala on 5 cm^2.

Muodostetaan tämän tiedon avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä säde r.

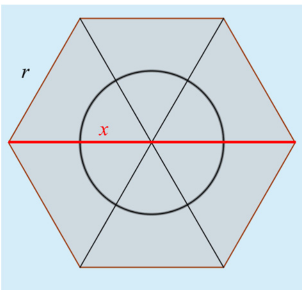
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{r^2}{2} &= 5 \\
0,785...r^2 - 0,5r^2 &= 5 \\
0,285...r^2 &= 5 \quad \| : 0,285... \\
r^2 &= 17,519... \\
r &= _{(\pm)}\sqrt{17,519...} \\
r &= 4,185... \\
r &\approx 4,2
\end{aligned}
$$

Neljännesympyrän säteen pitää olla noin 4,2 cm.

Vastaus: 4,2 cm

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

345. **a)** Tarkastellaan säännöllistä kuusikulmiota, jonka sivun pituus on r. Yhdistetään kuusikulmion vastakkaiset kärjet janoilla.



Havaitaan, että säännöllinen kuusikulmio koostuu kuudesta yhtenevästä tasakylkisestä kolmiosta.

Tasakylkisen kolmion huippukulma on $\frac{360°}{6} = 60°$.

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret,
joten kantakulmien suuruus on

$$\frac{180° - 60°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°.$$

Kolmio, jonka kaikki kulmat ovat 60°, on tasasivuinen.

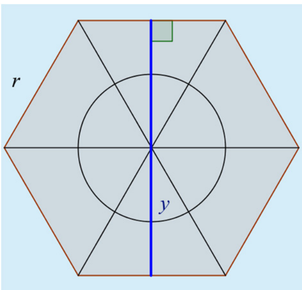
Koska kuusikulmion sivun pituus on r, myös kolmion kaikkien sivujen pituus on r.

Säännöllisen kuusikulmion vastakkaisten kärkien etäisyys on kahden kolmion sivun summa, joten kysytty etäisyys on

$$x = r + r = 2r.$$

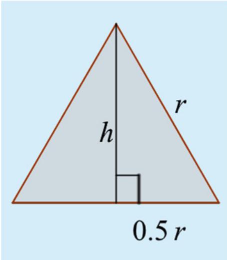
Vastaus: $x = 2r$

b) Piirretään kuvioon jana, joka yhdistää kahden vastakkaisen kolmion kantojen keskipisteet.



Havaitaan, että korkeus y on kahden kolmion korkeusjanan summa.

Merkitään kolmion korkeusjanaa kirjaimella h.



Ratkaistaan h Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
h^2+\left(\frac{1}{2}r\right)^2&=r^2\\
h^2+\frac{1}{4}r^2&=r^2\\
h^2&=r^2-\frac{1}{4}r^2\\
h^2&=\frac{3}{4}r^2\\
h&=(\pm)\sqrt{\frac{3}{4}r^2}\\
h&=\frac{\sqrt{3}}{2}r
\end{aligned}
$$

Korkeus y on siten

$$y=2h=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r=r\sqrt{3}.$$

Vastaus: $y = r\sqrt{3}$

c) Kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan, kun kuusikulmion pinta-alasta vähennetään ympyrän pinta-ala.

Kuusikulmio koostuu kuudesta tasasivuisesta kolmiosta, j
oten sen pinta-ala on

$$A_{\text{kuusikulmio}} = 6 \cdot A_{\text{kolmio}} = {}_{3}\cancel{6} \cdot \frac{r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r}{\cancel{2}_{1}} = 3r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2.$$

Ympyrän säde on $\frac{r}{2}$, joten ympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} r^2 .$$

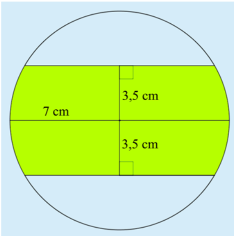
Kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$A = A_{\text{kuusikulmio}} - A_{\text{ympyrä}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 - \frac{\pi}{4} r^2 .$$

Vastaus: $\frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 - \frac{\pi}{4} r^2$

346. Kaksi yhdensuuntaista jännettä, jotka ovat 3,5 senttimetrin etäisyydellä ympyrän keskipisteestä, rajoittavat alueen.

Ympyrän säde on 7 cm. Piirretään mallikuva.

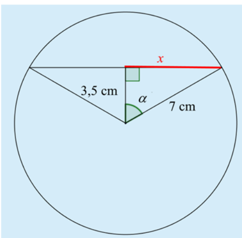


Havaitaan, että väritetyn alueen ulkopuolelle jää kaksi samankokoista ympyräsegmenttiä. Väritetyn alueen pinta-ala saadaan, kun ympyrän pinta-alasta vähennetään kahden ympyräsegmentin pinta-ala.

Piirretään toisen jänteen päätepisteistä ympyrän säteet, jolloin muodostuu tasakylkinen kolmio.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa sekä huippukulman että kannan, jolloin muodostuu kaksi yhtenevää suorakulmaista kolmiota.

Merkitään huippukulman puolikasta kirjaimella α ja kannan puolikasta kirjaimella x.



Ratkaistaan kannan puolikas x Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 3,5^2 &= 7^2 \\
x^2 &= 7^2 - 3,5^2 \\
x^2 &= 36,75 \qquad x^2 + 3,5^2 = 7^2 \\
x &= (\pm)\sqrt{36,75} \\
x &= 6,062\ldots
\end{aligned}
$$

Kolmion kanta on $2x = 2 \cdot 6,062\ldots$ cm = 12,124… cm ja korkeus 3,5 cm.

Kolmion pinta-ala on siten

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{12,124\ldots\ \text{cm} \cdot 3,5\ \text{cm}}{2} = 21,217\ \text{cm}^2.$$

Sektorin pinta-alan laskemista varten tarvitaan keskuskulman suuruus.

Keskuskulma on sama kuin tasakylkisen kolmion huippukulma.

Lasketaan huippukulman puolikas α kosinin avulla.

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{3,5}{7} \\
\cos\alpha &= 0,5 \\
\alpha &= 60^\circ
\end{aligned}
$$

Tasakylkisen kolmion huippukulma, joka on myös sektorin keskuskulma, on $2\alpha = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Sektorin säde on 7 cm, joten sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (7\ \text{cm})^2 = 51,312\ldots\ \text{cm}^2.$$

Segmentin pinta-ala on sektorin ja keskuskolmion pinta-alojen erotus.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\
&= 51,312\ldots\ \text{cm}^2 - 21,217\ldots\ \text{cm}^2 \\
&= 30,095\ldots\ \text{cm}^2
\end{aligned}
$$

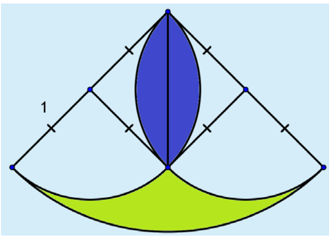
Väritetyn alueen pinta-ala on

$$
\begin{aligned}
A &= A_{\text{ympyrä}} - 2A_{\text{segmentti}} \\
&= \pi \cdot (7\text{ cm})^2 - 2 \cdot 30{,}095\ldots\text{ cm}^2 \\
&= 153{,}938\ldots\text{ cm}^2 - 60{,}190\ldots\text{ cm}^2 \\
&= 93{,}747\ldots\text{ cm}^2 \\
&\approx 94\text{ cm}^2.
\end{aligned}
$$

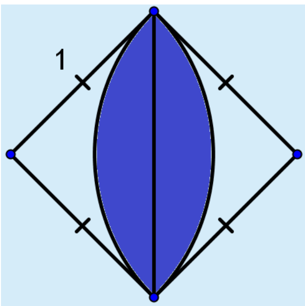
Jänteiden rajoittama pinta-ala on noin 94 cm^2.

