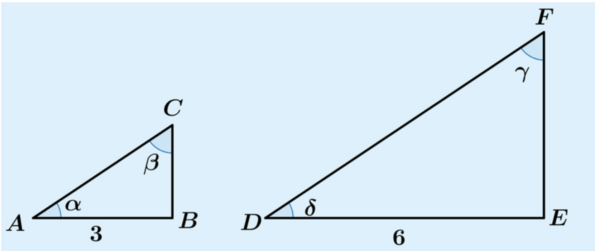
2 YHDENMUOTOISUUS JA TASOKUVIOITA

2.1 Yhdenmuotoisuus

ALOITA PERUSTEISTA

201.



a) Pisteen A vastinpiste on piste D.

b) Kulman α vastinkulma on kulma δ.

c) Janan DE vastinsivu on AB.

d) Koska janan AB vastinsivu on DE, niin kolmioiden yhdenmuotoisuussuhde eli mittakaava on 6 : 3 eli 2 : 1.

Vastaus: **a)** D **b)** δ **c)** AB **d)** 2 : 1

202. Pituuksien muutoksien suhdeluku on 10.

a) 120 mm = 12 cm

b) 6,3 km = 63 hm = 630 dam = 6300 m

c) 5,2 dm = 52 cm = 520 mm

d) 2500 dm = 250 m = 0,25 km

e) 0,79 km = 790 m = 79 000 cm

f) 970 mm = 97 cm = 9,7 dm = 0,97 m = 0,097 dam
= 0,0097 hm = 0,000 97 km

Vastaus: **a)** 12 cm **b)** 6300 m **c)** 520 mm **d)** 0,25 km
e) 79 000 cm **f)** 0,000 97 km

203. Muutetaan suuruusluokat I–IV helpommin käsitettäviksi yksiköiksi.

2000 mm = 2 m
40 dm = 4 m
0,030 km = 30 m
100 000 cm = 1 km

A Ihmisen pituus voi olla 2 metriä, joten sitä vastaa vaihtoehto I.

B Suomen pituus on noin 1000 km, joten sitä vastaa vaihtoehto V.

C Kaupungin keskustan pääkadun pituus voi olla 1 km, joten sitä vastaa vaihtoehto IV.

D Kerrostalon korkeus voi olla 30 metriä, joten sitä vastaa vaihtoehto III.

E Farmariauton pituus voi olla 4 metriä, joten sitä vastaa vaihtoehto II.

Vastaus: I: A, II: E, III: D, IV: C ja V: B

204. **a)** Oikein, kuviota kierrettäessä sen muoto ja koko eivät muutu.

Vastaus: oikein

b) Väärin, mittakaava on vastinjanojen pituuksien suhde.

Vastaus: väärin, vastinjanojen pituuksien

c) Mittakaavamerkintä 1:200 tarkoittaa, että esimerkiksi 1 cm kuvassa vastaa 200 cm luonnossa. Kuva on siis pienennös alkuperäisestä.

Vastaus: väärin, pienennös

d) Mittakaava 1:1 tarkoittaa, että kuviot ovat toistensa kopioita ja siten täsmälleen samankokoisia.

Vastaus: oikein

205. **a)** Veistokset ovat yhdenmuotoiset. Veistosten vastinmittojen pituudet ovat 55,5 cm ja x sekä 69,5 cm ja 56,5 cm.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinmittojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{55{,}5}{x} = \frac{69{,}5}{56{,}5}$.

Vastaus: $\frac{55{,}5}{x} = \frac{69{,}5}{56{,}5}$

b) Ratkaistaan a-kohdan verrannosta pienemmän veistoksen

leveys x $\frac{55{,}5}{x} = \frac{69{,}5}{56{,}5}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$
\begin{aligned}
69{,}5x &= 55{,}5 \cdot 56{,}5 \\
69{,}5x &= 3135{,}75 \quad \| : 69{,}5 \\
x &= 45{,}118\ldots \\
x &\approx 45{,}1
\end{aligned}
$$

Pienemmän veistoksen leveys on 45,1 cm

Vastaus: 45,1 cm

206. **a)** Kuviot ovat yhdenmuotoisia. Kuvioiden vastinsivujen pituudet ovat x ja 2,5 cm sekä 3,6 cm ja 5,7 cm.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen pituuksien suhde on

yhtä suuri, niin $\frac{x}{2,5}=\frac{3,6}{5,7}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$
\begin{aligned}
5,7x &= 2,5\cdot 3,6\\
5,7x &= 9 \quad \| :5,7\\
x &= \frac{9}{5,7} = 1,578\ldots\\
x &\approx 1,6
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\frac{x}{2,5}=\frac{3,6}{5,7}$, $x\approx 1,6$ cm

b) Kolmioiden vastinsivujen pituudet ovat x ja 5,0 m sekä 2,0 m ja 1,0 m.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen pituuksien suhde on

yhtä suuri, niin $\frac{x}{5,0}=\frac{1,0}{2,0}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$
\begin{aligned}
2,0x &= 5,0\cdot 1,0\\
2,0x &= 5,0 \quad \| :2,0\\
x &= \frac{5,0}{2,0}\\
x &= 2,5
\end{aligned}
$$

Vastaus: $\frac{x}{5,0}=\frac{1,0}{2,0}$, $x = 2,5$ m

207. **a)**

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	100 000
2	x

Pituus kartalla ja pituus luonnossa ovat suoraan verrannollisia. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x kertomalla ristiin.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{100\,000}{x} \\ 1 \cdot x &= 2 \cdot 100\,000 \\ x &= 200\,000 \end{aligned}$$

Järven pituus on 200 000 cm = 2 km

Vastaus: 2 km

TAPA II:
Koska mittakaava on 1:100 000, ovat pituudet luonnossa 100 000-kertaisia karttaan verrattuna.

Järven pituus on siis 2 cm · 100 000 = 200 000 cm = 2 km.

Vastaus: 2 km

b) Muunnetaan saaren pituus senttimetreiksi.
600 m = 60 000 cm

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	100 000
x	60 000

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{100\,000}{60\,000} \\ 100\,000 \cdot x &= 1 \cdot 60\,000 \\ x &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Saaren pituus on 0,6 cm = 6 mm

Vastaus: 6 mm

TAPA II:

Etäisyydet kartalla ovat $\frac{1}{100\,000}$ etäisyyksistä luonnossa, joten saaren

pituus on kartalla $\frac{600\text{ m}}{100\,000}$ = 0,006 m = 6 mm.

Vastaus: 6 mm

208. **a)** Suhde 4 000 000 : 1 tarkoittaa, että malli on 4 000 000 kertainen suurennos. Taulukoidaan tunnetut tiedot

.

Mallin leveys (cm)	Entsyymin leveys (cm)
4 000 000	1
21	x

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä leveys x kertomalla ristiin.

$$\frac{4\,000\,000}{21} = \frac{1}{x}$$
$$4\,000\,000 \cdot x = 1 \cdot 21 \qquad \| : 4\,000\,000$$
$$x = 0{,}00000525 \text{ cm}$$

Entsyymin leveys on 0,00000525 cm = 52,5 nm
Vastaus: 0,00000525 cm = 52,5 nm

b) Muunnetaan leveydet samaan yksikköön:
5 m = 500 cm

Suurennussuhde on

suurempi mitta : pienempi mitta = $\frac{\text{suurempi mitta}}{\text{pienempi mitta}}$, joten suhde on

$$\frac{500\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = \frac{50}{1} = 50:1.$$

Suurennussuhde on 50 : 1.
Vastaus: 50 : 1

VAHVISTA OSAAMISTA

209. **a)** Muutetaan pituudet samaan yksikköön.

800 m = 80 000 cm

Kartan mittakaava on muotoa

pituus kartalla : pituus luonnossa = $\frac{\text{pituus kartalla}}{\text{pituus luonnossa}}$,

joten mittakaava on

$$\frac{16\text{ mm}}{800\,000\text{ mm}} = \frac{1}{50\,000}.$$

Vastaus: 1 : 50 000.

b)

Pituus kartalla (cm)	Pituus luonnossa (cm)
1	50 000
6	x

Pituus kartalla ja pituus luonnossa ovat suoraan verrannollisia.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x kertomalla ristiin.

$$\frac{1}{6} = \frac{50\,000}{x}$$
$$1 \cdot x = 6 \cdot 50\,000$$
$$x = 300\,000$$

Puiston pituus on 300 000 cm = 3 km

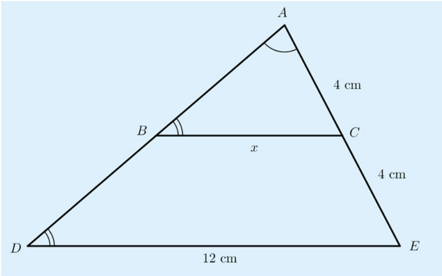
Vastaus: 3 km

TAPA II:

Koska mittakaava on 1 : 50 000, ovat pituudet luonnossa 50 000-kertaiset karttaan verrattuna.

Puiston pituus on siis 6 cm · 50 000 = 300 000 cm = 3 km.
Vastaus: 3 km

210. **a)** Merkitään kolmioiden kärkipisteitä kirjaimilla.



Kolmioilla *ABC* ja *ADE* on yhteinen kulma *A* ja lisäksi niillä on yhtä suuret kulmat *CBA* ja *EDA*, joten kk-lauseen nojalla kolmiot *ABC* ja *ADE* ovat yhdenmuotoisia.

Kolmioiden sivut *AC* ja *AE* sekä *BC* ja *DE* ovat toistensa vastinjanoja.

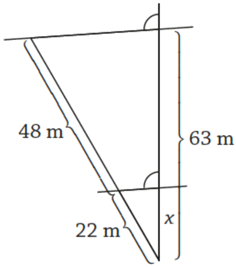
Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{4}{4+4}=\frac{x}{12}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$8x = 4 \cdot 12$$
$$8x = 48 \quad \| : 8$$
$$x = 6$$

Vastaus: $x = 6$ cm

b)



Isolla ja pienellä kolmiolla on yksi yhteinen kulma.

Lisäksi kolmioissa on kulmat, jotka ovat yhtä suurien kulmien vieruskulmia ja siten yhtä suuria keskenään.

Iso ja pieni kolmio ovat siis yhdenmuotoisia.

Kolmioiden sivut x ja 63 m sekä 22 m ja 22 m + 48 m ovat toistensa vastinjanoja.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on

yhtä suuri, niin $\frac{x}{63} = \frac{22}{22+48}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$
\begin{aligned}
70x &= 22 \cdot 63 \\
70x &= 1386 \quad \|:70 \\
x &= \frac{1386}{70} \\
x &= 19{,}8 \approx 20
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x \approx 20$ m

c) Kolmiot ovat yhdestä kärjestä kiinni toisissaan. Tässä kärjessä olevat kulmat ovat toistensa ristikulmina yhtä suuret.

Lisäksi kolmioissa on kaksi muuta yhtä suurta kulmaa. Kolmio ovat siis yhdenmuotoisia.

Kolmioiden vastinjanojen pituudet ovat
x ja 54 mm sekä 34 mm ja 61 mm.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{x}{54}=\frac{34}{61}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$
\begin{aligned}
61x &= 54 \cdot 34 \\
61x &= 1836 \quad \| : 61 \\
x &= 30{,}098\ldots \\
x &\approx 30
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x \approx 30$ mm

211. Määritetään salin todellinen pituus ja leveys.

Koska mittakaava on 1:200, ovat todelliset pituudet 200-kertaiset piirrokseen verrattuna.

Salin pituus on 9,6 cm · 200 = 1920 cm = 19,2 m ja
leveys on 7,9 cm · 200 = 1580 cm = 15,8 m.

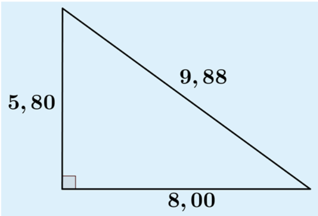
Salin pinta-ala on pituus · leveys eli

$A = 19{,}2 \text{ m} \cdot 15{,}8 \text{ m} = 303{,}36 \text{ m}^2 \approx 300 \text{ m}^2$.

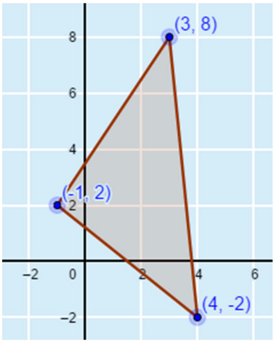
Vastaus: 300 m^2

212. Mittakaava on 2 : 1, joten on piirrettävä kolmio, jonka sivujen pituudet ovat kaksinkertaiset alkuperäiseen kolmioon verrattuna.

Koska alkuperäinen kolmio on suorakulmainen, kannattaa suurennoksen piirtäminen aloittaa kateeteista ja piirtää ne akselien suuntaisesti. Tällöin hypotenuusa asettuu oikeaan mittaan.



213. Piirretään annetut pisteet koordinaatistoon.



a) Suurennos 3:1 tarkoittaa kuvion mittojen kolminkertaistamista.

Alkuperäisessä kuviossa pisteestä A päästään pisteeseen B kulkemalla 4 ruutua oikealle ja 6 ruutua ylös.

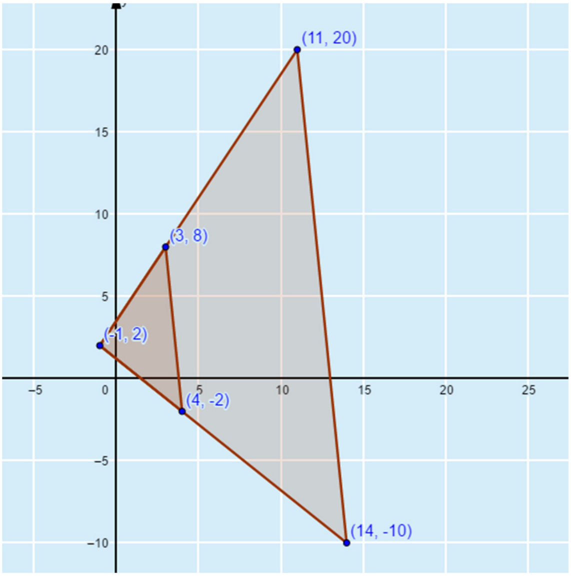
Suurennoksessa vastaava siirtymä koordinaatistossa tulee olla $4 \cdot 3 = 12$ oikealla ja $6 \cdot 3 = 18$ ylös.

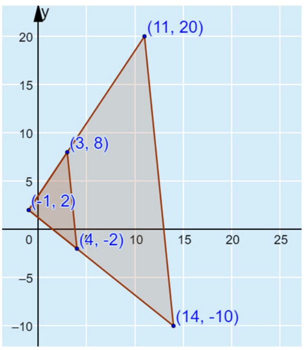
Alkuperäisessä kuviossa pisteestä A päästään pisteeseen C kulkemalla 5 ruutua oikealle ja 4 ruutua alas.

Suurennoksessa vastaava siirtymä koordinaatistossa tulee olla $5 \cdot 3 = 15$ oikealla ja $4 \cdot 3 = 12$ ylös.

Valitaan pisteen A vastinpisteeksi esimerkiksi piste A ja piirretään B:n ja C:n vastinpisteet koordinaatistoon.

B:n vastinpiste on (–1 + 12, 2 + 18) = (11, 20) ja
C:n vastinpiste on (–1 + 15, 2 – 12) = (14, –10).



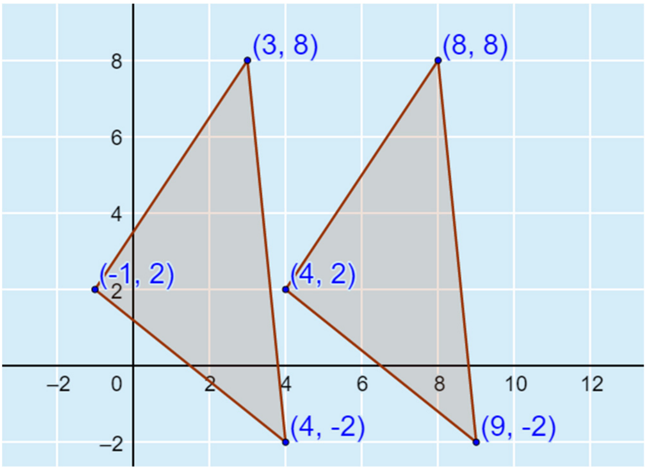
Vastaus: esim. 

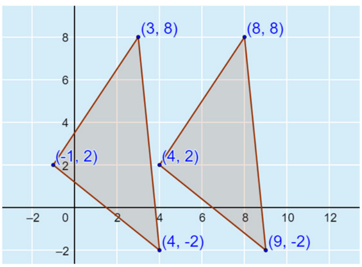
b) Alkuperäisessä kuviossa pisteestä A päästään pisteeseen B kulkemalla 4 ruutua oikealle ja 6 ruutua ylös ja pisteeseen C kulkemalla 5 ruutua oikealle ja 4 ruutua alas.

Yhtenevä kuvio on täsmälleen samankokoinen ja samassa asennossa, joten uudessa kuviossa B:n vastinpiste saadaan kulkemalla A:n vastinpisteestä (4, 2) sama siirtymä.
Samoin saadaan C:n vastinpiste.

B:n vastinpiste on $(4 + 4, 2 + 6) = (8, 8)$.
C:n vastinpiste on $(4 + 5, 2 – 4) = (9, –2)$.

Piirretään kuviot.

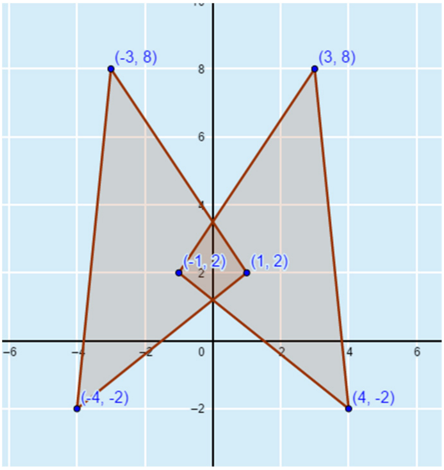


Vastaus: 

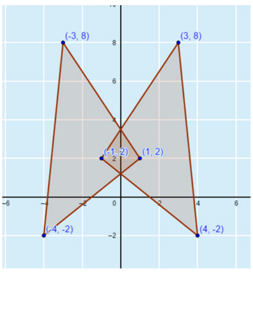
c) Peilauksessa y-akselin suhteen jokaisen pisteen *x*-koordinaatti vaihtuu vastaluvuksi.

A:n vastinpiste on tällöin (1, 2),
B:n (–3, 8) ja C:n (–4, –2).

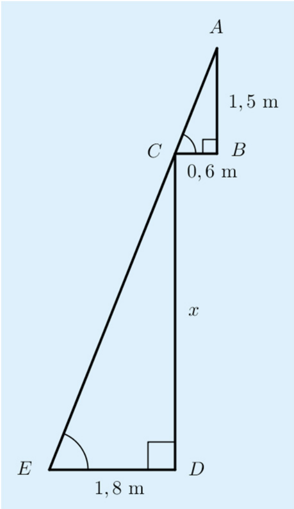
Piirretään kuviot.



Vastaus:



214. Merkitään kolmioiden kärkipisteitä kirjaimilla.



Janat *CB* ja *ED* ovat yhdensuuntaiset, joten kulmat *BCA* ja *DEC* ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Lisäksi kolmioissa *ABC* ja *CDE* on suora kulma, joten kk-lauseen nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Kolmioiden sivut *AB* ja *CD* sekä *CB* ja *ED* ovat toistensa vastinjanoja. Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{1,5}{x} = \frac{0,6}{1,8}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$0,6x = 1,5 \cdot 1,8$$
$$0,6x = 2,7 \quad || : 0,6$$
$$x = \frac{2,7}{0,6}$$
$$x = 4,5$$

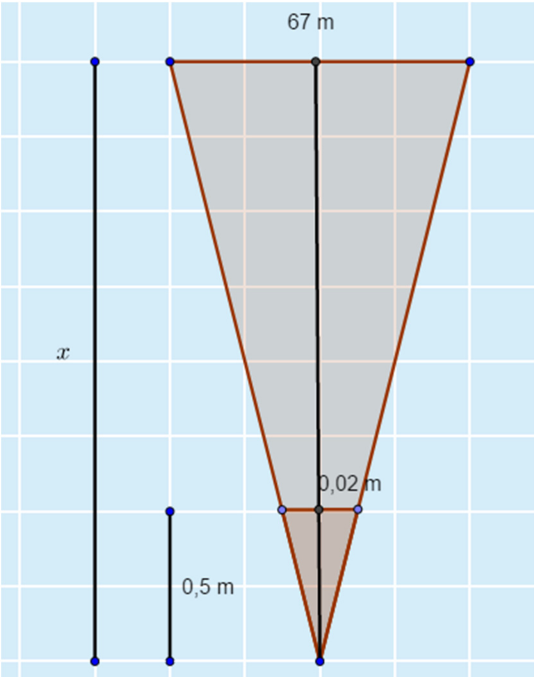
Kaivon syvyys x on 4,5 m.

Vastaus: $x = 4,5$ m

215. Näkökulman muodostamat kolmiot ovat yhdenmuotoisia.

Muunnetaan mitat samaan yksikköön 2,0 cm = 0,02 m.

Merkitään lentokoneen etäisyyttä Magnuksen päästä kirjaimella x.



Etäisyyden x suhde viivoittimen etäisyyteen 0,5 m on yhtä suuri kuin lentokoneen pituuden 67 m suhde lentokoneen mitattuun pituuteen 0,02 m.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siinä lentokorkeus x.

$$\frac{x}{0,5\,\text{m}} = \frac{67\,\text{m}}{0,02\,\text{m}} \quad \|\cdot 0,5\,\text{m}$$

$$x = \frac{67\,\text{m}}{0,02\,\text{m}} \cdot 0,5\,\text{m} = 1675\,\text{m}$$

Lentokoneen lentokorkeus on 1675 m ≈ 1700 m.

Vastaus: 1700 m

216. **a)** Koska suurennoksen mittakaava on 65 : 1, pituus luonnossa on

$\frac{1}{65}$-kertainen kuvan pituuteen verrattuna.

Suomun leveys on 5 mm : 65 = 0,0769… mm.

Koska $1\mu\text{m} = \frac{1}{1\,000\,000}\,\text{m} = \frac{1}{1\,000\,000} \cdot 1000\ \text{mm} = \frac{1}{1000}\,\text{mm}$,

niin millimetrit voidaan muuttaa mikrometreiksi
kertomalla luvulla 1 000.

$$\begin{aligned} 0{,}0769\ldots\ \text{mm} &= 0{,}0769\ldots\ \ldots \cdot 1\,000\ \mu\text{m} \\ &= 76{,}9\ldots\ \mu\text{m} \\ &\approx 77\ \mu\text{m}. \end{aligned}$$

Suomu on todellisuudessa noin 77 µm leveä.

Vastaus: 77 µm

b) Muutetaan pituudet samaan yksiköön.

Koska $10\mu\text{m} = \frac{1}{1\,000\,000}\,\text{m} = \frac{1}{1\,000\,000} \cdot 100\ \text{cm} = \frac{1}{10\,000}\,\text{cm}$,

niin senttimetrit voidaan muuttaa nanometreiksi
kertomalla luvulla 10 000.

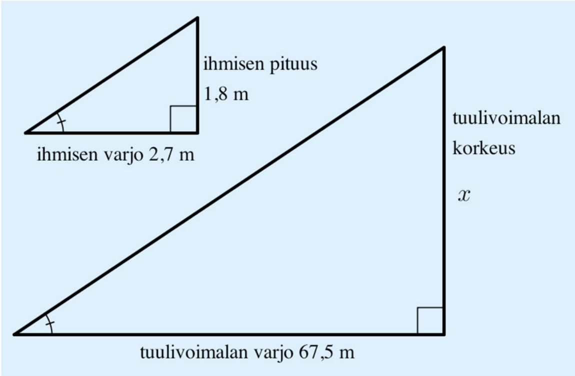
$5{,}0\ \text{cm} = 5{,}0 \cdot 10\,000\ \mu\text{m} = 50\,000\ \ \mu\text{m}.$

Mittakaava on $\frac{\text{pituus kuvassa}}{\text{pituus luonnossa}}$, joten $\frac{50\,000}{10} = \frac{5\,000}{1}$.

Kuvan mittakaava on 5000 : 1.

Vastaus: 5000 : 1

217. Piirretään mallikuva.



Ihmisen pituus, varjo ja auringon säteet muodostavat kolmion, jonka yksi kulma on suora kulma ja yksi kulma on auringon korkeuskulma.

Tuulivoimalan korkeus, varjo ja auringon säteet muodostavat kolmion, jonka yksi kulma on suora kulma ja yksi kulma on auringon korkeuskulma.

Koska auringon korkeuskulma on molemmissa tapauksissa sama, niin kolmioilla on kaksi yhtä suurta kulmaa. Kk-lauseen nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoisia.

Tuulivoimalan korkeus ja ihmisen pituus sekä varjojen pituudet ovat toistensa vastinsivuja. Merkitään tuulivoimalan korkeutta kirjaimella x. Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinsivujen suhde on sama, niin
$\frac{x}{1,8}=\frac{67,5}{2,7}$.

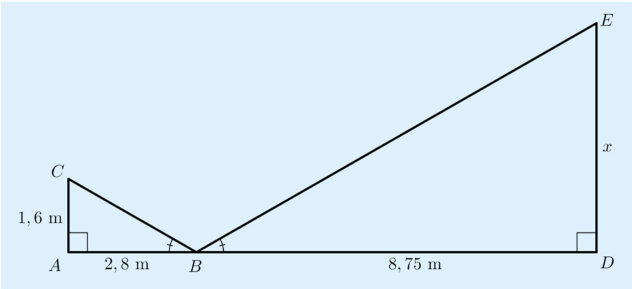
Ristiin kertomalla saadaan

$$
\begin{aligned}
2,7x &= 67,5 \cdot 1,8 \\
2,7x &= 121,5 \quad || : 2,7 \\
x &= \frac{121,5}{2,7} \\
x &= 45
\end{aligned}
$$

Tuulivoimala on 45 m korkea.

Vastaus: 45

218. Merkitään syntyvien kolmioiden kärkipisteitä kirjaimilla ja patsaan korkeutta kirjaimella x.



Kolmioissa *ABC* ja *BDE* on suora kulma ja lisäksi valo heijastuu peilistä samassa kulmassa kuin se siihen osuu, joten kulmat *CBA* ja *DBE* ovat yhtä suuria.

Kk-lauseen nojalla kolmiot *ABC* ja *BDE* ovat yhdenmuotoisia.

Kolmioiden sivut *CA* ja *ED* sekä *AB* ja *DB* ovat toistensa vastinjanoja.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on

yhtä suuri, niin $\frac{1{,}6}{x} = \frac{2{,}8}{8{,}75}$.

Ristiin kertomalla saadaan

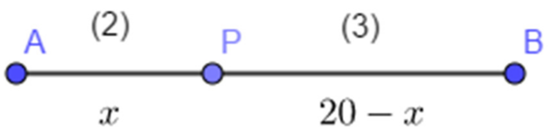
$$2{,}8x = 1{,}6 \cdot 8{,}75$$
$$2{,}8x = 14 \quad || : 2{,}8$$
$$x = \frac{14}{2{,}8}$$
$$x = 5{,}0$$

Patsas on 5,0 m korkea.

Vastaus: 5,0 m

219. Piirretään kuva. Merkitään janan AB pituutta kirjaimella x, jolloin jana PB pituus on $20 - x$.

Janan AP pituus on 2 osaa janan AB pituudesta, kun jana PB on 3 osaa.



Muodostetaan verranto.

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{x} &= \frac{3}{20-x} \\
2(20-x) &= 3x \\
40-2x &= 3x \\
5x &= 40 \quad ||:5 \\
x &= 8
\end{aligned}
$$

Janan AP pituus on 8 cm.

Vastaus: 8 cm

220. Kun lipusta tehdään pienennös mittakaavassa 1 : 12, sen sivujen pituudet lyhenevät 12-osaan alkuperäiseen verrattuna.

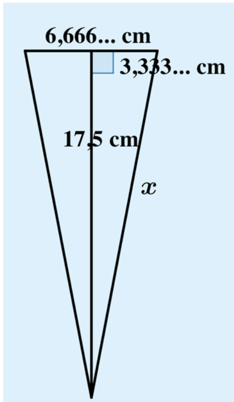
Pienennetyn lipun kannan pituus on $\frac{80\text{ cm}}{12} = 6{,}666\ldots\text{cm} \approx 6{,}67\text{ cm}$ ja

korkeus on $\frac{2{,}10\text{ m}}{12} = \frac{210\text{ cm}}{12} = 17{,}5\text{ cm}$.

Pienennetyn lipun pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{6{,}666\ldots\text{ cm} \cdot 17{,}5\text{ cm}}{2} = 58{,}333\ldots\text{ cm}^2 \approx 58{,}3\text{ cm}^2$$

Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa sen kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.



Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat $\frac{6{,}666\ldots\text{ cm}}{2} = 3{,}333\ldots\text{ cm}$ ja 17,5 cm.

Merkitään suorakulmaisen kolmion hypotenuusaa kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 3{,}333\ldots^2 + 17{,}5^2$$
$$x^2 = 317{,}361\ldots$$
$$x = \sqrt{317{,}361\ldots} \quad \text{tai } x = -\sqrt{317{,}361\ldots}$$
$$x = 17{,}814\ldots \quad \text{tai } x = -17{,}814\ldots$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $x = 17{,}814\ldots$.

Sivujen pituudet ovat noin 17,8 cm, 17,8 cm ja 6,67 cm.
Pinta-ala on noin 58,3 cm^2.

Vastaus: Sivujen pituudet ovat 17,8 cm, 17,8 cm ja 6,67 cm.
Pinta-ala on 58,3 cm^2.

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

221. Lasketaan aluksi, kuinka pitkä matka Porista Raumalle on luonnossa.

Koska mittakaava on 1:200 000, ovat pituudet luonnossa 200 000-kertaiset karttaan verrattuna.

Matka Porista Raumalle luonnossa on
$25 \text{ cm} \cdot 200\,000 = 5\,000\,000 \text{ cm}$.

Muutetaan matka Porista Raumalle toiseen mittakaavaan.

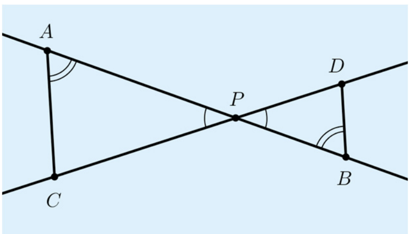
Koska mittakaava on 1:75 000, pituudet kartalla ovat $\frac{1}{75\,000}$ -kertaiset luonnossa oleviin mittoihin verrattuna.

Matka Porista Raumalle kartalla on

$5\,000\,000 \text{ cm} : 75\,000 = 66{,}66\ldots \text{ cm} \approx 67 \text{ cm}$.

Vastaus: 67 cm

222. Piirretään kuva.

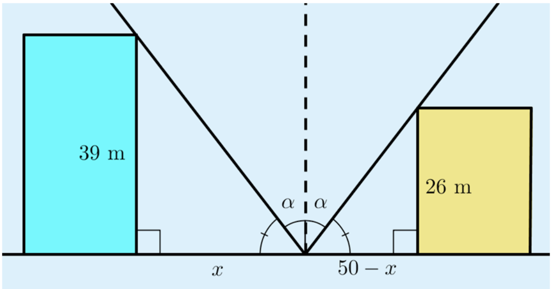


Kolmioiden *ACP* ja *PBD* kulmat *APC* ja *BPD* ovat ristikulmia eli yhtä suuria.

Lisäksi janat *AC* ja *DB* ovat yhdensuuntaisia, joten kulmat *CAP* ja *DBP* ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Täten kk-lauseen nojalla kolmiot *ACP* ja *PBD* ovat yhdenmuotoisia.

223. Merkitään tähtiharrastajan etäisyyttä korkeammasta talosta kirjaimella x. Tällöin tähtiharrastajan etäisyys matalammasta talosta on $50 - x$.



Tarkastellaan muodostuneita kolmioita. Molemmissa kolmioissa on suora kulma. Lisäksi kulmat, joiden kärkenä on tähtiharrastaja, ovat yhtä suuret ($90° - \alpha$). Siten kolmiot ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoisia.

Kolmioiden sivut 39 m ja 26 m sekä x ja $50 - x$ ovat
toistensa vastinjanoja.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{39}{26} = \frac{x}{50 - x}$.