Vastaus: 94 cm^2

347. Piirretään kuvioon kaarien säteet ja jaetaan sininen alue kahtia.



Tarkastellaan ensin sinistä aluetta.



Havaitaan, että sinisen alueen puolikas on ympyräsegmentti.

Segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin pinta-alasta kolmion pinta-ala.

Sininen alue on ympyröity neliöllä, joten sektori on neljännesympyrä, jonka säde on 1.

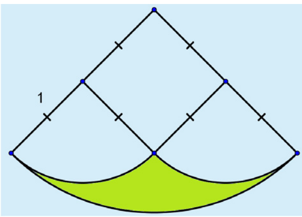
Kolmion kanta ja korkeus ovat molemmat 1.

$$A_{\text{segmentti}} = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 - \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Sininen alue koostuu kahdesta samankokoisesta segmentistä,
joten sen pinta-ala on

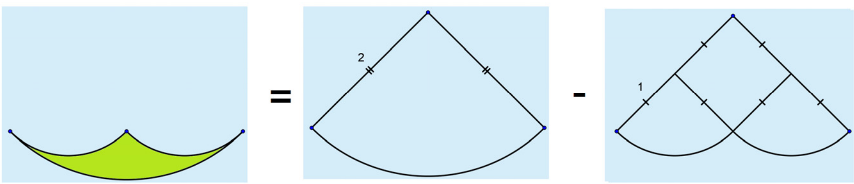
$$A_{\text{sininen}} = 2A_{\text{segmentti}} = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

Tarkastellaan seuraavaksi vihreää aluetta.



Havaitaan, että värittämätön alue koostuu yhdestä neliöstä ja kahdesta neljännesympyrästä, joiden säde on 1.

Vihreän alueen pinta-ala saadaan, kun isomman neljännesympyrän pinta-alasta vähennetään värittämättömän alueen pinta-ala.



Neljännesympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{neljännesympyrä}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4 = \pi.$$

Värittämättömän alueen pinta-ala on

$$A_{\text{värittämätön}} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Vihreän alueen pinta-ala on siten

$$A_{\text{vihreä}} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \overset{2)}{=} \frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Sinisen ja vihreän alueen pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_{\text{sininen}}}{A_{vihreä}} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\frac{\pi}{2} - 1} = \frac{1}{1}.$$

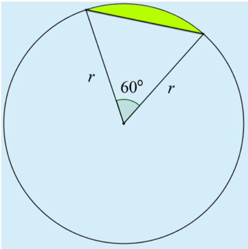
Vastaus: 1:1

348. Ympyräsegmentti saadaan kahdella tavalla: joko vähentämällä sektorin pinta-alasta keskuskolmion pinta-ala tai lisäämällä sektorin pinta-alaan keskuskolmion pinta-ala.

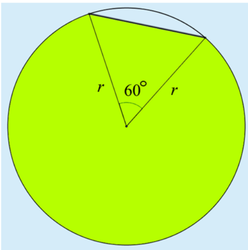
Piirretään molemmista tilanteista mallikuva.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r.

Tilanne I: $A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}}$



Tilanne II: $A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} + A_{\text{kolmio}}$



Tarkastellaan ensin tilannetta I. Sektorin keskuskulma on 60°, joten sektorin pinta-ala on

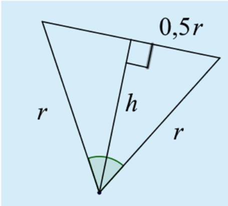
$$A_{\text{sektori,pieni}} = \frac{60°}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{6}\pi r^2 \,.$$

Keskuskolmio on tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma on 60°, joten myös kantakulmat ovat 60°.

Keskuskolmio on siis tasasivuinen kolmio, jonka kaikki sivut ovat ympyrän säteen r pituisia.

Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan.

Merkitään kolmion korkeusjanaa kirjaimella h.



Kolmion korkeusjana h, kannan puolikas $0{,}5r$ ja säde r muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Muodostetaan yhtälö

Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan siitä korkeusjana h.

$$
\begin{aligned}
h^2 + (0{,}5r)^2 &= r^2 \\
h^2 + 0{,}25r^2 &= r^2 \\
h^2 &= r^2 - 0{,}25r^2 \\
h^2 &= 0{,}75r^2 \\
h &= (\pm)\sqrt{0{,}75r^2} \\
h &= 0{,}866...r
\end{aligned}
$$

$$h^2 + (0{,}5r)^2 = r^2$$

Keskuskolmion kanta on r ja korkeus $h = 0{,}866\ldots r$,
joten kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{r \cdot 0{,}866...r}{2} = 0{,}433\ldots r^2.$$

Segmentin pinta-ala on 100 m^2.

Pienemmän segmentin pinta-ala saadaan sektorin pinta-alan ja keskuskolmion pinta-alan erotuksena.

Muodostetaan yhtälö segmentin pinta-alalle ja ratkaistaan yhtälöstä säde r.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{segmentti}} &= 100 \\
A_{\text{sektori,pieni}} - A_{\text{kolmio}} &= 100 \\
\frac{1}{6}\pi r^2 - 0{,}433...r^2 &= 100 \\
0{,}09058...r^2 &= 100 \quad \|: 0{,}09058... \\
r^2 &= 1103{,}922... \\
r &= (\pm)\sqrt{1103{,}922...} \\
r &= 33{,}225...
\end{aligned}
$$

Tilanteessa I ympyrän säde on noin 33 m.
Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta II.

Sektorin keskuskulma on 360° – 60° = 300°, joten sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori,iso}} = \frac{300°}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{5}{6}\pi r^2 .$$

Keskuskolmion pinta-ala on sama kuin edellä eli $A_{\text{kolmio}} = 0{,}433\ldots r^2$.
Isomman segmentin pinta-ala saadaan sektorin pinta-alan ja keskuskolmion pinta-alan summana.
Muodostetaan yhtälö segmentin pinta-alalle ja ratkaistaan yhtälöstä säde r.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{segmentti}} &= 100 \\
A_{\text{sektori,iso}} + A_{\text{kolmio}} &= 100 \\
\frac{5}{6}\pi r^2 + 0{,}433...r^2 &= 100 \\
3{,}051...r^2 &= 100 \quad \|: 3{,}051... \\
r^2 &= 32{,}776... \\
r &= (\pm)\sqrt{32{,}776...} \\
r &= 5{,}725...
\end{aligned}
$$

Tilanteessa II ympyrän säde on noin 5,7 m.

Vastaus: 33 m tai 5,7 m

3.3 Ympyrän tangentti

ALOITA PERUSTEISTA

349. **a)** Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman summa on 180°.

$$\begin{aligned} \alpha + 64° &= 180° \\ \alpha &= 180° - 64° \\ \alpha &= 116° \end{aligned}$$

Vastaus: $\alpha = 116°$

b) Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman summa on 180°.

$$\begin{aligned} \alpha + 94° &= 180° \\ \alpha &= 180° - 94° \\ \alpha &= 86° \end{aligned}$$

Vastaus: $\alpha = 86°$

350. **a)** Väärin. Ympyrän säteen ja tangentin välinen kulma on 90°.

Vastaus: väärin, 90°

b) Väärin. Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman summa on 180°.

Vastaus: väärin, 180°

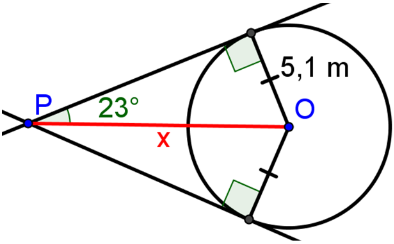
c) Oikein. Jos piirretään suora ympyrän sisäpuolella olevan pisteen kautta, niin suora leikkaa ympyrän, eikä voi olla ympyrän tangentti.