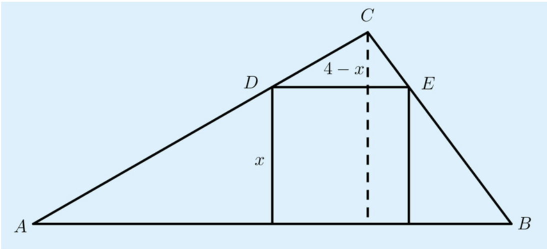
Ristiin kertomalla saadaan

$$
\begin{aligned}
26x &= 39(50 - x) \\
26x &= 1950 - 39x \\
26x + 39x &= 1950 \\
65x &= 1650 \quad \| : 65 \\
x &= \frac{1950}{65} \\
x &= 30
\end{aligned}
$$

Tähtiharrastajan etäisyys korkeammasta talosta on 30 m.

Vastaus: 30 m

224. Piirretään mallikuva. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x. Tällöin kolmion DEC korkeus on $4 - x$.



Kolmioilla ABC ja DEC on yhteinen kulma C ja lisäksi janat AB ja DE ovat yhdensuuntaiset, joten kulmat CBA ja CED ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Täten kk-lauseen nojalla kolmiot ABC ja DCE ovat yhdenmuotoisia.

Kolmioiden korkeusjana sekä kannat ovat toistensa vastinjanoja.

Koska yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen pituuksien suhde on yhtä suuri, niin $\frac{4}{4-x} = \frac{10}{x}$.

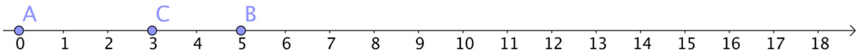
Ristiin kertomalla saadaan

$$\begin{aligned}
4x &= 10(4 - x) \\
4x &= 40 - 10x \\
4x + 10x &= 40 \\
14x &= 40 \quad \| : 14 \\
x &= \frac{40^{(2}}{14} = \frac{20}{7} = 2{,}85\ldots \\
x &\approx 2{,}9
\end{aligned}$$

Neliön sivun pituus on noin 2,9 cm.

Vastaus: 2,9 cm

225.



Merkitään pisteen D paikkaa lukusuoralla kirjaimella x.

Nyt janan DA pituus on $x - 0 = x$ ja janan DB pituus on $x - 5$.

Janan CA pituus on $3 - 0 = 3$ ja janan CB pituus on $5 - 3 = 2$.

Verranto $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB}$ on voimassa, kun $\dfrac{3}{2} = \dfrac{x}{x-5}$.

Ristiin kertomalla saadaan

$$\begin{aligned} 3(x-5) &= 2x \\ 3x - 15 &= 2x \\ 3x - 2x &= 15 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Pisteen D paikka lukusuoralla on 15.

Vastaus: $D = 15$

2.2 Trigonometriaa

ALOITA PERUSTEISTA

226. **a)** sin 35° = 0,573… ≈ 0,57

b) 15cos 12° = 14,672… ≈ 14,67

c) tan 45° + 1,25 = 2,25

d) sin 35° + sin 25° = 0,996…≈ 1,00

227. **a)** Kysytty sivu x on kulman 32° viereinen sivu. Lisäksi tunnetaan hypotenuusa, joten muodostetaan yhtälö kosinin avulla.

$$\begin{aligned} \cos 32^\circ &= \frac{x}{56} \qquad \| \cdot 56 \\ 56 \cdot \cos 32^\circ &= x \\ x &= 47,490... \\ x &\approx 47 \end{aligned}$$

Vastaus: $x \approx 47$

b) Kysytty sivu x on kulman 51° vastainen sivu. Lisäksi tunnetaan hypotenuusan pituus, joten muodostetaan yhtälö sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin 51^\circ &= \frac{x}{4,2} \qquad \| \cdot 4,2 \\ x &= 4,2 \cdot \sin 51^\circ \\ x &= 3,264... \\ x &\approx 3,3 \end{aligned}$$

Vastaus: $x \approx 3,3$ m

c) Kysytty sivu x on kolmion hypotenuusa.

Lisäksi tunnetaan kulman 63° viereinen sivu, joten muodostetaan yhtälö kosinin avulla.

$$\begin{aligned} \cos 63° &= \frac{14}{x} && \| \cdot x \\ x \cdot \cos 63° &= 14 && \| : \cos 63° \\ x &= \frac{14}{\cos 63°} \\ x &= 30{,}837... \\ x &\approx 31 \end{aligned}$$

Vastaus: $x \approx 31$ cm

228. **a)** Kysytty sivu x on kolmion hypotenuusa.

Lisäksi tunnetaan kulman 63° vastainen sivu, joten muodostetaan yhtälö sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin 47{,}2° &= \frac{5{,}5}{x} && \| \cdot x \\ x \cdot \sin 47{,}2° &= 5{,}5 && \| : \sin 47{,}2° \\ x &= \frac{5{,}5}{\sin 47{,}2°} \\ x &= 7{,}495... \\ x &\approx 7{,}5 \end{aligned}$$

Vastaus: $x \approx 7{,}5$

b) Kolmio *ABC* on tasakylkinen, joten korkeusjana *h* jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.

Korkeus *h* on kulman 61,3° vastainen sivu.

Lisäksi tunnetaan kulman 61,3° viereinen sivu, joten muodostetaan yhtälö tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan 61{,}3^\circ &= \frac{h}{3{,}14} \qquad \| \cdot 3{,}14 \\ h &= 3{,}14 \cdot \tan 61{,}3^\circ \\ h &= 5{,}735... \\ h &\approx 5{,}74 \end{aligned}$$

Kolmion *ABC* kannan pituus on 2 · 3,14 m = 6,28 m ja pinta-ala on

$$A = \frac{5{,}735... \cdot 6{,}28}{2} = 18{,}008... \approx 18{,}0\ (\text{m}^2).$$

Vastaus: $h \approx 5{,}74$ m, pinta-ala n. 18,0 m^2

229. **a)**

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= 0{,}35 \\ \alpha &= 20{,}487...^\circ \\ \alpha &\approx 20^\circ \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= 0{,}47 \\ \alpha &= 61{,}965...^\circ \\ \alpha &\approx 62^\circ \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= 1 \\ \alpha &= 45^\circ \end{aligned}$$

230. **a)** Kulman α suuruus lasketaan kosinin avulla käyttäen kulman viereisen kateetin ja hypotenuusan pituuksia.

$$\cos\alpha = \frac{4,0}{5,2}$$
$$\alpha = 39,715...^\circ$$
$$\alpha \approx 40^\circ$$

b) Kulman α suuruus lasketaan tangentin avulla käyttäen kulman vastaisen ja viereisen kateetin pituuksia.

$$\tan\alpha = \frac{3,3}{4,0}$$
$$\alpha = 39,522...^\circ$$
$$\alpha \approx 40^\circ$$

231. **a)** Kulman α viereisen kateetin ja hypotenuusan pituudet tunnetaan, joten ratkaistaan kulman suuruus kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{3,2}{6,5}$$
$$\alpha = 60,507...^\circ$$
$$\alpha \approx 61^\circ$$

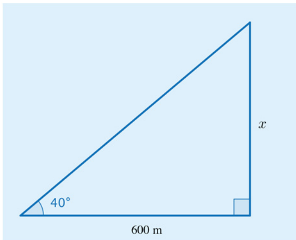
b) Kulman α vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituudet tunnetaan, joten ratkaistaan kulman suuruus sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{3,7}{6,0}$$
$$\alpha = 38,073...^\circ$$
$$\alpha \approx 38^\circ$$

c) Kulman α vastaisen ja viereisen kateetin pituudet tunnetaan, joten ratkaistaan kulman suuruus tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{5,2}{3,0}$$
$$\alpha = 60,018...^\circ$$
$$\alpha \approx 60^\circ$$

232. Kulman 40° viereisen kateetin pituus tunnetaan, joten lasketaan kulman vastaisen kateetin x pituus tangentin avulla.



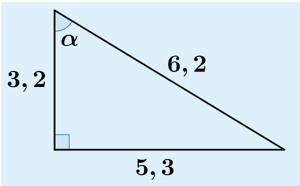
$$\tan 40^\circ = \frac{x}{600} \qquad \| \cdot 600$$
$$x = 600 \cdot \tan 40^\circ$$
$$x = 503,459...$$
$$x \approx 500$$

Kraatterin syvyys x on noin 500 m.

Vastaus: $x = 500$ m

VAHVISTA OSAAMISTA

233. Kulman α vastaisen kateetin pituus on 5,3,
viereisen kateetin pituus on 3,2 ja kolmion hypotenuusan pituus on 6,2.



Kulman kosini on kulman viereisen kateetin ja hypotenuusan suhde, joten väittämä A on tosi.

Kulman sini on kulman vastaisen kateetin ja hypotenuusan suhde, joten väittämä B on epätosi.

Kulman tangentti on kulman vastaisen ja viereisen kateetin suhde, joten väittämä C on epätosi.

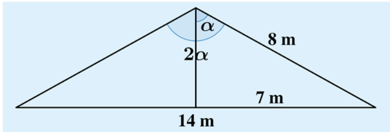
Ratkaistaan kulman α suuruus esimerkiksi kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{3,2}{6,2}$$
$$\alpha = 58,927...^\circ$$
$$\alpha \approx 59^\circ$$

Väittämä D on tosi ja väittämä E on epätosi.

Vastaus: A ja D

234. **a)** Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman ja jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.



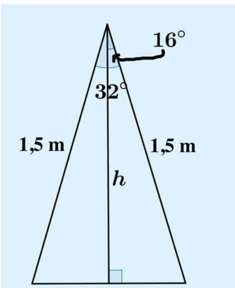
Merkitään huippukulman puolikasta kirjaimella α ja ratkaistaan sen suuruus sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{7}{8}$$
$$\alpha = 61{,}044...^\circ$$

Huippukulman suuruus on $2\alpha = 2 \cdot 61{,}044\ldots^\circ = 122{,}089\ldots^\circ \approx 122^\circ$

Vastaus: 122°

b) Piirretään mallikuva ja merkitään tikkaiden korkeutta kirjaimella h.



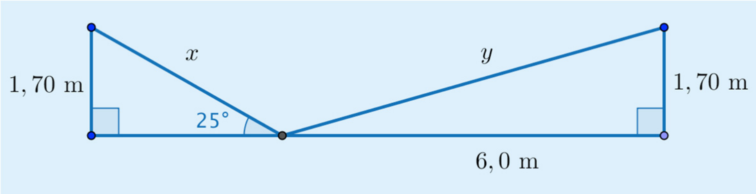
Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman ja jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Ratkaistaan kolmion korkeus kosinin avulla.

$$\cos 16^\circ = \frac{h}{1{,}5} \qquad \| \cdot 1{,}5$$
$$h = 1{,}5 \cdot \cos 16^\circ$$
$$h = 1{,}441...$$
$$h \approx 1{,}4$$

Tikkaiden korkeus on noin 1,4 m.

Vastaus: 1,4 m

c) Ratkaistaan vaijerin pituus kahdessa osassa.



Pituus x saadaan selville vasemmanpuoleisesta suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin 25° &= \frac{1,70}{x} && \Vert \cdot x \\ x \cdot \sin 25° &= 1,70 && \Vert : \sin 25° \\ x &= \frac{1,70}{\sin 25°} \\ x &= 4,0225... \end{aligned}$$

Pituus y saadaan selville oikeanpuoleisesta suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} y^2 &= 1,70^2 + 6,0^2 \\ y^2 &= 38,89 \\ y &= -\sqrt{38,89} \quad \text{tai } y = \sqrt{38,89} \\ y &= -6,2361... \quad \text{tai } y = 6,2361... \end{aligned}$$

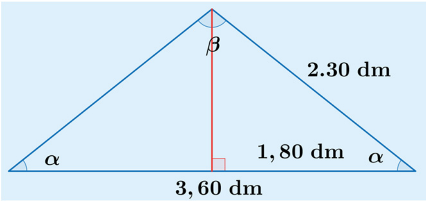
Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $y = 6,2361\ldots$.

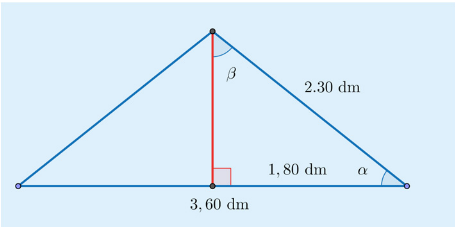
Vaijerin pituus on $x + y = 4,0225\ldots \text{ m} + 6,2361\ldots \text{ m}$
$= 10,2586\ldots \text{ m} \approx 10 \text{ m}$.

Vastaus: 10 m

235. Tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat yhtä suuret ja korkeusjana jakaa kannan puoliksi.

Muodostuu kaksi yhtenevää suorakulmaista kolmiota.





Ratkaistaan kulman α suuruus kosinin avulla.

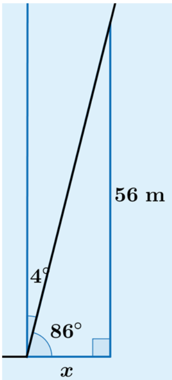
$$\cos\alpha = \frac{1{,}80}{2{,}30}$$
$$\alpha = 38{,}499...^\circ$$
$$\alpha \approx 38{,}5^\circ$$

Kulman β suuruus saadaan kolmion kulmien summan avulla.

$$\beta + 38{,}499\ldots^\circ + 38{,}499\ldots^\circ = 180^\circ$$
$$\beta = 103{,}000\ldots^\circ$$
$$\beta \approx 103^\circ$$

Vastaus: 38,5°, 38,5° ja 103°

236. Piirretään mallikuva. Tornin kaltevuus on 4,0°, joten muodostuvan suorakulmaisen kolmion terävä kulma on 90° – 4,0° = 86°.



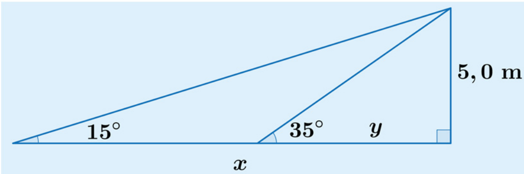
Ratkaistaan kiven putoamispaikan etäisyys tornin juurelta tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan 86° &= \frac{56}{x} && \| \cdot x \\ x \cdot \tan 86° &= 56 && \| : \tan 86° \\ x &= \frac{56}{\tan 86°} \\ x &= 3{,}915... \\ x &\approx 3{,}9 \end{aligned}$$

Kivi osuu maahan noin 3,9 metrin päässä tornin juurelta.

Vastaus: 3,9 m:n etäisyydellä

237. Piirretään mallikuva.



Lasketaan oikeanpuoleisesta suorakulmaisesta kolmiosta sivun y pituus tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan 35° &= \frac{5}{y} && \| \cdot y \\ y \cdot \tan 35° &= 5 && \| : \tan 35° \\ y &= \frac{5}{\tan 35°} \\ y &= 7{,}140... \end{aligned}$$

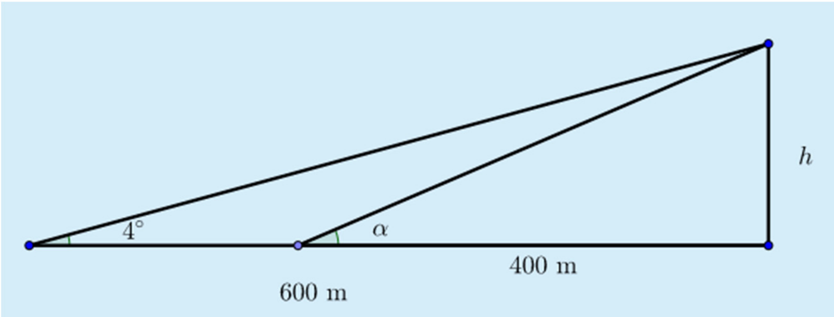
Ratkaistaan sivun x pituus isosta suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan 15° &= \frac{5}{x} && \| \cdot x \\ x \cdot \tan 15° &= 5 && \| : \tan 15° \\ x &= \frac{5}{\tan 15°} \\ x &= 18{,}660... \end{aligned}$$

Välimatka on $x - y = 18{,}660\ldots - 7{,}140\ldots = 11{,}519\ldots \approx 12$ metriä.

Vastaus: 12 m:n etäisyydellä

238. Piirretään mallikuva.



Ratkaistaan saaren korkeus *h* ison suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\tan 4{,}0° = \frac{h}{600} \quad \| \cdot 600$$
$$h = 600 \cdot \tan 4{,}0°$$
$$h = 41{,}956...$$

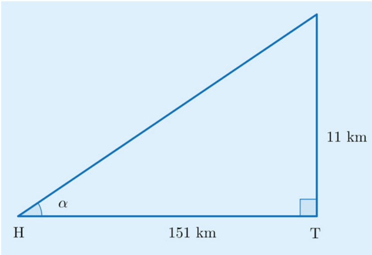
Kulman *x* viereisen kateetin pituus on 400 m ja vastaisen kateetin pituus on h = 41,956…, joten kulman α suuruus saadaan pienemmästä suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{41{,}956...}{400}$$
$$\alpha = 5{,}987°...$$
$$\alpha \approx 6{,}0°$$

Saaren huippu näkyy 6,0°:n kulmassa.