Vastaus: oikein

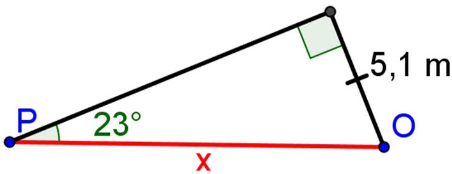
d) Väärin. Ympyrän kehällä olevan pisteen kautta voidaan piirtää ympyrälle yksi tangentti.

Vastaus: väärin, yksi tangentti

351. **a)** Merkitään keskipisteen O ja pisteen P välistä etäisyyttä kirjaimella x.



Janan x pituus voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta.



23°:n kulman vastaisen kateetin pituus on 5,1 m, ja kolmion hypotenuusa on x.

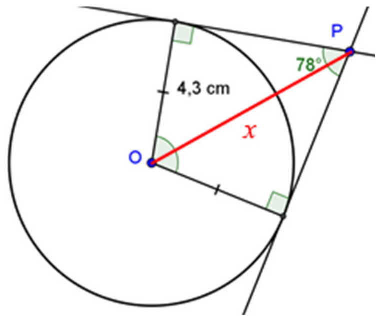
Muodostetaan sinin avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä janan x pituus.

$$\begin{aligned} \sin 23° &= \frac{5{,}1}{x} \quad \| \cdot x \\ x \cdot \sin 23° &= 5{,}1 \quad \| : \sin 23° \\ x &= \frac{5{,}1}{\sin 23°} \\ x &= 13{,}052... \end{aligned}$$

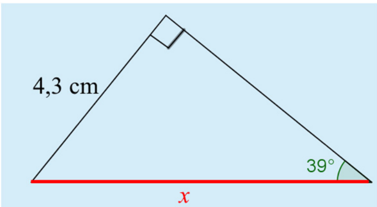
Keskipisteen O ja pisteen P välinen etäisyys on 13,052… m ≈ 13 m.

Vastaus: 13 m

b) Merkitään keskipisteen *O* ja pisteen *P* välistä etäisyyttä kirjaimella *x*.



Jana *x* jakaa nelikulmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Tangenttikulman puolikas on $\frac{78°}{2} = 39°$.



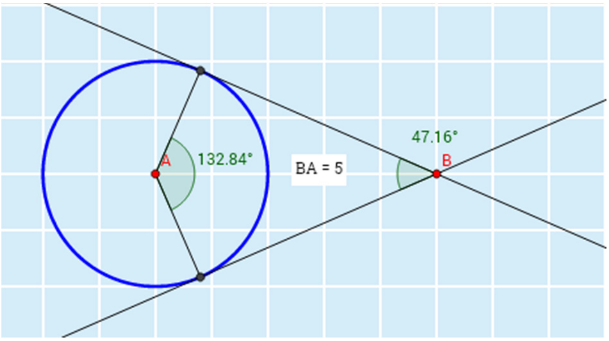
Ratkaistaan janan *x* pituus sinin avulla.

$$\sin 39° = \frac{4,3}{x} \qquad \| \cdot x$$
$$x \cdot \sin 39° = 4,3 \qquad \| : \sin 39°$$
$$x = \frac{4,3}{\sin 39°}$$
$$x = 6,832...$$

Keskipisteen *O* ja pisteen *P* välinen etäisyys on 6,832… cm ≈ 6,8 cm.

Vastaus: 6,8 cm

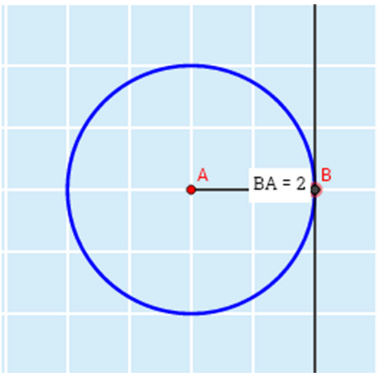
352. **a)** Videossa näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista appletin avulla.



Vastaus: tangenttien välinen kulma 47,16°, keskuskulma 132,84°

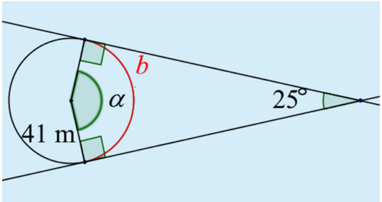
b) Kun tangenttien leikkauspiste siirretään mahdollisimman lähelle ympyrää, tangentit yhtyvät ja ovat kohtisuorassa ympyrän sädettä vastaan.

Yläraja tangenttikulmalle on oikokulma eli 180°.



Vastaus: 180°

353. **a)** Merkitään kaarta b vastaavaa keskuskulmaa kirjaimella α.



Keskuskulman ja tangenttikulman summa on 180°.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kulma α.

$$\begin{aligned} \alpha + 25° &= 180° \\ \alpha &= 180° - 25° \\ \alpha &= 155° \end{aligned}$$

Kaaren b pituus on

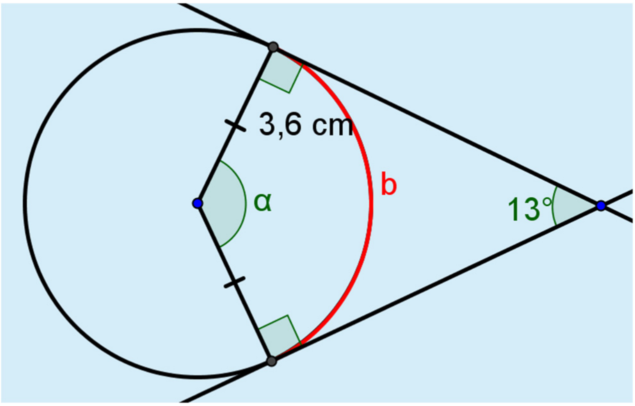
$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{155°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 41\text{ m} = 110{,}915\ldots\text{ m} \approx 110\text{ m}.$$

Vastaus: 110 m

b) Mukin pohjan säde $\frac{7{,}2\text{ cm}}{2} = 3{,}6\text{ cm}.$ Muki näkyy 13°:n kulmassa,

joten mukille piirrettyjen tangenttien välinen kulma on 13°.

Piirretään mallikuva.



Pisin mahdollinen teksti on merkitty kuvaan punaisella.

Teksti on ympyrän kaarella, jonka pituus on b.

Kaaren pituuden laskemiseksi on selvitettävä ensin kaarta vastaava keskuskulma α.

Tangenttikulman ja keskuskulman summa on 180°, joten $\alpha = 180° - 13° = 167°$.

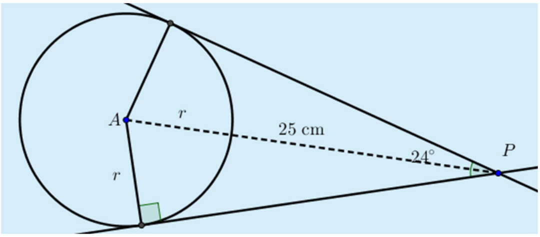
Lasketaan kaaren pituus b.

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{167°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3{,}6 \text{ cm} = 10{,}492\ldots \text{ cm} \approx 10 \text{ cm}.$$

Teksti voi olla noin 10 cm pitkä.

Vastaus: 10 cm

354.



a) Pisteen P etäisyys kehästä on 25 cm, joten pisteen O etäisyys keskipisteestä A on 25 cm + säde.

Lauseke on $25 + r$.