Vastaus: 6,0°:n kulmassa

239. Piirretään mallikuva.



Kone laskeutuu 11 kilometriä 151 kilometrin vaakasuoralla matkalla, joten yhden kilometrin vaakasuoralla matkalla se laskeutuu

$$\frac{11}{151} = 0,07284\ldots \text{ km} \approx 73 \text{ m}.$$

Laskeutumiskulma ratkaistaan tangentin avulla.

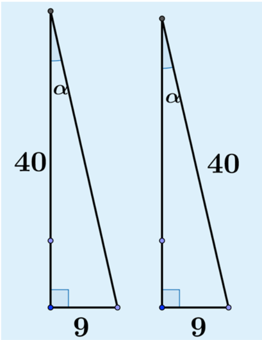
$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{11}{151} \\ \alpha &= 4,166\ldots^\circ \\ \alpha &\approx 4,2^\circ \end{aligned}$$

Lasketumiskulma on 4,2°.

Vastaus: 73 m ja 4,2°

240. Kolmion pienin kulma on sen lyhimmän sivun vastainen kulma.

Merkitään kulmaa kirjaimella α. Tehtävän tietojen avulla voidaan piirtää kaksi erilaista kolmiota.



1. kolmio:
Jos annetut sivut ovat kolmion kateetit, niin kulman α suuruus saadaan tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{9}{40}$$
$$\alpha = 12{,}680...^\circ$$
$$\alpha \approx 12{,}7^\circ$$

2. kolmio:
Jos 40 cm on kolmion hypotenuusa, niin kulman α suuruus saadaan sinin avulla.

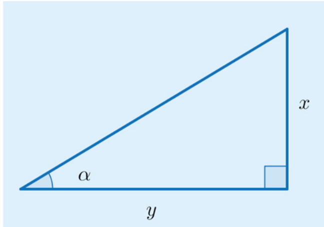
$$\sin\alpha = \frac{9}{40}$$
$$\alpha = 13{,}002...^\circ$$
$$\alpha \approx 13{,}0^\circ$$

Varmistetaan vielä, että on laskettu kolmion pienimmän kulman suuruus. Kolmion toisen terävän kulman suuruus saadaan kolmion kulmien summan avulla 180 – 13,0° – 90° = 77°.

Kolmion pienin kulma on noin 13,0°.

Vastaus: 12,7° tai 13,0°

241. **a)** Piirretään mäestä mallikuva.



Mäen kaltevuus on korkeuseron x suhde vaakasuoraan matkaan y, joten

$$\frac{x}{y}=0,85.$$

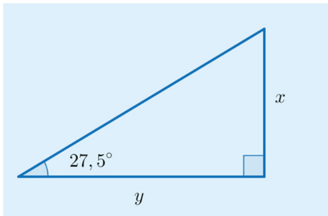
Toisaalta $\tan\alpha=\frac{x}{y}$, joten

$$\begin{aligned}\tan\alpha&=0,85\\ \alpha&=40,364\ldots^\circ\\ \alpha&\approx 40^\circ\end{aligned}$$

Osuuden kaltevuuskulma on noin 40°.

Vastaus: 40°

b) Piirretään mallikuva.



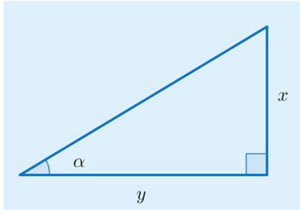
Kaltevuus $\frac{x}{y}$ saadaan tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 27,5^\circ&=\frac{x}{y}\\ \frac{x}{y}&=0,520...\\ \frac{x}{y}&\approx 52\%\end{aligned}$$

Rinteen kaltevuus on noin 52 %.

Vastaus: 52 %

c) Piirretään mallikuva ja ratkaistaan rinteen kaltevuuskulma.



Jyrkkyys on korkeuseron x suhde vaakasuoraan matkaan y,

joten $\frac{x}{y} = 1,05.$

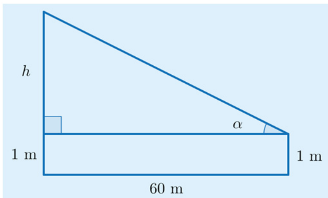
Toisaalta $\tan\alpha = \frac{x}{y}$, joten

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= 1,05 \\ \alpha &= 46,397...^\circ \\ \alpha &\approx 46^\circ \end{aligned}$$

Rinteen kaltevuuskulma on 46°, joten sen kaltevuus voi olla 105 %.

Vastaus: voi

242. Piirretään mallikuva.



a) Vaakasuora siirtymä on 3,3-kertainen korkeuteen nähden, joten kuvan merkinnöillä 60 = 3,3 · h.

Ratkaistaan tästä h.

$$\begin{aligned} 60 &= 3,3h \quad \| \cdot 3,3 \\ h &= \frac{60}{3,3} \\ h &= 18,181... \end{aligned}$$

Liito-oravan täytyy siis ponnistaa
18,181… m + 1 m = 19,181… m ≈ 19 metrin korkeudelta.

Vastaus: 19 m:n korkeudelta

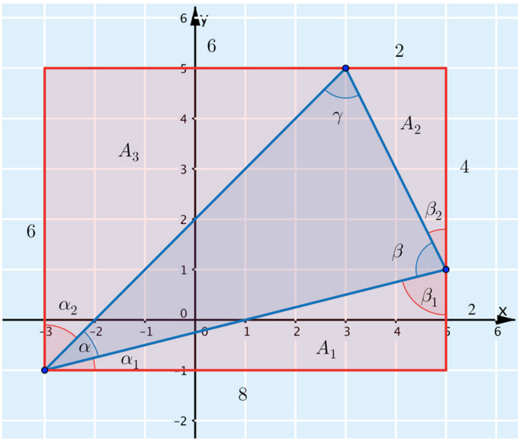
b) Ratkaistaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{18,181...}{60}$$
$$\alpha = 16,858...°$$
$$\alpha \approx 17°$$

Liito-orava lentää alaviistoon noin 17 asteen kulmassa.

Vastaus: alaviistoon 17°:n kulmassa

243. Piirretään kuva tilanteesta. Kehystetään kolmio kärkien kautta kulkevalla suorakulmiolla.



Kolmion pinta-ala saadaan, kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään nurkkiin jäävien suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat.

$$\begin{aligned} A &= A_{suorakulmio} - A_1 - A_2 - A_3 \\ &= 8\cdot 6 - \frac{8\cdot 2}{2} - \frac{4\cdot 2}{2} - \frac{6\cdot 6}{2} \\ &= 48 - 8 - 4 - 18 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Kulman α suuruus saadaan vähentämällä 90 asteesta kulmien α_1 ja α_2 suuruudet.

α_1 ja α_2 saadaan suorakulmaisista kolmioista.

$$\tan \alpha_1 = \frac{2}{8} \qquad \text{ja} \qquad \tan \alpha_2 = \frac{6}{6}$$
$$\alpha_1 = 14{,}036\ldots° \qquad \alpha_2 = 45°$$

$\alpha = 90° - \alpha_1 - \alpha_2$
$\alpha = 90° - 14{,}036\ldots° - 45°$
$\alpha = 30{,}964\ldots°$
$\alpha \approx 31°$

Kulman β suuruus saadaan vähentämällä 180 asteesta kulmien β_1 ja β_2 suuruudet.

β_1 ja β_2 saadaan suorakulmaisista kolmioista.

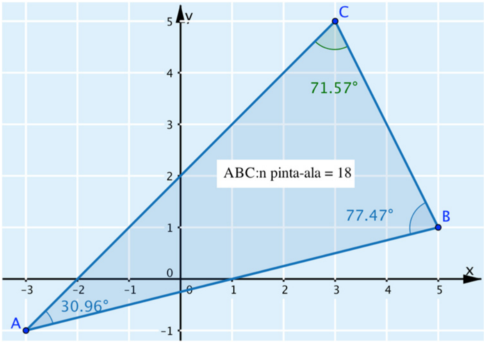
$$\tan \beta_1 = \frac{8}{2} \qquad \text{ja} \qquad \tan \beta_2 = \frac{2}{4}$$
$$\beta_1 = 75{,}963\ldots° \qquad \beta_2 = 26{,}565\ldots°$$

$\beta = 180° - \beta_1 - \beta_2$
$\beta = 180° - 75{,}963\ldots° - 26{,}565\ldots°$
$\beta = 77{,}472\ldots°$
$\beta \approx 77°$

Kulman γ suuruus saadaan kolmion kulmien summan avulla.

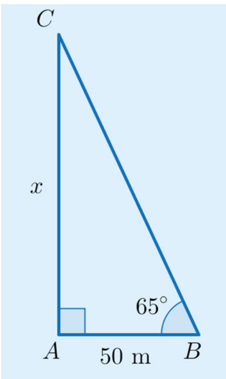
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$30{,}964\ldots° + 77{,}472\ldots° + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 71{,}564\ldots°$$
$$\gamma \approx 72°$$

Tarkistus:



Vastaus: pinta-ala on 18, kulmat 31°, 72° ja 77°

244. Piirretään mallikuva.



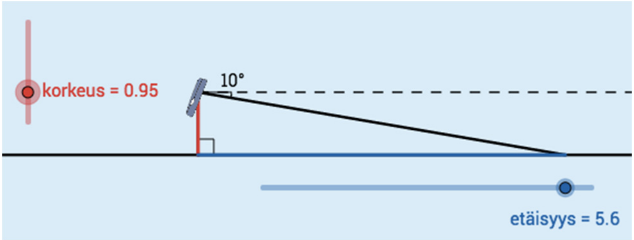
Ratkaistaan karin etäisyys x tangentin avulla.

$$\tan 65° = \frac{x}{50} \qquad \| \cdot 50$$
$$x = 50 \cdot \tan 65°$$
$$x = 107{,}22\ldots$$
$$x \approx 110$$

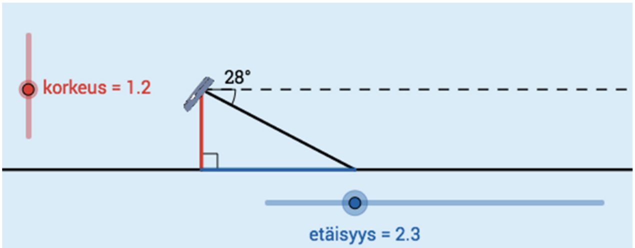
Kari on noin 110 metrin päässä rannasta.

Vastaus: 110 m:n etäisyydellä

245. **a)** Ratkaistaan tehtävä appletin avulla. Kulman α suuruus on 10°.

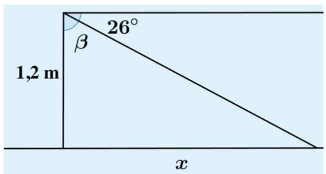


b)



Appletti ilmoittaa puhelimen ja esineen vaakasuoraksi etäisyydeksi 2,3 m.

Ratkaistaan etäisyys x laskemalla.



Kulman β suuruus on
$\beta = 90° - 28° = 62°$.

Etäisyys x saadaan tangentin avulla.

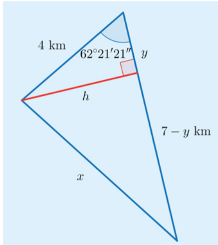
$$\tan 62° = \frac{x}{1,2} \quad \| \cdot 1,2$$
$$x = 1,2 \cdot \tan 62°$$
$$x = 2,256...$$

Sovelluksen antama vastaus poikkeaa tarkasta arvosta
2,3 m – 2,256… m = 0,0431…m ≈ 4 cm.

Vastaus: 2,3 m, virhe 4 cm

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

246. Piirretään mallikuva.



Muutetaan 62°21'21" asteiksi.

$$62°21'21'' = 62° + \frac{21}{60}° + \frac{21}{60 \cdot 60}° = 62,3558\ldots°$$

Muodostetaan kolmion korkeudelle *h* kaksi lauseketta Pythagoraan lauseella ja ratkaistaan yhtälöparista etäisyys *x*.

Yhtälöparin voi ratkaista myös ohjelmalla.

$$\begin{cases} 4^2 = y^2 + h^2 \\ x^2 = (7-y)^2 + h^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} h^2 = 16 - y^2 \\ h^2 = x^2 - (7-y)^2 \end{cases}$$

Asetetaan lausekkeet yhtä suuriksi.

$$\begin{aligned} 16 - y^2 &= x^2 - (7-y)^2 \\ 16 - y^2 &= x^2 - 49 + 14y - y^2 \\ 16 &= x^2 - 49 + 14y \\ x^2 &= 65 - 14y \end{aligned}$$

Ylemmästä suorakulmaisesta kolmiosta saadaan, että

$$\begin{aligned} \cos 62,3558\ldots° &= \frac{y}{4} \qquad \| \cdot 4 \\ y &= 4 \cdot \cos 62,3558\ldots° \\ y &= 1,8559\ldots \end{aligned}$$

Sijoitetaan $y = 1,8559\ldots$ yhtälöön $x^2 = 65 - 14y$.

$$
\begin{aligned}
&x^2 = 65 - 14 \cdot 1{,}8559... \\
&x^2 = 39{,}0171... \\
&x = \sqrt{39{,}0171...} \quad \text{tai } x = -\sqrt{39{,}0171...} \\
&x = 6{,}2463... \qquad\ \ \text{tai } x = -6{,}2463...
\end{aligned}
$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $x = 6{,}2463\ldots$.

Kirkot ovat noin 6,2 kilometrin päässä toisistaan.

Vastaus: 6,2 km:n etäisyydellä toisistaan

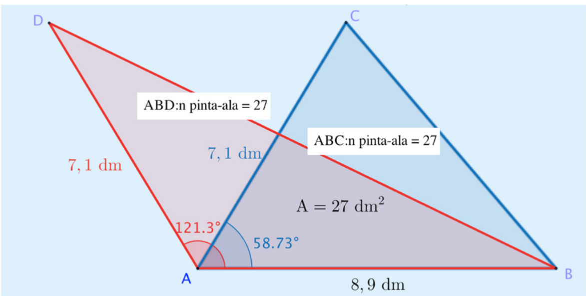
247. **a)** Kolmion pinta-ala on

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \cdot 4{,}4\ \text{cm} \cdot 5{,}3\ \text{cm} \cdot \sin 126° \\
&= 9{,}433\ldots \text{cm}^2 \\
&\approx 9{,}4\ \text{cm}^2
\end{aligned}
$$

Vastaus: 9,4 cm^2

b) Videossa https://vimeo.com/182676521/07ab88f187 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Kuva molemmista kolmioista:



Kulman suuruus on noin 59° tai 121°.

Vastaus: 59° tai 121°

248. **a)** Ratkaistaan sivun x pituus kosinilauseella.

$$x^2 = 3,2^2 + 6,6^2 - 2 \cdot 3,2 \cdot 6,6 \cdot \cos 121,9°$$
$$x^2 = 76,1212...$$
$$x = \sqrt{76,1212...} \quad \text{tai } x = -\sqrt{76,1212...}$$
$$x = 8,724... \quad \text{tai } x = -8,724...$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $x = 8,724...$

Sivun x pituus on noin 8,7 m.

Vastaus: $x \approx 8,7$ m

b) Ratkaistaan sivun x pituus kosinilauseella.

$$4,7^2 = 5,3^2 + x^2 - 2 \cdot 5,3 \cdot x \cdot \cos 52,9°$$
$$22,09 = 28,09 + x^2 - 6,394...x$$
$$x^2 - 6,394...x + 6 = 0$$

Sijoitetaan kertoimet

$a = 1$,
$b = –6,394…$ ja
$c = 6$

toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja ratkaistaan yhtälö ohjelmalla.

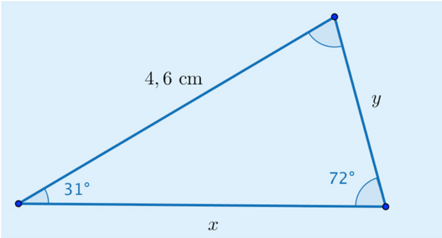
Ratkaisuiksi saadaan

$x = 1,142…$ tai $x = 5,251…$

Sivun x pituus on noin 1,1 m tai 5,3 m.

Vastaus: $x \approx 1,1$ m tai $x \approx 5,3$ m

249. a)



Ratkaistaan sivun *y* pituus sinilauseella.

$$\begin{aligned}
\frac{4,6}{\sin 72°} &= \frac{y}{\sin 31°} \\
y \cdot \sin 72° &= 4,6 \cdot \sin 31° \qquad \| : \sin 72° \\
y &= \frac{4,6 \cdot \sin 31°}{\sin 72°} \\
y &= 2,491... \\
y &\approx 2,5
\end{aligned}$$

Kolmannen kulman suuruus on $180° - 31° - 72° = 77°$.

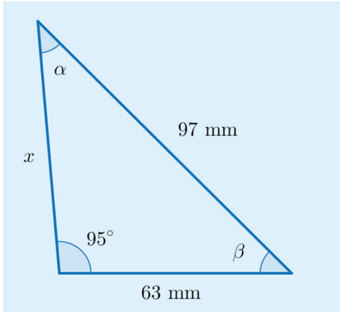
Ratkaistaan sivun *x* pituus sinilauseella.

$$\begin{aligned}
\frac{4,6}{\sin 72°} &= \frac{x}{\sin 77°} \\
x \cdot \sin 72° &= 4,6 \cdot \sin 77° \qquad \| : \sin 72° \\
x &= \frac{4,6 \cdot \sin 77°}{\sin 72°} \\
x &= 4,712... \\
x &\approx 4,7
\end{aligned}$$

Sivujen pituudet ovat noin 2,5 cm ja 4,7 cm.

Vastaus: 2,5 cm ja 4,7 cm

b) Ratkaistaan kulman α suuruus sinilauseella.



$$\frac{97}{\sin 95°} = \frac{63}{\sin \alpha}$$

$$97 \cdot \sin \alpha = 63 \cdot \sin 95° \qquad \| :97$$

$$\sin \alpha = \frac{63 \cdot \sin 95°}{97}$$

$$\sin \alpha = 0{,}647...$$

$$\alpha \approx 40{,}316...°$$

Kulman β suuruus on $180° - 95° - 40{,}316...° = 44{,}683...°$.

Ratkaistaan sivun x pituus sinilauseella.

$$\frac{97}{\sin 95°} = \frac{x}{\sin 44{,}683\ldots°}$$

$$x \cdot \sin 95° = 97 \cdot \sin 44{,}683\ldots° \qquad \| : \sin 95°$$

$$x = \frac{97 \cdot \sin 44{,}683\ldots°}{\sin 95°}$$

$$x = 68{,}469...$$

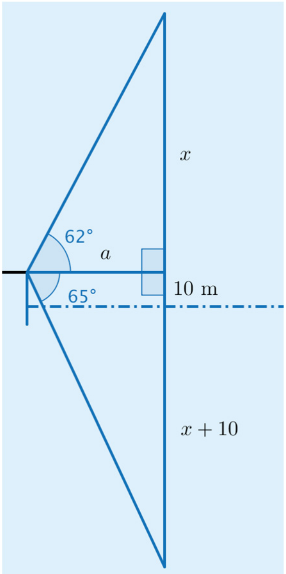
$$x \approx 68$$

Sivun pituus on noin 68 mm.

Vastaus: 68 mm

250. Kuvassa on kaksi suorakulmaista kolmiota. Ylemmän suorakulmaisen kolmion kulman 62° vastainen kateetti on x ja viereinen kateetti on a.

Alemman suorakulmaisen kolmion kulman 65° vastainen kateetti on $(x + 10) + 10 = x + 20$ ja viereinen kateetti on a.



Muodostetaan tangentin avulla näistä kolmioista kaksi yhtälöä ja ratkaistaan yhtälöparista etäisyys x.

Yhtälöparin voi ratkaista myös ohjelmalla.

$$\begin{cases} \tan 65° = \dfrac{x+20}{a} & \| \cdot a \\ \tan 62° = \dfrac{x}{a} & \| \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot \tan 65° = x + 20 & \| : \tan 65° \\ a \cdot \tan 62° = x & \| : \tan 62° \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{x+20}{\tan 65°} \\ a = \dfrac{x}{\tan 62°} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x+20}{\tan 65^\circ} &= \frac{x}{\tan 62^\circ} \\
x \cdot \tan 65^\circ &= (x+20) \cdot \tan 62^\circ \\
x \cdot \tan 65^\circ &= x \cdot \tan 62^\circ + 20 \cdot \tan 62^\circ \\
x \cdot \tan 65^\circ - x \cdot \tan 62^\circ &= 20 \cdot \tan 62^\circ \\
x(\tan 65^\circ - \tan 62^\circ) &= 20 \cdot \tan 62^\circ \qquad \|: (\tan 65^\circ - \tan 62^\circ) \\
x &= \frac{20 \cdot \tan 62^\circ}{\tan 65^\circ - \tan 62^\circ} \\
x &= 142{,}59\ldots \\
x &\approx 140
\end{aligned}$$

Pilvi on x + 10 m ≈ 140 m + 10 m ≈ 150 metriä järven yläpuolella.

Vastaus: 150 m:n korkeudella

2.3 Nelikulmio

ALOITA PERUSTEISTA

251. **a)** Neliössä kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat ovat suoria, joten G neliö.

b) Suorakulmion kaikki kulmat ovat suoria, joten suorakulmioita ovat E ja G.

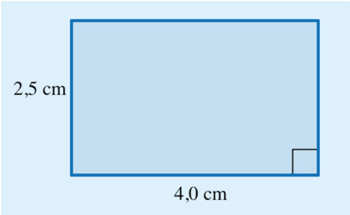
c) Neljäkkään kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten neljäkkäitä ovat G ja H.

d) Suunnikkaassa vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia, joten suunnikkaita ovat B, E, G ja H.

e) Puolisuunnikaalla on täsmälleen kaksi yhdensuuntaista sivua, joten I on puolisuunnikas.

f) Nelikulmiolla on neljä kulmaa, joten nelikulmioita ovat A, B, E, F, G, H ja I.

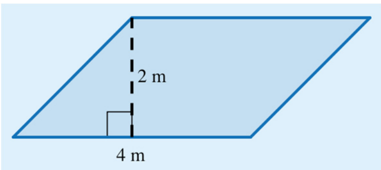
252. **a)** Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.



$A = a \cdot h = 4{,}0\text{ cm} \cdot 2{,}5\text{ cm} = 10\text{ cm}^2$

Vastaus: 10 cm^2

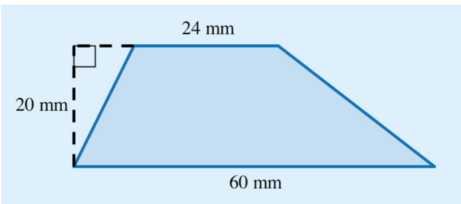
b) Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.



$A = a \cdot h = 4\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 8\text{ m}^2$

Vastaus: 8 m^2

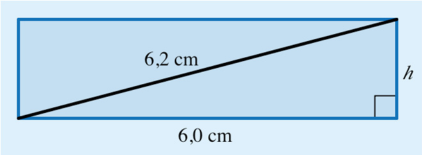
c) Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon sekä korkeuden tulo.



$$A = \frac{a+b}{2}h = \frac{24\text{ mm} + 60\text{ mm}}{2} \cdot 20\text{ mm} = 840\text{mm}^2$$

Vastaus: 840 mm^2

253. **a)** Suorakulmion korkeus *h* lasketaan Pythagoraan lauseella.

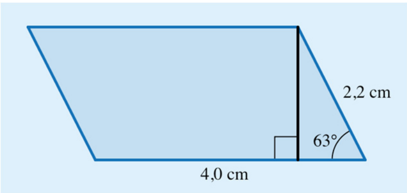


$$
\begin{aligned}
h^2 + 6{,}0^2 &= 6{,}2^2 \\
h^2 &= 6{,}2^2 - 6{,}0^2 \\
h &= \sqrt{6{,}2^2 - 6{,}0^2} \quad \text{tai } h = -\sqrt{6{,}2^2 - 6{,}0^2} \\
h &= \sqrt{2{,}44} \qquad\qquad\ \ \text{tai } h = -\sqrt{2{,}44} \\
h &= 1{,}562... \qquad\qquad \text{tai } h = -1{,}562...
\end{aligned}
$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $h \approx 1{,}6$.

Vastaus: $h \approx 1{,}6$ cm

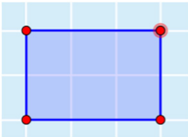
b) Suunnikkaan korkeus *h* lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta.



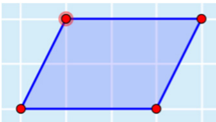
$$
\begin{aligned}
\sin 63° &= \frac{h}{2{,}2} \qquad \| \cdot 2{,}2 \\
h &= 2{,}2 \cdot \sin 63° \\
h &= 1{,}960\ldots \\
h &\approx 2{,}0
\end{aligned}
$$

Vastaus: $h \approx 2{,}0$ cm

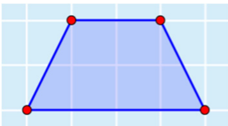
254. **a)** Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo. Pinta-alaksi saadaan 6 valitsemalla esimerkiksi kannaksi 3 ja korkeudeksi 2


.

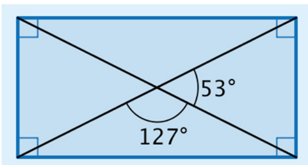
b) Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo. Pinta-alaksi saadaan 6 valitsemalla esimerkiksi kannaksi 3 ja korkeudeksi 2.



c) Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen keskiarvon ja korkeuden tulo. Pinta-alaksi saadaan 6, kun esimerkiksi yhdensuuntaisten sivujen keskiarvo on 3 ja korkeus 2. Keskiarvo on 3, kun yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 2 ja 4.



255. **a)** Esimerkiksi



Väite on väärin.

Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan kohtaan.

Vastaus: väärin, neljäkkään

b) Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuria. Väite on oikein.

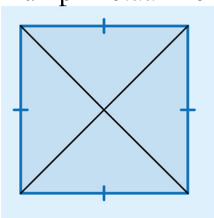
Vastaus: oikein

c) Neljäkkään vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia, joten sillä ei ole täsmälleen kahta yhdensuuntaista sivua. Väite on väärin.

Puolisuunnikkaassa on täsmälleen kaksi yhdensuuntaista sivua.

Vastaus: väärin, puolisuunnikkaassa

d) Kun piirretään neliön lävistäjät, muodostuu neljä tasakylkistä kolmiota.

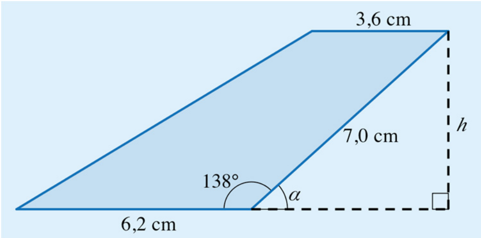


Väite on väärin.

Neliö koostuu neljästä tasakylkisestä kolmiosta.

Vastaus: väärin, tasakylkisestä

256.



a) Kulma α on kulman 138° vieruskulma, joten $\alpha = 180° - 138° = 42°$.

Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin 42° &= \frac{h}{7{,}0} \quad \| \cdot 7{,}0 \\ h &= 7{,}0 \cdot \sin 42° \\ h &= 4{,}683... \\ h &\approx 4{,}7 \end{aligned}$$

Korkeus h on noin 4,7 cm

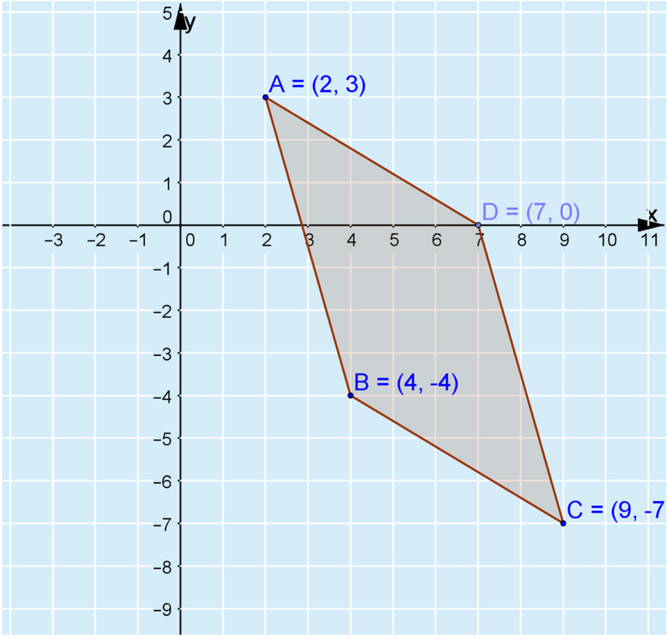
Vastaus: $h \approx 4{,}7$ cm

b) Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+b}{2}h \\ &= \frac{3{,}6\,\text{cm} + 6{,}2\,\text{cm}}{2} \cdot 4{,}683...\,\text{cm} \\ &= 22{,}951...\,\text{cm}^2 \\ &\approx 23\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 23 cm^2

257. Piirretään nelikulmio koordinaatistoon.



Lasketaan vastakkaisten sivujen pituudet.

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{53}$$

$$DC = \sqrt{(9-7)^2 + (-7-0)^2} = \sqrt{53}$$

$$AD = \sqrt{(7-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{34}$$

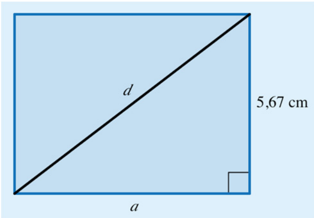
$$BC = \sqrt{(9-4)^2 + (-7-(-4))^2} = \sqrt{34}$$

Nelikulmio *ABCD* on suunnikas, koska sen vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

Vastaus: on

VAHVISTA OSAAMISTA

258. Piirretään mallikuva.



a) Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo, joten kanta *a* voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\begin{aligned} A &= a \cdot h \\ 42{,}3 &= a \cdot 5{,}67 \\ a \cdot 5{,}67 &= 42{,}3 \quad \| :5{,}67 \\ a &= \frac{42{,}3}{5{,}67} = 7{,}460... \end{aligned}$$

Kannan pituus on noin 7,46 cm.

Vastaus: 7,46 cm

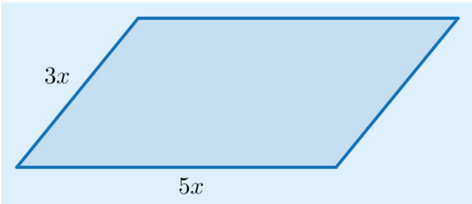
b) Suorakulmion lävistäjän pituus *d* saadaan Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + h^2 \\ d^2 &= 7{,}460...^2 + 5{,}67^2 \\ d^2 &= 87{,}805... \\ d &= -\sqrt{87{,}805...} \quad \text{tai } d = \sqrt{87{,}805...} \\ d &= -9{,}370... \quad \text{tai } d = 9{,}370... \end{aligned}$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $d \approx 9{,}37$.
Lävistäjän pituus on noin 9,37 cm.

Vastaus: 9,37 cm

259. Suunnikkaan sivujen pituuksien suhde on 3 : 5.
Merkitään suunnikkaan sivujen pituuksia 3x ja 5x.



Piiri on 18,6 cm, joten muodostetaan yhtälö suunnikkaan piirille ja ratkaistaan siitä pituus x.

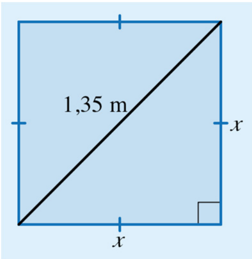
$$\begin{aligned} 3x+5x+3x+5x &= 18{,}6 \\ 16x &= 18{,}6 \quad \| :16 \\ x &= 1{,}162... \end{aligned}$$

Suunnikkaan sivujen pituudet ovat

$3x = 3 \cdot 1{,}162\ldots\text{ cm} = 3{,}487\ldots\text{ cm} \approx 3{,}49\text{ cm}$ ja
$5x = 5 \cdot 1{,}162\ldots\text{ cm} = 5{,}812\ldots\text{ cm} \approx 5{,}81\text{ cm}.$

Vastaus: 3,49 cm ja 5,81 cm

260. **a)** Lasketaan neliön lävistäjän avulla neliön sivun pituus x Pythagoraan lauseella.



$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 1{,}35^2 \\ 2x^2 &= 1{,}8225 \quad \| :2 \\ x^2 &= 0{,}91125 \\ x &= -\sqrt{0{,}91125} \quad \text{tai } x = \sqrt{0{,}91125} \\ x &= -0{,}954... \quad\quad \text{tai } x = 0{,}954... \end{aligned}$$

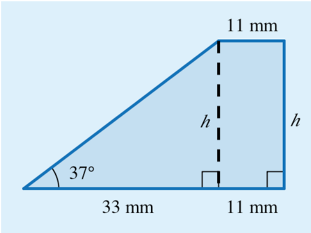
Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $x = 0{,}954...$.