Vastaus: $25 + r$

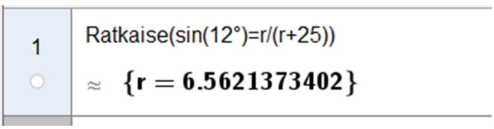
b) Tangenttikulman suuruus on 24°, joten tangenttikulman puolikkas on 12°.

Vastaus: 12°

c) Suorakulmaisen kolmion trigonometrian perusuteella.

$$\sin 12° = \frac{r}{r + 25}$$

Ohjelmalla ratkaisuksi saadaan.

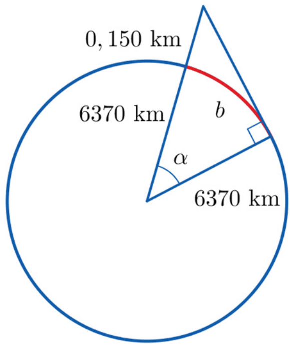


$r = 6{,}56\ldots \approx 6{,}6$

Säde on $r = 6{,}6$ cm.

Vastaus: $r = 6{,}6$ cm

355. Hätäraketin korkeus merenpinnasta on 150 m = 0,150 km. Piirretään mallikuva ja merkitään siihen annetut mitat.



Merkitään kaarta kirjaimella b ja sitä vastaavaa keskuskulmaa kirjaimella α.

Kaaren b pituuden laskemista varten selvitetään kaarta vastaava keskuskulma α.

Ratkaistaan se suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370+0{,}150}$$
$$\alpha = 0{,}393...^\circ$$

Lasketaan kaaren b pituus.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi r = \frac{0{,}393...^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 6370\text{ km} = 43{,}714...\text{ km} \approx 44\text{ km}\ .$$

Hätäraketin voi nähdä 44 kilometrin etäisyydelle.

Vastaus: 44 km

VAHVISTA OSAAMISTA

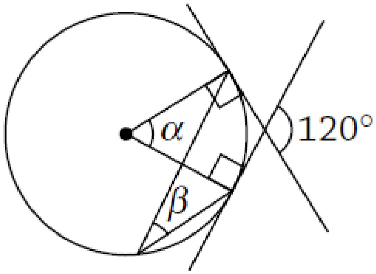
356. **a)** Keskuskulma α vastaa samaa kaarta kuin 65°:n kehäkulma, joten $\alpha = 2 \cdot 65° = 130°$.

Kulmat α ja β ovat toisiaan vastaavat keskuskulma ja tangenttikulma, joten niiden summa on 180°.

Siten $\beta = 180° - \alpha = 180° - 130° = 50°$.

Vastaus: $\alpha = 130°$ ja $\beta = 50°$.

b) Ympyrälle on piirretty kaksi tangenttia seuraavan kuvan mukaisesti.



Tangenttikulma on 120 asteen kulman ristikulma, joten tangenttikulman suuruus on 120°.

Tangenttikulman ja sitä vastaavan keskuskulman α summa on 180°,

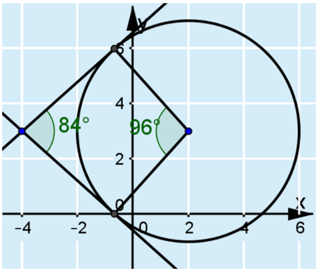
joten $\alpha = 180° - 120° = 60°$.

Kehäkulma β ja keskuskulma α vastaavat samaa kaarta, joten kehäkulman β suuruus on puolet keskuskulman α suuruudesta.

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$$

Vastaus: $\alpha = 60°$ ja $\beta = 30°$

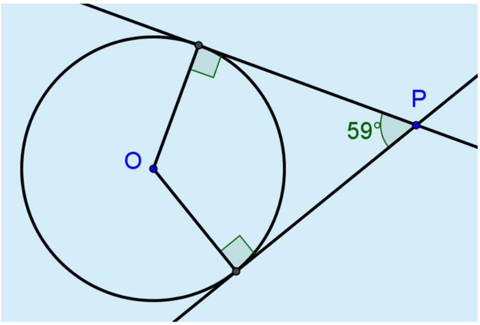
357. Videossa näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.



Vastaus: tangenttikulma n. 84°, keskuskulma n. 96°

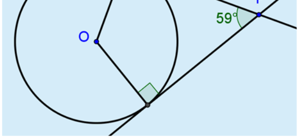
358. **a)** Piirretään sopivalla ohjelmalla ympyrä O ja sen ulkopuolisen pisteen P kautta ympyrän tangentit.

Piirretään myös ympyrän säteiden ja tangenttien väliset kulmat.

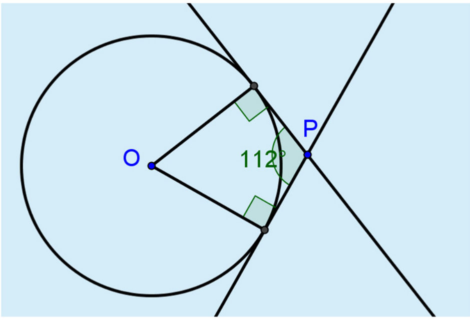


Kun tangenttikulma on terävä, ovat säteiden ja tangenttien väliset kulmat suoria kulmia.

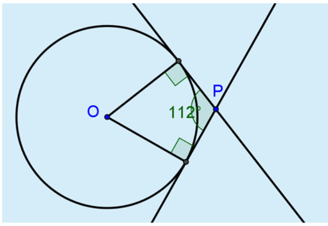
Vastaus: esim.



b) Siirretään pistettä P lähemmäksi ympyrää.

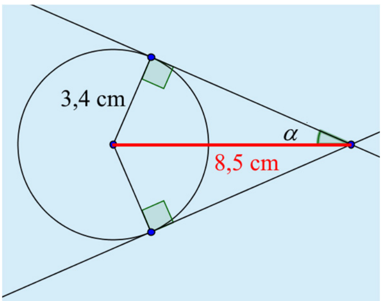


Kun tangenttikulma on tylppä, ovat säteiden ja tangenttien väliset kulmat edelleen suoria kulmia.

Vastaus: esim. 

359. Ympyrän säde on 3,4 cm ja pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä on 8,5 cm. Pisteestä P piirretään ympyrälle tangentit.

Merkitään tangenttikulman puolikasta kirjaimella α.



Säde 3,4 cm on suorakulmaisessa kolmiossa kulman α vastainen sivu ja etäisyys 8,5 cm on kolmion hypotenuusa.

Ratkaistaan kulman α suuruus sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{3,4}{8,5}$$
$$\sin\alpha = 0,4$$
$$\alpha = 23,578...°$$

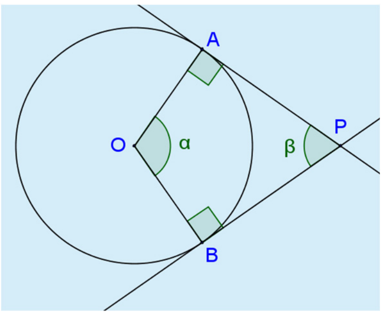
Tangenttikulman suuruus on

$2\alpha = 2 \cdot 23,578...° = 47,156...° \approx 47°$.

Vastaus: 47°

360. Piirretään ympyrä O ja sille kaksi tangenttia, jotka leikkaavat pisteessä P.

Merkitään tangentin ja ympyrän sivuamispisteitä kirjaimilla A ja B ja ympyrän keskuskulmaa ja tangenttikulmaa kirjaimilla α ja β.



Tarkastellaan nelikulmiota $OBPA$. Nelikulmion kulmien summa on 360°.

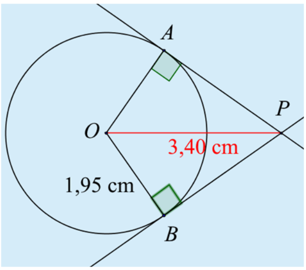
Keskuskulman α ja tangenttikulman β lisäksi nelikulmiossa on kaksi suoraa kulmaa.

Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan siitä $\alpha + \beta$.

$$\begin{aligned}\alpha + 90° + \beta + 90° &= 360° \\ \alpha + \beta + 180° &= 360° \\ \alpha + \beta &= 360° - 180° \\ \alpha + \beta &= 180°\end{aligned}$$

Siis keskuskulman α ja tangenttikulman β summa on 180°.

361. Ympyrän säde on 1,95 cm ja pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä O on 3,4 cm. Piirretään kuvaan jana OP.



Jana OP jakaa nelikulmion $AOBP$ kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Nelikulmion pinta-ala on kolmioiden pinta-alojen summa.

Ympyrän säde 1,95 cm on suorakulmaisen kolmion kateetti ja jana OP hypotenuusa. Kolmion pinta-alan laskemiseksi tarvitaan toisen kateetin pituus.

Merkitään tuntemattoman kateetin BP pituutta kirjaimella x.

Ratkaistaan pituus x Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}1,95^2 + x^2 &= 3,4^2 \\ x^2 &= 3,4^2 - 1,95^2 \\ x^2 &= 7,7575 \\ x &= (\pm)\sqrt{7,7575} \\ x &= 2,785...\end{aligned}$$

Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{2{,}785\ldots\ \text{cm} \cdot 1{,}95\ \text{cm}}{2} = 2{,}715\ldots\ \text{cm}^2.$$

Nelikulmion *AOBP* pinta-ala on

$$A_{AOBP} = 2 \cdot A_{\text{kolmio}} = 2 \cdot 2{,}715\ldots\ \text{cm}^2 = 5{,}431\ldots\ \text{cm}^2 \approx 5{,}4\ \text{cm}^2.$$

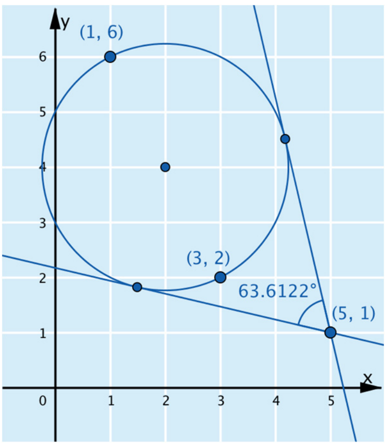
Vastaus: 5,4 cm^2

362. Ympr än halkaisija on jana pisteiden (1, 6) ja (3, 2) välillä, joten ympyrän keskipiste on tämän janan keskipisteessä.

Ympyrän keskipiste on $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = (2, 4)$.

Piirretään asetelma ohjelmalla ja mitataan kysytty tangenttikulma.

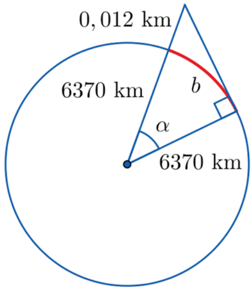
Videossa näytetään, miten asetelma piirretään ohjelmalla.



Ohjelman avulla tangenttikulmaksi mitataan 63,61…° ≈ 64°.

Vastaus: 64°

363. Lintubongarin korkeus merenpinnasta on 12 m = 0,012 km. Piirretään mallikuva ja merkitään siihen annetut mitat.



Merkitään kaarta kirjaimella b ja sitä vastaavaa keskuskulmaa kirjaimella α. Lintubongari näkee merelle kaaren b pituisen matkan.

Kaaren b pituuden laskemista varten selvitetään kaarta vastaava keskuskulma α.

Ratkaistaan se suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370+0{,}012}$$
$$\alpha = 0{,}111...°$$

Lasketaan kaaren b pituus.

$$b = \frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi r = \frac{0{,}111...°}{360°}\cdot 2\pi \cdot 6370 \text{ km} = 12{,}364... \text{ km} \approx 12 \text{ km}\ .$$

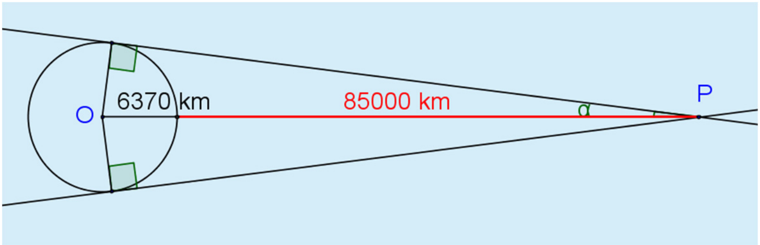
Lintubongari näkee merelle 12 kilometrin matkan, joten hän pystyy näkemään luodolla olevan linnun.

Vastaus: pystyy

364. Avaruusalus on 85 000 kilometrin etäisyydellä Maan pinnasta.

Merkitään avaruusalusta pisteellä *P* ja kuvataan Maata ympyrällä, jonka keskipiste on *O*. Astronauttien näkökulma on pisteestä *P* ympyrälle piirrettyjen tangenttien välinen kulma.

Piirretään mallikuva.



Jana *OP* on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa ja Maan säde on toinen kateetti. Merkitään tangenttikulman puolikasta kirjaimella α ja ratkaistaan se sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{6370}{6370+85000}$$

$$\sin\alpha = \frac{6370}{91370}$$

$$\alpha = 3{,}997...^\circ$$

Tangenttikulman suuruus on

$2\alpha = 2 \cdot 3{,}997\ldots^\circ = 7{,}995\ldots^\circ \approx 8{,}0^\circ.$

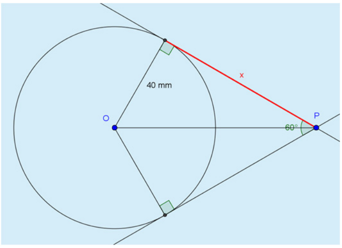
Astronautit näkevät Maan noin 8,0 asteen kulmassa.

Vastaus: 8,0°

365. Ympyrän ulkopuolella olevan pisteen P kautta on piirretty ympyrälle kaksi tangenttia. Näin muodostuva tangenttikulma on 60° ja ympyrän säde 40 mm.

Merkitään sivuamispisteen etäisyyttä pisteestä P kirjaimella x.

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Säde 40 mm, jana x ja jana OP muodostavat suorakulmaisen kolmion. Pisteessä P oleva kolmion kulma on tangenttikulman puolikas, 30°.

Ratkaistaan pituus x tangentin avulla.

$$\tan 30° = \frac{40}{x} \qquad \| \cdot x$$

$$x \cdot \tan 30° = 40 \qquad \| : \tan 30°$$

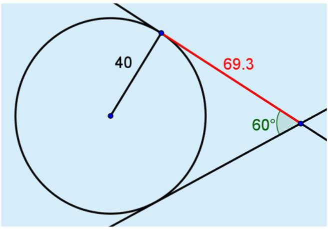
$$x = \frac{40}{\tan 30°}$$

$$x = 69,282...$$

$$x \approx 70$$

Sivuamispisteen etäisyys pisteestä P on noin 70 mm.

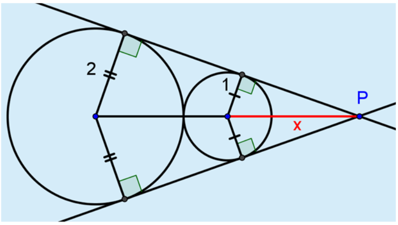
Tarkistus:



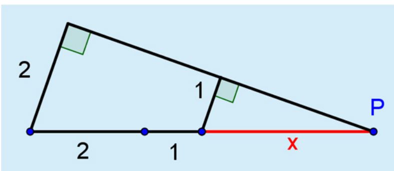
Sivuamispisteen etäisyys pisteestä P on 6,93 cm eli noin 70 mm.