Neliön sivun pituus $x = 0{,}954...$ m.

Neliön pinta-ala on $x^2 = (0{,}954\ldots \text{ m})^2 = 0{,}91125 \text{ m}^2 \approx 0{,}911 \text{ m}^2$.

Vastaus: $0{,}911 \text{ m}^2$

b) Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon sekä korkeuden tulo.



Lasketaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta,
jossa 37°:n kulman viereinen kateetti on 44 mm – 11 mm = 33 mm.

Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan 37° &= \frac{h}{33} \quad \| \cdot 33 \\ h &= 33 \cdot \tan 37° \\ h &= 24{,}876... \end{aligned}$$

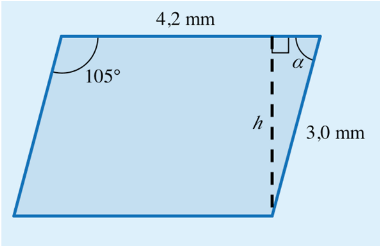
Korkeus h = 24,867... mm.

Puolisuunnikkaan pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+b}{2} \cdot h \\ &= \frac{11\text{ mm} + 44\text{mm}}{2} \cdot 24{,}867\ldots\text{mm} \\ &= 683{,}850\ldots\text{mm}^2 \\ &\approx 680\text{ mm}^2 \end{aligned}$$

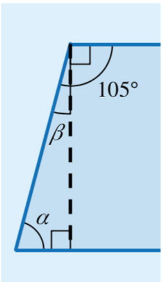
Vastaus: 680 mm^2

c) Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.



Koska suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180°, niin $\alpha = 180° - 105° = 75°$.

(Kulman voi myös laskea piirtämällä suorakulmainen kolmio 105°:n kulman päälle.)



$\beta = 105° - 90° = 15°$
$\alpha = 90° - 15° = 75°$)

Ratkaistaan suunnikkaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\sin 75° = \frac{h}{3,0} \quad \| \cdot 3,0$$
$$h = 3,0 \cdot \sin 75°$$
$$h = 2,897...$$

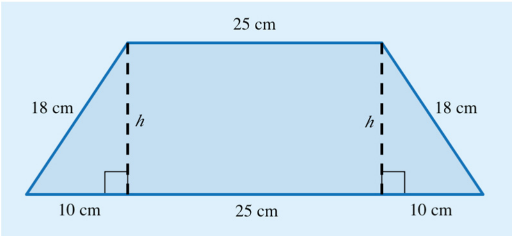
Suunnikkaan pinta-ala

$A = a \cdot h = 4,2 \text{ mm} \cdot 2,897\ldots\text{mm} = 12,170\ldots \text{ mm}^2 \approx 12 \text{ mm}^2$

Vastaus: 12 mm²

d) Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon sekä korkeuden tulo.

Tasasivuisen puolisuunnikkaan korkeusjanat muodostavat kuvan mukaiset kaksi samanlaista suorakulmaista kolmiota.



Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta puolisuunnikkaan korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
h^2 + 10^2 &= 18^2 \\
h^2 &= 18^2 - 10^2 \\
h^2 &= 224 \\
h = -\sqrt{224} \quad &\text{tai } h = \sqrt{224} \\
h = -14,966... \quad &\text{tai } h = 14,966...
\end{aligned}
$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten h = 14,966…

Puolisuunnikkaan korkeus on 14,966…cm ja pinta-ala

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{a+b}{2} \cdot h \\
&= \frac{45\text{ cm} + 25\text{ cm}}{2} \cdot 14,966\ldots\text{cm} \\
&= 523,832\ldots\text{cm}^2 \\
&\approx 520\text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

Vastaus: 520 cm^2

261. Aluksi suorakulmion muotoisen pyyhkeen kanta (pituus) on 140 cm ja korkeus (leveys) on 70 cm.

Tällöin sen pinta-ala on $A_1 = 140 \text{ cm} \cdot 70 \text{ cm} = 9\,800 \text{ cm}^2$.

Kun pyyhe kutistuu pesussa, niin kanta (pituus) pienenee 4 %, jolloin lopuksi se on $0{,}96 \cdot 140 \text{ cm} = 134{,}4 \text{ cm}$.

Vastaavasti korkeus (leveys) pienenee 2 %, joten lopuksi se on $0{,}98 \cdot 70 \text{ cm} = 68{,}6 \text{ cm}$.

Pyyhkeen pinta-ala on lopuksi $A_2 = 134{,}4 \text{ cm} \cdot 68{,}6 \text{ cm} = 9\,219{,}84 \text{ cm}^2$.

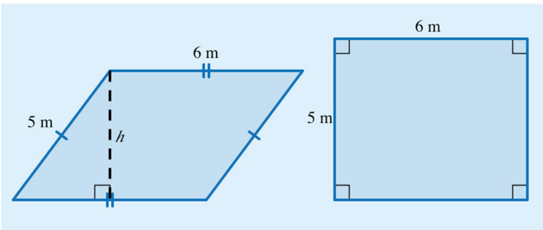
Lasketaan, kuinka monta prosenttia uusi pinta-ala on vanhasta.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{9219{,}84}{9800} = 0{,}9408$$

Pyyhkeen pinta-ala on pienentynyt 100 % – 94,08 % = 5,92 % ≈ 6 %.

Vastaus: 6 %.

262.



Sekä suunnikkaan että suorakulmion pinta-ala lasketaan samalla tavalla kannan ja korkeuden tulona.

Suorakulmion pinta-ala voidaan laskea.
Se on $A = a \cdot h = 6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$.

Suunnikkaan pinta-alaa ei voida laskea tehtävässä annettujen tietojen avulla.

Suunnikkaan kanta tiedetään, se on 6 m, kuten suorakulmiollakin.

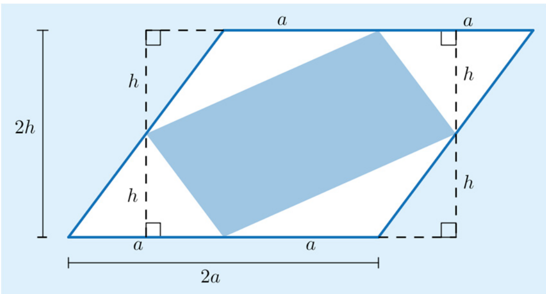
Suunnikkaan korkeus h lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta, jossa hypotenuusa on 5 m. Tällöin korkeus h on pienempi kuin hypotenuusa eli pienempi kuin 5 m.

Suunnikkaan pinta-ala on $A = a \cdot h = 6 \text{ m} \cdot h$, missä h on pienempi kuin 5 m. Tällöin pinta-ala on pienempi kuin 30 m^2 eli suunnikkaan pinta-ala on pienempi kuin suorakulmioin pinta-ala.

Suorakulmion pinta-ala on suurempi, koska molemmilla on sama kanta, mutta suorakulmion korkeus on 5 m ja suunnikkaan korkeus on alle 5 m.

Vastaus: suorakulmiona

263. Täydennetään mallikuvaa.



Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo, joten ison suunnikkaan pinta-ala on $A_{\text{iso}} = 2a \cdot 2h = 4ah$.

Pienen väritetyn suunnikkaan pinta-ala saadaan, kun ison suunnikkaan pinta-alasta vähennetään neljän valkoisen nurkkakolmion pinta-ala.

Yhden nurkkakolmion korkeus on $\frac{2h}{2} = h$ ja kanta on $\frac{2a}{2} = a$.

Nurkkakolmion pinta-ala on $A_{\text{kolmio}} = \frac{ah}{2}$

Pienen suunnikkaan pinta-ala on

$$A_{\text{pieni}} = A_{\text{iso}} - 4 \cdot A_{\text{kolmio}} = 4ah - \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{ah}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 4ah - 2ah = 2ah.$$

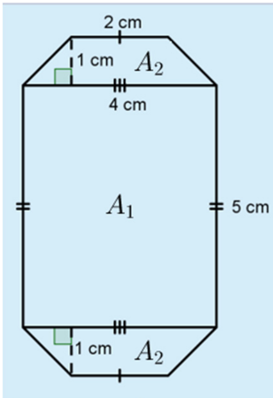
Pienen väritetyn suunnikkaan pinta-alan suhde ison suunnikkaan

pinta-alaan on $\dfrac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{iso}}} = \dfrac{2\cancel{ah}}{4\cancel{ah}} = \dfrac{1}{2}$,

joten alkuperäisestä suunnikkaasta on väritetty puolet.

Vastaus: puolet

264. a) Kortti koostuu suorakulmiosta ja kahdesta yhtenevästä puolisuunnikkaasta.



Suorakulmion pinta-ala on
$A_1 = 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A_2 = \frac{2\text{ cm} + 4\text{ cm}}{2} \cdot 1\text{ cm} = 3\text{ cm}^2.$$

Kortin pinta-ala on

$A_{\text{kortti}} = A_1 + 2 \cdot A_2 = 20\text{ cm}^2 + 2 \cdot 3\text{ cm}^2 = 26\text{ cm}^2$,

joten pahvia tarvitaan 26 cm^2.

Vastaus: 26 cm^2

b) Selvitetään, miten päin leikkaamalla A4-kokoisesta arkista saadaan enemmän pakettikortteja.

Jos A4-arkki on pystysuunnassa, niin pituussuunnassa saadaan

$\frac{29,7\ \text{cm}}{7\ \text{cm}} = 4,242\ldots$ eli 4 pakettikorttia ja

leveyssuunnassa $\frac{21,0\ \text{cm}}{4\ \text{cm}} = 5,25$ eli 5 pakettikorttia.

Yhteensä saadaan $4 \cdot 5 = 20$ pakettikorttia.

Jos A4-arkki on poikittain,

niin pituussuunnassa saadaan $\frac{21,0\ \text{cm}}{7\ \text{cm}} = 3$ pakettikorttia ja

leveyssuunnassa $\frac{29,7\ \text{cm}}{4\ \text{cm}} = 7,425$ eli 7 pakettikorttia.

Yhteensä saadaan $3 \cdot 7 = 21$ pakettikorttia.

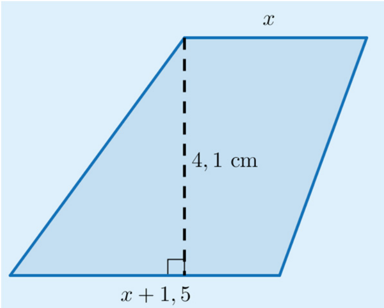
Hukkaan mennyt pahvimäärä saadaan selville, kun A4-arkin pinta-alasta vähennetään 21 pakettikortin yhteispinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{hukkaan mennyt}} &= A_{\text{A4}} - 21 \cdot A_{\text{kortti}} \\ &= 29{,}7\ \text{cm} \cdot 21{,}0\ \text{cm} - 21 \cdot 26\ \text{cm}^2 \\ &= 77{,}7\ \text{cm}^2 \\ &\approx 78\ \text{cm}^2. \end{aligned}$$

Pahvia menee hukkaan 78 cm^2.

Vastaus: 78 cm^2

265. Piirretään mallikuva.



Merkitään puolisuunnikkaan lyhempää sivua kirjaimella x.

Pidempi sivu on tällöin x + 1,5 (cm).

Puolisuunnikkaan korkeus on 4,1 cm, joten pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2}h = \frac{x+(x+1{,}5)}{2} \cdot 4{,}1.$$

Pinta-ala tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x.

$$\begin{aligned}
\frac{x+(x+1{,}5)}{2} \cdot 4{,}1 &= 16 \\
\frac{x+x+1{,}5}{2} \cdot 4{,}1 &= 16 \\
\frac{2x+1{,}5}{2} \cdot 4{,}1 &= 16 \quad \| \cdot 2 \\
(2x+1{,}5) \cdot 4{,}1 &= 32 \\
4{,}1 \cdot (2x+1{,}5) &= 32 \\
8{,}2x + 6{,}15 &= 32 \\
8{,}2x &= 32 - 6{,}15 \\
8{,}2x &= 25{,}85 \quad \| : 8{,}2 \\
x &= \frac{25{,}85}{8{,}2} = 3{,}152\ldots
\end{aligned}$$

Lyhemmän sivun pituus on x = 3,152… cm ≈ 3,2 cm ja

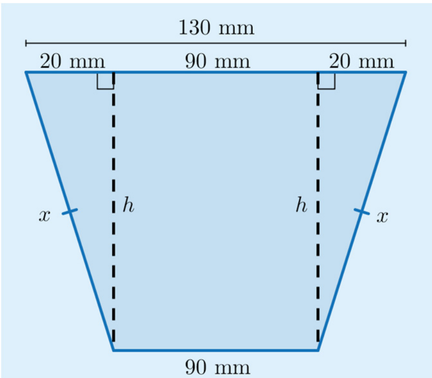
pidemmän sivun pituus on

x + 1,5 cm = 3,152… cm + 1,5 cm = 4,652… cm ≈ 4,7 cm.

Sivujen pituudet ovat noin 3,2 cm ja 4,7 cm.

Vastaus: 3,2 cm ja 4,7 cm

266. Poikkileikkaus on tasakylkinen puolisuunnikas. Täydennetään mallikuvaa.



Puolisuunnikkaan pinta-ala tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö, josta ratkaistaan puolisuunnikkaan korkeus h.

$$\begin{aligned} \frac{90+130}{2}\cdot h &= 11\,000 \quad \| \cdot 2 \\ (90+130)\cdot h &= 22\,000 \\ 220\cdot h &= 22\,000 \quad \| : 220 \\ h &= \frac{22\,000}{220} \\ h &= 100 \end{aligned}$$

Ratkaistaan puolisuunnikkaan sivun pituus x suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
x^2 &= h^2 + 20^2 \\
x^2 &= 100^2 + 20^2 \\
x^2 &= 10\,400 \\
x &= -\sqrt{10\,400} \quad \text{tai } x = \sqrt{10\,400} \\
x &= -101{,}980... \text{ tai } x = 101{,}980...
\end{aligned}
$$

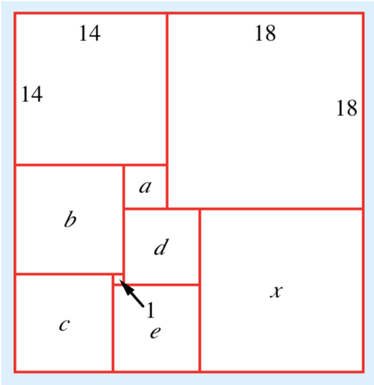
Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten x = 101,980....

Sivun pituus x = 101,980... mm.

Sivun pituuden on oltava millimetrin tarkkuudella vähintään 102 mm, jotta vesi ei tule yli.

Vastaus: vähintään 102 mm

267. Täydennetään kuvaa merkitsemällä tuntemattomia neliöitä kirjaimilla kirjaimesta *a* alkaen.



Neliön *a* sivun pituus on 18 – 14 = 4.

Neliön *b* sivun pituus on 14 – 4 = 10.

Neliön *c* sivun pituus on 10 – 1 = 9.

Ison suorakulmion vasemman pystysuuntaisen sivu on neliöiden sivujen pituuksien summa 14 + 10 + 9 = 33.

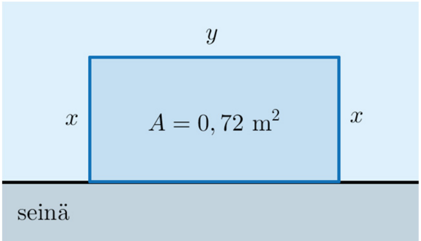
Sama pituus on myös $18 + x$, joten saadaan yhtälö $18 + x = 33$, josta

$x = 33 - 18 = 15$.

Vastaus: $x = 15$

268. Piirretään mallikuva. Suorakulmion pinta-ala on 0,72 m^2 ja aitamateriaalia kuluu 2,4 metriä.

Merkitään suorakulmion sivujen pituuksia kuvan mukaisesti kirjaimilla x ja y.



Seinän sivulle ei tarvita aitaa, joten aitaa tarvitaan kolmelle muulle sivulle:

$x + x + y = 2{,}4.$

Ratkaistaan tästä kirjain y kirjaimen x lausekkeena.

$$\begin{aligned} x + x + y &= 2{,}4 \\ 2x + y &= 2{,}4 \\ y &= 2{,}4 - 2x \end{aligned}$$

Suorakulmion pinta-ala on

$A = x \cdot y = x \cdot (2{,}4 - 2x) = 0{,}72.$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä sivun pituus x.

$$
\begin{aligned}
x \cdot (2,4 - 2x) &= 0,72 \\
2,4x - 2x^2 &= 0,72 \\
-2x^2 + 2,4x - 0,72 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2,4 \pm \sqrt{2,4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-0,72)}}{2 \cdot (-2)} \\
&= \frac{-2,4 \pm \sqrt{5,76 - 5,76}}{-4} \\
&= \frac{-2,4 \pm \sqrt{0}}{-4} \\
&= \frac{-2,4}{-4} \\
&= 0,6
\end{aligned}
$$

Kun x = 0,6, niin y = 2,4 – 2x = 2,4 – 2 · 0,6 = 1,2.

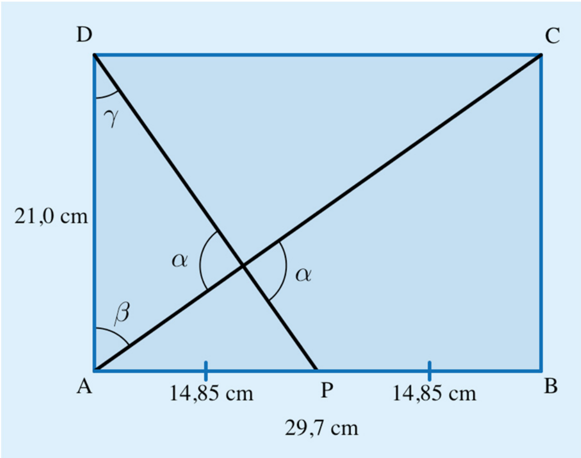
Suorakulmion sivujen pituudet ovat siis

0,6 m = 60 cm ja 1,2 m = 120 cm siten, että 120 cm on seinän suuntaisesti.

Vastaus: 0,6 m ja 1,2 m

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

269. Piirretään mallikuva. Merkitään lävistäjän AC ja janan DP välistä kulmaa kirjaimella α, kulmaa CAD kirjaimella β ja kulmaa ADP kirjaimella γ.



Koska piste P on janan AB keskipisteessä, janan AP pituus on
$\frac{29,7 \text{ cm}}{2} = 14,85 \text{ cm}.$

Lasketaan kulman β suuruus suorakulmaisesta kolmiosta ACD tangentin avulla.

$$\tan\beta = \frac{29,7}{21,0}$$
$$\tan\beta = 1,414...$$
$$\beta = 54,737...°$$

Lasketaan kulman γ suuruus suorakulmaisesta kolmiosta APD tangentin avulla.

$$\tan\gamma = \frac{14,85}{21,0}$$
$$\tan\gamma = 0,707...$$
$$\gamma = 35,265...°$$

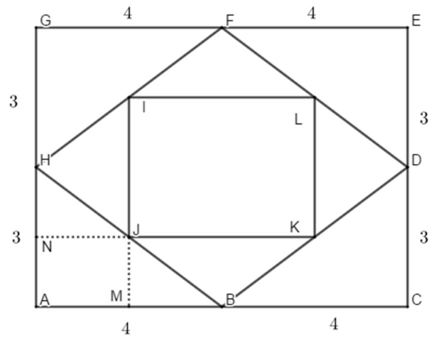
Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin

$$\begin{aligned}\alpha &= 180° - \beta - \gamma \\ &= 180° - 54{,}737...° - 35{,}265...° \\ &= 89{,}997° \\ &\approx 90{,}0°\end{aligned}$$

Vastaus: 90,0°

270. Kuvion valkoiset kolmiot *ABH*, B*CD*, *DEF* ja *FGH* ovat yhteneviä suorakulmaisia kolmiota, joiden kateettien pituudet ovat 3 ja 4.

Täydennetään kuviota.



Koska piste *J* on janan keskipiste, niin piste *M* jakaa janan *AB* kahteen yhtä pitkään osaan.

Vastaavasti piste *N* jakaa janan *HA* kahteen yhtä pitkään osaan.

Janan *MB* pituus on $\frac{4}{2} = 2$ ja janan *HN* pituus on $\frac{3}{2} = 1{,}5$.

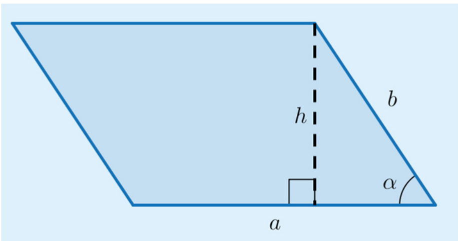
Kun vastaava jako tehdään muille suorakulmaisille kolmioille, suorakulmion *LKJI* kannaksi saadaan 2 + 2 = 4 ja korkeudeksi 1,5 + 1,5 = 3.

Väritetyn alueen pinta-ala saadaan, kun suorakulmion *ACEG* pinta-alasta vähennetään suorakulmaisten kolmioiden *ABH*, B*CD*, *DEF* ja *FGH* sekä suorakulmion *LKJI* pinta-alat.

$$\begin{aligned}A &= 8\cdot 6-\left(4\cdot\frac{3\cdot 4}{2}+4\cdot 3\right)\\ &= 48-(24+12)\\ &= 48-36\\ &= 12\end{aligned}$$

Vastaus: 12

271. On perusteltava kaava: Suunnikkaan pinta-ala saadaan, kun kerrotaan vierekkäisten sivujen tulo suunnikkaan terävän kulman sinillä. Merkitään suunnikkaan terävää kulmaa kirjaimella α ja sen vierekkäisiä sivuja kirjaimilla a ja b.



Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo $A = a \cdot h$.

Määritetään suunnikkaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta.

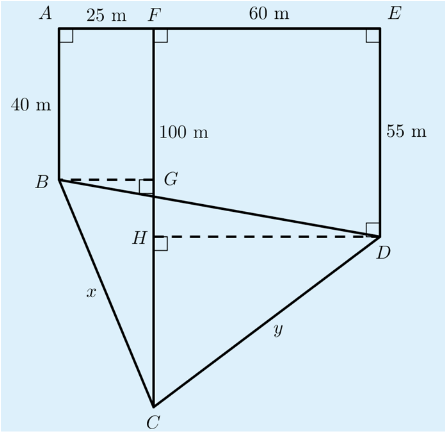
$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{h}{b} \quad \| \cdot b\\ h &= b\cdot\sin\alpha\end{aligned}$$

Suunnikkaan pinta-ala on tällöin

$A = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin\alpha = ab \cdot \sin\alpha$

Siis suunnikkaan pinta-ala saadaan, kun kerrotaan vierekkäisten sivujen tulo $a \cdot b$ suunnikkaan terävän kulman α sinillä.

272. **a)** Täydennetään mallikuvaa.



Merkitään janaa *BC* kirjaimella *x* ja janaa *CD* kirjaimella *y*.

Lasketaan janan *x* pituus suorakulmaisesta kolmiosta *BCG* Pythagoraan lauseella.

Suorakulmaisen kolmion *BCG* kateetin *BG* pituus on 25 m ja kateetin *GC* pituus on 100 m – 40 m = 60 m.

$$x^2 = 25^2 + 60^2$$
$$x^2 = 625 + 3600$$
$$x^2 = 4225$$
$$x = -\sqrt{4225} \quad \text{tai } x = \sqrt{4225}$$
$$x = -65 \qquad \text{tai } x = 65$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $x = 65$.
Janan *BC* pituus on 65 m.

Lasketaan janan *y* pituus suorakulmaisesta kolmiosta *HCD* Pythagoraan lauseella.

Suorakulmaisen kolmion *HCD* kateetin *HD* pituus on 60 m ja kateetin *HC* pituus on 100 m – 55 m = 45 m.

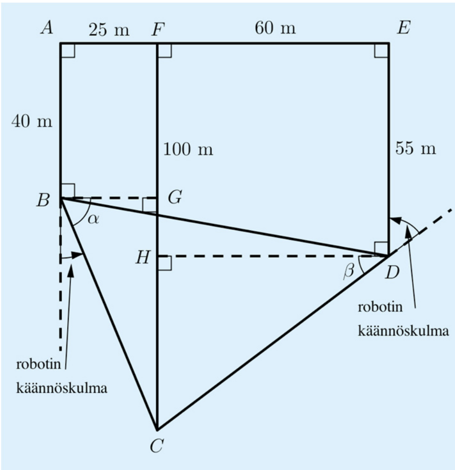
$$y^2 = 60^2 + 45^2$$
$$y^2 = 3600 + 2025$$
$$y^2 = 5625$$
$$y = -\sqrt{5625} \text{ tai } y = \sqrt{5625}$$
$$y = -75 \qquad \text{tai } y = 75$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $y = 75$.

Janan *CD* pituus on 75 m.

Vastaus: 65 m ja 75 m

b) Lisätään mallikuvaan määritettävät kulmat.



Pisteessä *B* robotin kääntyä kulman *CBA* vieruskulman verran.

Kulma *CBA* muodostuu suorasta kulmasta *GBA* ja kulmasta *CBG*.

Merkitään kulmaa *CBG* kirjaimella α. Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta *BCG* tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{60}{25}\\ \tan\alpha &= 2{,}4\\ \alpha &= 67{,}380...^\circ\\ \alpha &\approx 67^\circ\end{aligned}$$

Pisteessä *B* robotin pitää kääntyä etenemissuuntaansa nähden
180° – (90° + 67°) = 23°.

Pisteessä *D* robotin kääntyä kulman *EDC* vieruskulman verran.

Kulma *EDC* muodostuu suorasta kulmasta *EDH* ja kulmasta *HDC*.

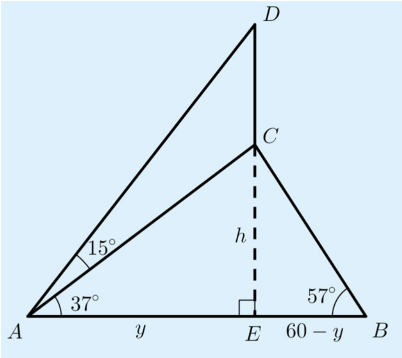
Merkitään kulmaa *HDC* kirjaimella β. Ratkaistaan kulma β suorakulmaisesta kolmiosta *HCD* tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan\beta &= \frac{45}{60}\\ \tan\beta &= 0{,}75\\ \beta &= 36{,}869...^\circ\\ \beta &\approx 37^\circ\end{aligned}$$

Pisteessä *E* robotin pitää kääntyä etenemissuuntaansa nähden
180° – (90° + 37°) = 53°.

Vastaus: pisteessä *B* 23° ja pisteessä *D* 53°

273. Täydennetään kuvaa.



Lasketaan suorakulmaisista kolmiosta *AEC* ja *BEC* pituudet *h* ja *y* muodostamalla kaksi yhtälöä ja ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} \tan 37° = \dfrac{h}{y} \\ \tan 57° = \dfrac{h}{60-y} \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä *h*.

$$\tan 37° = \frac{h}{y} \quad \| \cdot y$$
$$h = \tan 37° \cdot y$$

$$\tan 57° = \frac{h}{60-y} \quad \| \cdot (60-y)$$
$$h = \tan 57° \cdot (60-y)$$

Merkitään molemmat *h*:n lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä pituus *y*.

$$\begin{aligned}
\tan 37° \cdot y &= \tan 57° \cdot (60 - y) \\
\tan 37° \cdot y &= \tan 57° \cdot 60 - \tan 57° \cdot y \\
\tan 37° \cdot y + \tan 57° \cdot y &= \tan 57° \cdot 60 \\
2{,}293...y &= 92{,}391... \quad \| :2{,}293... \\
y &= 40{,}285...
\end{aligned}$$

Merkitään mökin ja vastarannan etäisyyttä eli ison suorakulmaisen kolmion *AED* kateettia *ED* kirjaimella *z*.

Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on $AE = y = 40{,}285\ldots$ m.

Lasketaan kulman 15° + 37° = 52° avulla kateetin *z* pituus.

$$\begin{aligned}
\tan 52° &= \frac{z}{40{,}285...} \\
z &= \tan 52° \cdot 40{,}285... \\
z &= 51{,}563...
\end{aligned}$$

Etäisyys mökiltä vastarannalle on 52 m.

Vastaus: 52 m.

2.4 Monikulmio ja pinta-alojen suhde

ALOITA PERUSTEISTA

274. **a)** Vastinsivujen pituudet ovat 5,0 cm ja 4,0 cm ja niiden suhde on $\frac{5}{4}$.

Vastaus: $\frac{5}{4}$

b) Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen toinen potenssi eli
$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$.

Vastaus: $\frac{25}{16}$

275. **a)** Pinta-alojen yksiköiden muutosten suhdeluku on 100,
joten 5 m^2 = 500 dm^2.

b) Pinta-alojen yksiköiden muutosten suhdeluku on 100,
joten 24 km^2 = 2400 ha.

c) Pinta-alojen yksiköiden muutosten suhdeluku on 100,
joten 8900 mm^2 = 89 cm^2.

276. Muutetaan suuruusluokkat I – IV helpommin hahmotettaviksi yksiköiksi.

I 10 a = 1000 m^2
II 15 000 cm^2 = 1,5 m^2
III 100 mm^2 = 1 cm^2
IV 1 ha = 10 000 m^2

A Huoneen pinta-ala on yleensä muutamia neliömetrejä, kuten 10 m^2 eli vaihtoehto IV.

B Urheiluhallilla on näistä suurin pinta-ala, joten sen pinta-ala on 1 ha eli vaihtoehto V.

C Pihalle sopiva pinta-ala on 10 a eli vaihtoehto I.

D Ihmisen mitoille sopiva pinta-ala on 1,5 m^2 = 15 000 cm^2 eli vaihtoehto II.

E Kynnen pinta-ala on vaihtoehdoista pienin 100 mm^2 eli vaihtoehto III.

Vastaus: I: C, II: D, III: E, IV: A ja V: B

277. Pallot ovat yhdenmuotoisia ja niiden halkaisijat ovat toistensa vastinjanoja. Pallojen mittakaava on $\frac{6,7}{4,0}$.

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten isomman pallon pinta-alan suhde pienempään palloon on $\left(\frac{6,7}{4,0}\right)^2 = \frac{44,89}{16} = \frac{4489}{1600} = 2,805... \approx 2,8..$

Vastaus: 4489 : 1600 ≈ 2,8

278. **a)**

$$\frac{x}{5}=\left(\frac{1}{10}\right)^2$$
$$\frac{x}{5}=\frac{1^2}{10^2}$$
$$\frac{x}{5}=\frac{1}{100}$$
$$100x=1\cdot 5 \quad \| :100$$
$$x=\frac{5}{100}^{(5}$$
$$x=\frac{1}{20}$$

b)

$$\frac{4}{9}=\left(\frac{10}{x}\right)^2$$
$$\frac{4}{9}=\frac{100}{x^2}$$
$$4x^2=900$$
$$x^2=225$$
$$x=\pm\sqrt{225}$$
$$x=\pm 15$$

279. **a)** Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten huoneen todellinen pinta-ala A saadaan verrannosta

$$\frac{60}{A}=\left(\frac{1}{50}\right)^2$$
$$\frac{60}{A}=\frac{1}{2500}$$
$$A=60\cdot 2500$$
$$A=150\,000$$

Huoneen pinta-ala todellisuudessa on 150 000 cm^2 = 15 m^2.

Vastaus: 15 m^2

b) Muunnetaan pinta-ala neliösenttimetreiksi 110 m^2 = 1 100 000 cm^2.

Asunnon piirroksen pinta-ala A saadaan verrannosta

$$\begin{aligned} \frac{A}{1\,100\,000} &= \left(\frac{1}{50}\right)^2 \\ \frac{A}{1\,100\,000} &= \frac{1}{2500} \\ 2500 \cdot A &= 1 \cdot 1\,100\,000 \quad \| : 2500 \\ A &= 440 \end{aligned}$$

Asunnon pinta-ala piirustuksessa on 440 cm^2.

Vastaus: 440 cm^2

280. Monikulmio on säännöllinen, jos kaikki sen sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria.

Säännölliset monikulmiot:

B on neliö,
D on säännöllinen 5-kulmio,
E on tasasivuinen kolmio ja
F on säännöllinen 8-kulmio.

Vastaus: B, D, E ja F

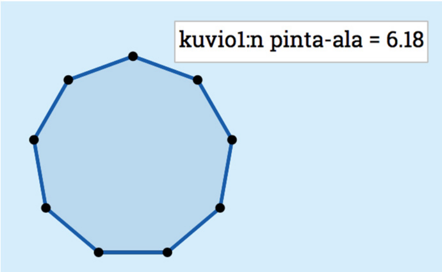
281. **a)** Säännöllisen 9-kulmion kulmien summa on

(9 – 2) · 180° = 7 · 180° = 1260°.