Vastaus: 70 mm

366. Ympyrät sivuavat toisiaan ja niiden kaksi yhteistä tangenttia leikkaavat pisteessä P. Merkitään pisteen P etäisyyttä pienemmän ympyrän keskipisteestä kirjaimella x.



Tarkastellaan muodostuneita suorakulmaisia kolmioita.



Molemmissa kolmioissa on suora kulma ja kulma P on yhteinen, joten kk-lauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Taulukoidaan kolmioiden sivujen pituuksia.

	Lyhyempi kateetti	Hypotenuusa
Pienempi kolmio	1	x
Isompi kolmio	2	$x + 3$

Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen suhde on vakio.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä janan pituus x.

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{x+3}$$
$$2x = x + 3$$
$$x = 3$$

Pisteen P etäisyys isomman ympyrän keskipisteestä on

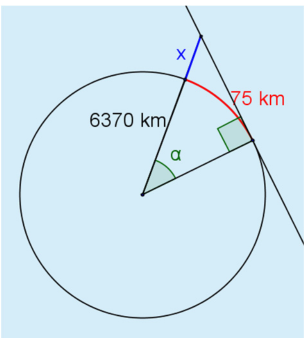
$x + 3 = 3 + 3 = 6.$

Videossa tehtävä tarkistetaan piirtämällä.

Vastaus: 6

367. Tornin tulisi näkyä 75 kilometrin päässä merellä. Tämä näköetäisyys on tornin tyven ja tangentin sivuamispisteen väliin jäävän maapallon kaaren pituus. Merkitään tornin korkeutta kirjaimella x.

Piirretään mallikuva.



Tornin korkeuden x laskemista varten selvitetään kaarta vastaavan keskuskulman α suuruus. Ratkaistaan se sektorin kaaren pituuden kaavasta.

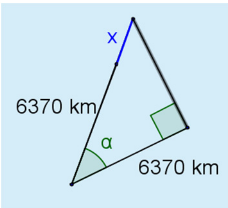
$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$75 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370 \qquad \| \cdot 360°$$

$$27\,000° = \alpha \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370 \qquad \| : (2 \cdot \pi \cdot 6370)$$

$$0{,}674...° = \alpha$$

$$\alpha = 0{,}674...°$$



Kulman α = 0,674…° viereinen kateetti on säde 6370 ja hypotenuusa 6370 + x. Muodostetaan yhtälö kosinin avulla ja ratkaistaan siitä janan pituus x.

$$\cos 0{,}674\ldots° = \frac{6370}{6370 + x} \qquad \| \cdot (6370 + x)$$

$$(6370 + x) \cdot \cos 0{,}674\ldots° = 6370 \qquad \| : \cos 0{,}674\ldots°$$

$$6370 + x = \frac{6370}{\cos 0{,}674\ldots°}$$

$$6370 + x = 6370{,}441...$$

$$x = 0{,}441...$$

$$x \approx 0{,}44$$

Tornin tulisi olla noin 0,44 km = 440 m korkea.

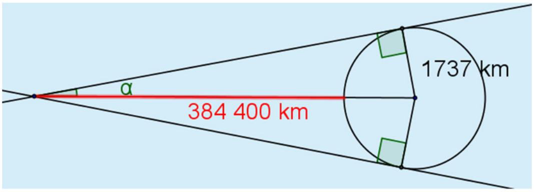
Vastaus: 440 m

368. Aurinko ja Kuu näyttävät Maasta katsottuna samankokoisilta, jos ne näkyvät Maasta yhtä suuressa kulmassa.

Lasketaan ensiksi, missä kulmassa Kuu näkyy Maan pinnalta.

Kuun säde on $r = \dfrac{3474 \text{ km}}{2} = 1737 \text{ km}$

Piirretään Maan pinnan pisteestä ympyrälle tangentit. Tangenttikulma on kysytty näkökulma. Merkitään tangenttikulman puolikasta kirjaimella α.



Maan pinnan ja Kuun keskipisteen välinen etäisyys on

384 400 km + 1737 km = 386 137 km.

Ratkaistaan kulma α sinin avulla.

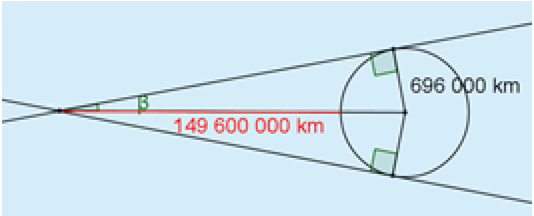
$$\sin\alpha = \frac{1737}{386137}$$
$$\alpha = 0{,}257...^\circ$$

Kuu näkyy Maan pinnalta kulmassa

$2\alpha = 2 \cdot 0{,}257\ldots^\circ = 0{,}515\ldots^\circ \approx 0{,}52^\circ$.

Lasketaan vastaavalla tavalla, missä kulmassa Aurinko näkyy Maan pinnalta. Auringon säde on $\dfrac{1392000 \text{ km}}{2} = 696000 \text{ km}$.

Merkitään tangenttikulman puolikasta kirjaimella β.



Maan pinnan ja Auringon keskipisteen välinen etäisyys on

149 600 000 km + 696 000 km = 150 296 000 km.

Ratkaistaan kulma β sinin avulla.

$$\sin\beta = \frac{696\,000}{150\ 296\ 000}$$
$$\beta = 0{,}265...^\circ$$

Aurinko näkyy Maan pinnalta kulmassa

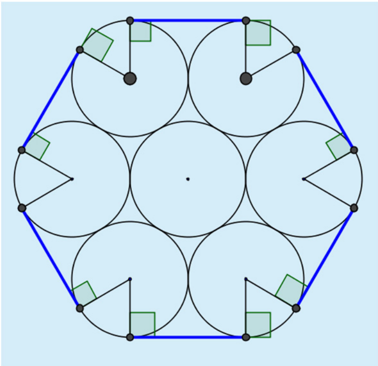
$2\beta = 2 \cdot 0{,}265\ldots^\circ = 0{,}530\ldots^\circ \approx 0{,}53^\circ$.

Näkökulmat ovat likimain yhtä suuria, joten Kuu ja Aurinko näyttävät samankokoisilta Maan pinnalta katsottuna.

Vastaus: Näkökulmat ovat likimain yhtä suuria.

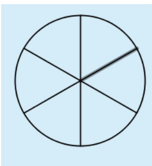
SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

369. Piirretään uloimmille ympyröille tangentit ja yhdistetään sivuamispisteet janoilla. Ympyrän halkaisija on $d = 20$ cm ja säde $r = \frac{20 \text{ cm}}{2} = 10$ cm. Muodostuu kuusi yhtä pitkää janaa.



Kunkin janan pituus on $2r = d = 20$ cm.

Lisäksi kuviossa on kuusi kaaren osaa. Irrotetaan kaaren osat ja liitetään ne säteistään yhteen.



Kaaren osat muodostavat ympyrän kehän, jonka pituus on

$p = \pi d = \pi \cdot 20 \text{ cm} = 62{,}831\ldots \text{ cm}$.

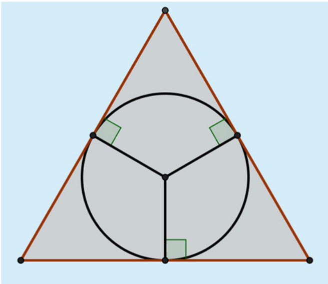
Koko vaijerin pituus on

$6 \cdot 20 \text{ cm} + 62{,}831\ldots \text{ cm} = 182{,}831\ldots \text{ cm} \approx 183 \text{ cm}$.

Vastaus: 183 cm

370. Piirretään tasasivuisen kolmion sisään mahdollisimman suuri ympyrä.

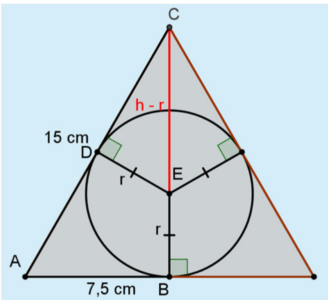
Ympyrä sivuaa jokaista kolmion sivua.

.

Korkeusjana jakaa tasasivuisen kolmion kannan kahteen yhtä pitkään

osaan, joten kannan puolikas on $\dfrac{15\text{ cm}}{2} = 7{,}5\text{ cm}$.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r ja kolmion korkeutta kirjaimella h ja nimetään pisteitä kuvan mukaisesti.



Ratkaistaan kolmion korkeus Pythagoraan lauseen avulla:

$$
\begin{aligned}
7{,}5^2 + h^2 &= 15^2 \\
h^2 &= 15^2 - 7{,}5^2 \\
h^2 &= 168{,}75 \\
h &= (\pm)\sqrt{168{,}75} \\
h &= 12{,}990...
\end{aligned}
$$

Kolmioissa *ABC* ja *EDC* on molemmissa suora kulma, ja kulma *C* on niille yhteinen, joten kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Taulukoidaan kolmioiden sivujen pituuksia.

	Lyhyempi kateetti	Hypotenuusa
kolmio *ABC*	7,5 cm	15 cm
kolmio *EDC*	r	$12{,}990\ldots - r$

Yhdenmuotoisissa kuvioissa vastinjanojen pituuksien suhde on vakio.

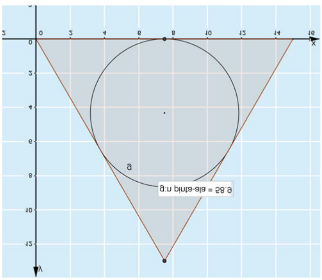
Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä ympyrän säde *r*.

$$\begin{aligned}
\frac{7{,}5}{r} &= \frac{15}{12{,}990\ldots - r} \\
15r &= 7{,}5(12{,}990\ldots - r) \\
15r &= 97{,}427\ldots - 7{,}5r \\
15r + 7{,}5r &= 97{,}427\ldots \\
22{,}5r &= 97{,}427\ldots \quad \|: 22{,}5 \\
r &= 4{,}330\ldots
\end{aligned}$$

Ympyrän säde on 4,330… cm, joten ympyrän pinta-ala on

$A = \pi r^2 = \pi \cdot (4{,}330\ldots\ \text{cm})^2 = 58{,}904\ldots\ \text{cm}^2 \approx 59\ \text{cm}^2$.

Tarkistus:

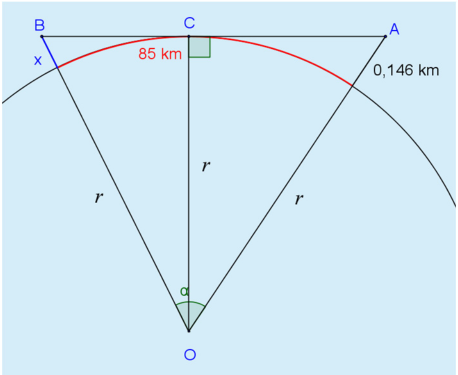


Vastaus: 59 cm^2

371. Merkitään maapallon keskipistettä kirjaimella O, Pasilan linkkitornin huippua kirjaimella A sekä Tallinnassa sijaitsevaa korkeaa paikkaa, josta A juuri ja juuri näkyy, kirjaimella B.

Merkitään Tallinnan paikan korkeutta kirjaimella x.

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Piste A näkyy juuri ja juuri paikasta B, joten jana AB sivuaa ympyrää. Sivuamispisteen C etäisyys maapallon keskipisteestä on siten maapallon säteen r pituinen.

Kolmio OAB koostuu suorakulmaisista kolmioista OCB ja OAC.

Kolmion OCB toinen kateetti on r ja hypotenuusa $r + x$.

Janan x pituus voidaan ratkaista trigonometrian avulla, jos pisteessä O oleva kulma sekä säde r tunnetaan.

Ratkaistaan säde r maapallon ympärysmitan yhtälöstä.

$$\begin{aligned} p &= 40000 \\ 2\pi r &= 40000 \quad \|:2\pi \\ r &= 6366{,}197... \end{aligned}$$

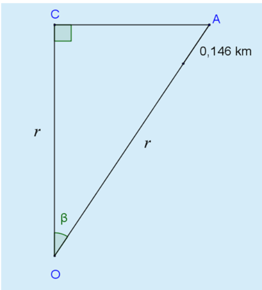
Kolmion OCB terävän kulman laskemista varten lasketaan ensin keskuskulman α suuruus.

Muodostetaan yhtälö kaaren pituudelle ja ratkaistaan siitä kulma α.

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{360°} \cdot p \\ 85 &= \frac{\alpha}{360°} \cdot 40000 && \| \cdot 360° \\ 30600° &= \alpha \cdot 40000 && \| : 40000 \\ \alpha &= 0,765° \end{aligned}$$

Keskuskulma α on suorakulmaisten kolmioiden OCB ja OAC pisteessä O olevien kulmien summa.

Merkitään kulmaa AOC kirjaimella β.



Kulman β viereinen kateetti on r = 6366,1977… km ja hypotenuusa

r + 0,146 = 6366,1977… + 0,146 = 6366,343… km.

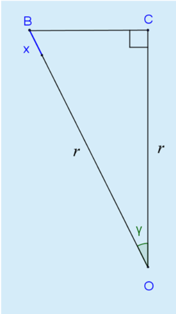
Ratkaistaan kulma β kosinin avulla.

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{6366,1977...}{6366,343...} \\ \beta &= 0,388...° \end{aligned}$$

Merkitään kulmaa COB kirjaimella γ.

Keskuskulma α on kulmien β ja γ summa, joten kulma γ on

$\gamma = \alpha - \beta$ = 0,765° – 0,388…° = 0,376…°.



Kulman $\gamma = 0{,}376\ldots°$ viereinen kateetti on $r = 6366{,}197\ldots$ km ja hypotenuusa $r + x = 6366{,}197\ldots + x$ kilometriä.

Muodostetaan yhtälö kosinin avulla ja ratkaistaan siitä janan pituus x.

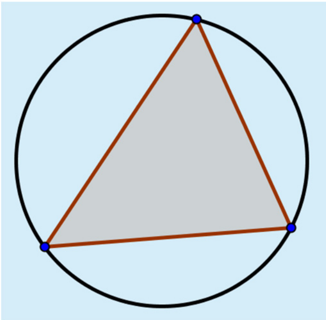
$$\begin{aligned}
\cos 0{,}376\ldots° &= \frac{6366{,}197\ldots}{6366{,}197\ldots + x} \\
0{,}999978\ldots &= \frac{6366{,}197\ldots}{6366{,}197\ldots + x} && \| \cdot (6366{,}197\ldots + x) \\
0{,}999978\ldots \cdot (6366{,}1977\ldots + x) &= 6366{,}197\ldots && \| : 0{,}99978\ldots \\
6366{,}1977\ldots + x &= 6366{,}3355\ldots \\
x &= 0{,}137789\ldots \\
x &\approx 0{,}138
\end{aligned}$$

Paikan B korkeus on 0,138 km eli 138 m.

Tornin huippu on mahdollista nähdä noin 138 metriä korkealta paikalta.

Vastaus: 138 m

372. **a)** Piirretään ohjelmalla kolmio ja ympyrä, joka kulkee kaikkien kolmion kärkien kautta.

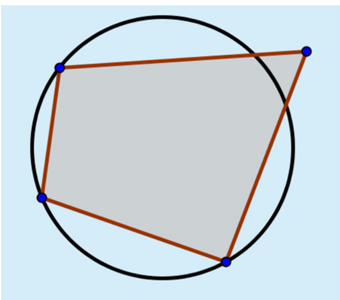


Siirtämällä kolmion kärkiä huomataan, että ympyrä kulkee kaikkien kolmion kärkien kautta, olivatpa kärjet missä tahansa.

Minkä tahansa kolmion ympäri voidaan siis piirtää ympyrä.

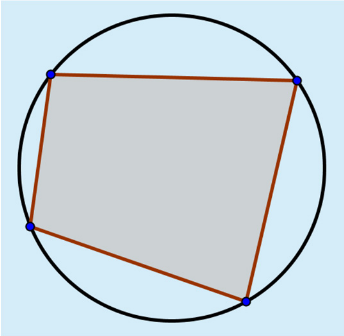
Vastaus: minkä tahansa kolmion

b) Piirretään ohjelmalla nelikulmio ja ympyrä, joka kulkee kolmen nelikulmion kärjen kautta.

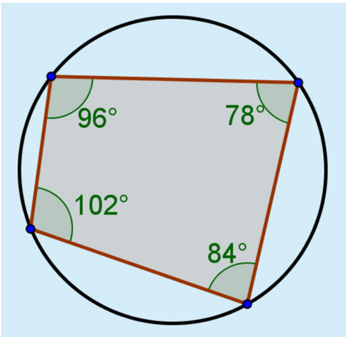


Neljäs kärki ei aina ole ympyrän kehällä (esimerkiksi tässä kuvassa ei ole), joten kaikkien nelikulmioiden ympärille ei voida piirtää ympyrää.

Siirretään neljäskin kärki ympyrän kehälle ja katsotaan, millaiseksi nelikulmio muuttuu.



Mitataan nelikulmion kulmat.



Huomataan, että vastakkaisten kulmien summa on 180°:

96° + 84° = 180° ja 78° + 102° = 180°.

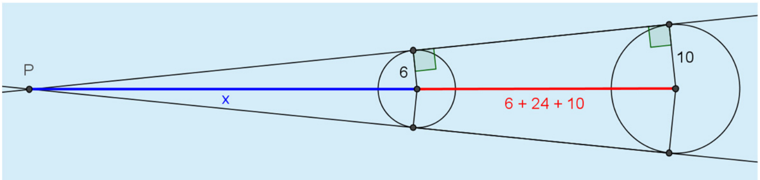
Muuttelemalla nelikulmion muotoa havaitaan, että ympyrä kulkee kaikkien kärkien kautta täsmälleen silloin, kun nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on 180°.

Vastaus: nelikulmion, jonka vastakkaisten kulmien summa on 180°

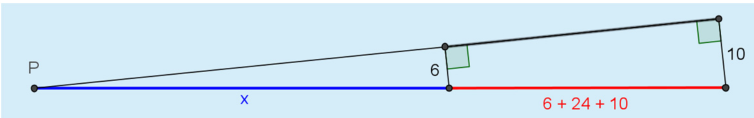
373. Ketju koostuu kahdesta suorasta osasta ja kahdesta kaaren osasta.

Kaaren pituuksien selvittämiseksi ratkaistaan ensin keskuskulmien suuruudet.

Jatketaan tangentteja ja merkitään tangenttien leikkauspistettä kirjaimella P. Merkitään 6-säteisen ympyrän keskipisteen etäisyyttä pisteestä P kirjaimella x.



Tarkastellaan muodostuneita suorakulmaisia kolmioita.



Molemmissa kolmioissa on suora kulma ja pisteessä P oleva kulma on yhteinen, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Taulukoidaan kolmioiden sivujen pituuksia.

	Lyhyempi kateetti	Hypotenuusa
Pieni kolmio	6	x
Iso kolmio	10	$x + 40$

Yhdenmuotoisissa kuvioissa vastinjanojen pituuksien suhde on vakio.

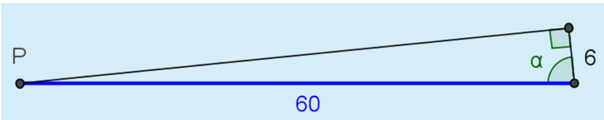
Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä janan pituus x.

$$\begin{aligned}
\frac{6}{10} &= \frac{x}{x+40} \\
10x &= 6(x+40) \\
10x &= 6x+240 \\
10x-6x &= 240 \\
4x &= 240 \quad \|:4 \\
x &= 60
\end{aligned}$$

Ketjun kaarevaa osaa varten tarvitaan keskuskulman suuruus.

Keskuskulman puolikas on sama kuin suorakulmaisen kolmion terävä kulma.

Merkitään terävää kulmaa kirjaimella α.



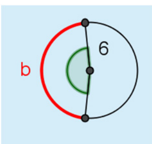
Ratkaistaan kulman α suuruus kosinin avulla.

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{6}{60} \\
\cos\alpha &= 0{,}1 \\
\alpha &= 84{,}260...^\circ
\end{aligned}$$

Keskuskulman suuruus on

$2\alpha = 2 \cdot 84{,}260\ldots^\circ = 168{,}521\ldots^\circ.$

Merkitään pienemmän ympyrän kaaren pituutta kirjaimella b.

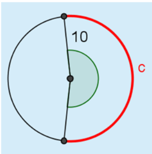


Kaaren b pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{168{,}521...°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6 \text{ cm} = 17{,}647... \text{ cm}.$$

Koska kolmiot ovat yhdenmuotoisia, niiden vastinkulmat ovat yhtä suuria. Siten myös ympyröiden keskuskulmat ovat yhtä suuria.

Merkitään isomman ympyrän kaarta kirjaimella c.



Isomman ympyrän kaari vastaa isompaa keskuskulmaa.

Merkitään tätä kulmaa kirjaimella β. Keskuskulmien summa on täyskulma, joten kulman β suuruus on

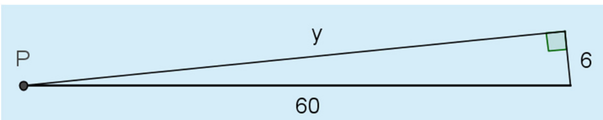
$\beta = 360° – 168{,}521…° = 191{,}478…°$.

Kaaren c pituus on

$$c = \frac{191{,}478...°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm} = 33{,}419... \text{ cm}.$$

Lasketaan vielä suorien osien pituudet. Tarkastellaan pienempää suorakulmaista kolmiota.

Merkitään kolmion pidempää kateettia kirjaimella y.



Ratkaistaan y Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
6^2 + y^2 &= 60^2 \\
y^2 &= 60^2 - 6^2 \\
y^2 &= 3564 \\
y &= (\pm)\sqrt{3564} \\
y &= 59,699...
\end{aligned}
$$

Merkitään isomman kolmion pidempää kateettia kirjaimella z.

Ratkaistaan z Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
10^2 + z^2 &= 100^2 \\
z^2 &= 100^2 - 10^2 \\
z^2 &= 9900 \\
z &= (\pm)\sqrt{9900} \\
z &= 99,498...
\end{aligned}
$$

Suorien osien pituus on janojen z ja y erotus.

$s = z - y = 99{,}498\ldots$ cm – $59{,}699\ldots$ cm = $39{,}799\ldots$ cm

Ketjun kokonaispituus on

$2s + b + c$
$= 2 \cdot 39{,}799\ldots$ cm + $17{,}647\ldots$ cm + $33{,}419\ldots$ cm
$= 130{,}665\ldots$ cm
≈ 130 cm.

Vastaus: 130 cm