Yhden kulman suuruus on $\frac{1260°}{9} = 140°$.

Vastaus: 1260°, 140°

b) Piirretään appletin avulla säännöllinen 9-kulmio, jonka sivun pituus on yksi, ja määritetään sen pinta-ala.



Pinta-ala on 6,18.

Vastaus: 6,18

VAHVISTA OSAAMISTA

282. **a)** 990 a = 9,9 ha = 0,099 km^2

b) 0,38 ha = 38 a = 3800 m^2 = 380 000 dm^2

c) 100 000 mm^2 = 1000 cm^2 = 10 dm^2 = 0,1 m^2

283. **a)** Koska mittakaava on 1 : 20, oikean pallon pituus on 20-kertainen pienoismallin pituuteen verrattuna.

30,0 cm · 20 = 600 cm = 6,00 m

Oikean pallon pituus on 6,00 m.

Vastaus: 6,00 m

b) Merkitään pienoismalliin kuluvaa materiaalia kirjaimella A ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Materiaalin määrä (m^2)	Mittakaava
Pienoismalli	A	1
Oikea pallo	20,8	20

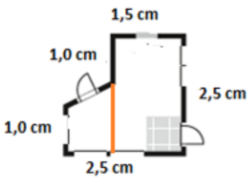
Muodostetaan yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä pinta-ala A.

$$\begin{aligned}\frac{A}{20,8} &= \left(\frac{1}{20}\right)^2 \\ \frac{A}{20,8} &= \frac{1}{400} \quad \| \cdot 20,8 \\ A &= \frac{20,8}{400} \\ A &= 0,052\end{aligned}$$

Pienoismalliin kuluu materiaalia 0,052 m^2 = 5,20 dm^2.

Vastaus: 5,20 dm^2

284. Täydennetään kuviota.



Talon lattia on monikulmio, joka voidaan jakaa suorakulmioon ja puolisuunnikkaaseen.

Suorakulmion sivut ovat 1,5 cm ja 2,5 cm.

Suorakulmion pinta-ala on $A_s = 1{,}5\text{ cm} \cdot 2{,}5\text{ cm} = 3{,}75\text{ cm}^2$.

Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisista sivuista lyhyemmän pituus on 1,0 cm ja pidemmän 2,5 cm – 1,0 cm = 1,5 cm.

Puolisuunnikkaan korkeus on 2,5 cm – 1,5 cm = 1,0 cm.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A_p = \frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{1{,}0\text{ cm} + 1{,}5\text{ cm}}{2}\cdot 1{,}0\text{ cm} = 1{,}25\text{ cm}^2.$$

Monikulmion pinta-ala on

$A = A_s + A_p = 3{,}75\text{ cm}^2 + 1{,}25\text{ cm}^2 = 5{,}0\text{ cm}^2$.

Talon lattiasta laatoitetaan $\frac{1}{8}$, joten laatoituksen pinta-ala on

$$\frac{1}{8}A = \frac{1}{8}\cdot 5{,}0\text{ cm}^2 = 0{,}625\text{ cm}^2.$$

Muodostetaan yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä laatoituksen pinta-ala A.

$$\begin{aligned}\frac{0{,}625}{A} &= \left(\frac{1}{400}\right)^2\\ \frac{0{,}625}{A} &= \frac{1}{160\,000}\\ A\cdot 1 &= 0{,}625\cdot 160\,000\\ A &= 100\,000\end{aligned}$$

Laatoituksen pinta-ala on 100 000 cm^2 = 10 m^2.

Vastaus: 10 m^2

285. Muunnetaan pinta-alat samaan yksikköön.

5 ha = 500 000 000 cm^2

Pinta-alojen suhde on mittakaavan *k* neliö.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä mittakaava *k*.

$$k^2 = \frac{1{,}25}{500\,000\,000} \quad ^{(1{,}25}$$

$$k^2 = \frac{1}{400\,000\,000}$$

$$k = -\sqrt{\frac{1}{400\,000\,000}} \quad \text{tai } k = \sqrt{\frac{1}{400\,000\,000}}$$

$$k = -\frac{1}{20\,000} \qquad \text{tai } k = \frac{1}{20\,000}$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $k = \frac{1}{20\,000}$..

Kartan mittakaava on 1 : 20 000.

Vastaus: 1 : 20 000

286. Muunnetaan pinta-alat samaan yksikköön.

$12{,}5\ \text{dm}^2 = 1250\ \text{cm}^2$

Merkitään kasvojen korkeutta tietokoneen ruudulla kirjaimella *h* ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Pinta-ala (cm^2)	Korkeus (mm)
Kännykän kuvaruutu	18	30
Tietokoneen kuvaruutu	1250	*h*

Korkeudet ovat toistensa vastinjanoja.

Muodostetaan yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeus *h*.

$$\begin{aligned}
\frac{18}{1250} &= \left(\frac{30}{h}\right)^2 \\
\frac{18}{1250} &= \frac{900}{h^2} \\
18h^2 &= 900 \cdot 1250 \\
18h^2 &= 1\,125\,000 \quad \| :18 \\
h^2 &= \frac{1\,125\,000}{18} \\
h^2 &= 62\,500 \\
h &= -\sqrt{62\,500} \quad \text{tai} \quad h = \sqrt{62\,500} \\
h &= -250 \qquad\quad\; \text{tai} \quad h = 250
\end{aligned}$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $h = 250$.

Kasvojen korkeus tietokoneen kuvaruudulla on 250 mm = 25 cm.

Vastaus: 25 cm

287. Merkitään Hongkongin pinta-alaa luonnossa kirjaimella A ja taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Pinta-ala (cm^2)	Mittakaava
Kartta	44	1
Luonto	A	500 000

Muodostetaan yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhteen yhtälö ja ratkaistaan siitä pinta-ala A.

$$\frac{44}{A}=\left(\frac{1}{500\,000}\right)^2$$
$$\frac{44}{A}=\frac{1}{250\,000\,000\,000}$$
$$A=44\cdot 250\,000\,000\,000$$
$$A=11\,000\,000\,000\,000$$

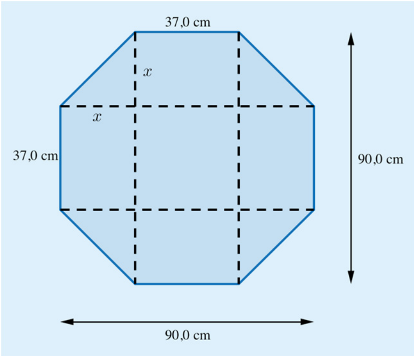
Hongkongin pinta-ala on 11 000 000 000 000 cm^2 = 1100 km^2.

Asukastiheys saadaan, kun asukasluku jaetaan pinta-alalla, joten Hongkongin asukastiheys on

$$\frac{7\,451\,000 \text{ asukasta}}{1100 \text{ km}^2}=6773{,}636... \text{ asukasta/km}^2 \approx 6800 \text{ asukasta/km}^2.$$

Vastaus: 6800 asukasta/km^2

288. Jaetaan stop-merkki kulmista vaaka- ja pystysuuntaisilla janoilla.



Merkkiin muodostuu neljä yhtenevää kolmiota,
neljä yhtenevää suorakulmiota ja neliö.

Kolmiot ovat suorakulmaisia ja tasakylkisiä.

Merkitään kolmion kyljen pituutta kirjaimella x.

Koska stop-merkin korkeus on 90,0 cm, saadaan yhtälö
$x + 37{,}0 + x = 90{,}0$.

Ratkaistaan yhtälöstä kyljen pituus x.

$$\begin{aligned} x + 37{,}0 + x &= 90{,}0 \\ 2x &= 90{,}0 - 37{,}0 \\ 2x &= 53{,}0 \quad \| :2 \\ x &= 26{,}5 \end{aligned}$$

Yhden kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{26{,}5 \text{ cm} \cdot 26{,}5 \text{ cm}}{2} = 351{,}125 \text{ cm}^2 .$$

Yhden suorakulmion pinta-ala on

$$A_{\text{suorakulmio}} = 26{,}5 \text{ cm} \cdot 37{,}0 \text{ cm} = 980{,}5 \text{ cm}^2$$

Neliön pinta-ala on

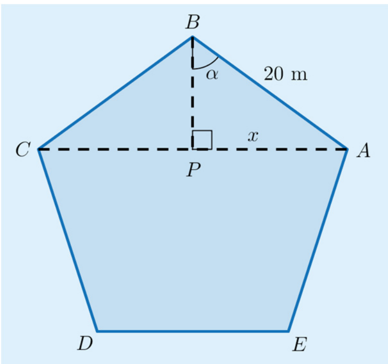
$$A_{\text{neliö}} = 37{,}0\ \text{cm} \cdot 37{,}0\ \text{cm} = 1369\ \text{cm}^2$$

Stop-merkin pinta-ala on

$$\begin{aligned}A &= 4A_{\text{kolmio}} + 4A_{\text{suorakulmio}} + A_{\text{neliö}} \\ &= 4 \cdot 351{,}125\ \text{cm}^2 + 4 \cdot 980{,}5\ \text{cm}^2 + 1369\ \text{cm}^2 \\ &= 6695{,}5\ \text{cm}^2 \\ &\approx 6700\ \text{cm}^2.\end{aligned}$$

Vastaus: 6700 cm^2

289. **a)** Piirretään mallikuva.



Reitti kahta sivua pitkin esimerkiksi nurkasta A nurkkaan C on matka $AB + BC$.

Yhteensä matka on 20 m + 20 m = 40 m.

Lasketaan matka nurkasta A nurkkaan C suorinta reittiä eli janan AC pituus.

Kolmio ABC on tasakylkinen, joten sen korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.

Viisikulmion kulmien summa on $(5 - 2) \cdot 180° = 540°$, joten

säännöllisen viisikulmion kulman *CBA* suuruus on $\frac{540°}{5} = 108°$.

Kulma α on puolet tästä eli $\alpha = \frac{108°}{2} = 54°$.

Lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta janan x pituus sinin avulla.

$$\begin{aligned} \sin 54° &= \frac{x}{20} \quad \| \cdot 20 \\ x &= 20 \cdot \sin 54° \\ x &= 16{,}180... \end{aligned}$$

Jana x on puolet janan *AC* pituudesta, joten uitava matka on

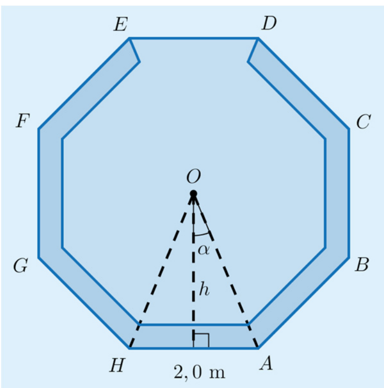
$2 \cdot x = 2 \cdot 16{,}180...\ \text{m} = 32{,}360...\ \text{m}$.

Reitti reunoja pitkin on

$40\ \text{m} - 32{,}360...\ \text{m} = 7{,}639...\ \text{m} \approx 7{,}6\ \text{m}$ pidempi kuin suorin reitti.

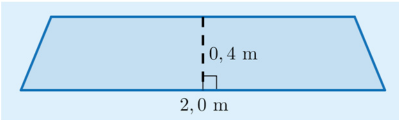
Vastaus: 7,6 m

b) Täydennetään mallikuvaa.



Penkit muodostavat seitsemän samanlaista tasakylkistä puolisuunnikasta.

Tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus on 40 cm = 0,4 m ja toisen yhdensuuntaisen sivun pituus on 2,0 m.



Toisen yhdensuuntaisen sivun pituuden selvittämiseksi lasketaan aluksi tasakylkisen kolmion *HAO* korkeus *h*.

Keskuskulman suuruus on 360°, joten kolmion

huippukulman suuruus on $\frac{360°}{8} = 45°$.

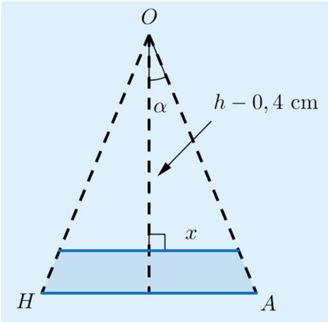
Kulma α on puolet huippukulmasta eli $\alpha = \frac{45°}{2} = 22,5°$.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen

yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon, jonka kanta on $\frac{2,0 \text{ m}}{2} = 1,0 \text{ m}$.

Ratkaistaan korkeus *h* tangentin avulla.

$$\begin{aligned}
\tan 22,5° &= \frac{1,0}{h} \quad \| \cdot h \\
h \cdot \tan 22,5° &= 1,0 \quad \| : \tan 22,5° \\
h &= \frac{1,0}{\tan 22,5°} \\
h &= 2,414...
\end{aligned}$$



Ratkaistaan puolisuunnikkaan tuntemattoman yhdensuuntaisen sivun pituuden puolikas x tangentin avulla.

$$\tan 22{,}5° = \frac{x}{h-0{,}4} \quad \| \cdot (h-0{,}4)$$
$$x = (h-0{,}4)\cdot \tan 22{,}5°$$
$$x = (2{,}414... - 0{,}4)\cdot \tan 22{,}5°$$
$$x = 2{,}014...\cdot \tan 22{,}5°$$
$$x = 0{,}834...$$

Puolisuunnikkaan toisen yhdensuuntaisen sivun pituus on

$2x = 2 \cdot 0{,}834...\text{ m} = 1{,}668...\text{ m}$.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A_{\text{puolisuunnikas}} = \frac{a+b}{2}h = \frac{2{,}0\text{ m} + 1{,}668...\text{ m}}{2}\cdot 0{,}4\text{ m} = 0{,}733...\text{ m}^2.$$

Penkkien pinta-ala on $7 \cdot A_{\text{puolisuunnikas}} = 7 \cdot 0{,}7333...\text{ m}^2 = 5{,}136...\text{ m}^2$.

Säännöllisen kahdeksankulmion pinta-ala on kahdeksan tasakylkisen kolmion yhteenlaskettu pinta.

$$A_{\text{8-kulmio}} = 8 \cdot \frac{ah}{2} = 8 \cdot \frac{2{,}0\text{ m}\cdot 2{,}414...\text{ m}}{2} = 19{,}313...\text{ m}^2$$

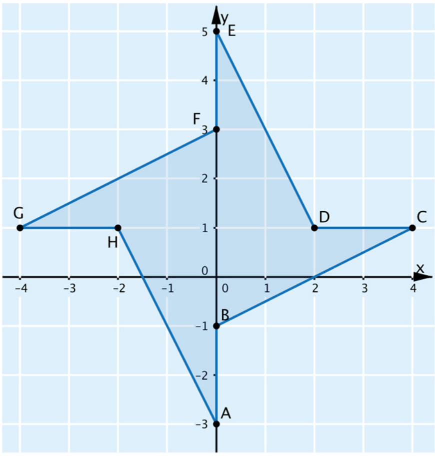
Penkkien osuus kodan pinta-alasta on

$$\frac{5{,}136...\text{ m}^2}{19{,}313...\text{ m}^2} = 0{,}265... \approx 0{,}27 = 27\ \%.$$

Vastaus: 27 %

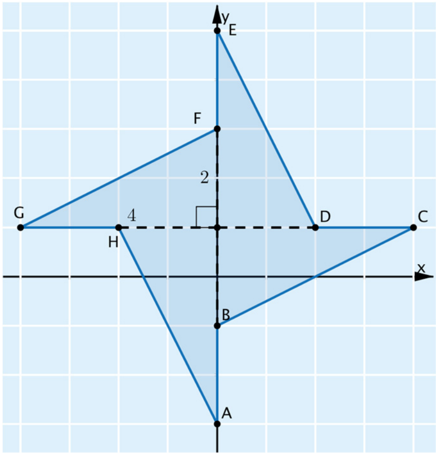
290. Piirretään koordinaatistoon pisteet A(0, –3), B(0, –1), C(4, 1), D(2, 1), E(0, 5), F(0,3), G(–4, 1) ja H(–2, 1).

Piirretään pisteiden kautta 8-kulmio ABCDEFGH.



Kuvion pinta-ala muodostuu neljästä yhtenevästä suorakulmaisesta kolmiosta.

Yhden kolmion kanta on 2 ruutua ja korkeus 4 ruutua.



Kolmion pinta-ala on

$$A_k = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4.$$

Koko 8-kulmion pinta-ala on $4 \cdot A_k = 4 \cdot 4 = 16$.

8-kulmion piirin määrittämistä varten lasketaan yhden kolmion hypotenuusan pituus x

Pythagoraan lauseella.

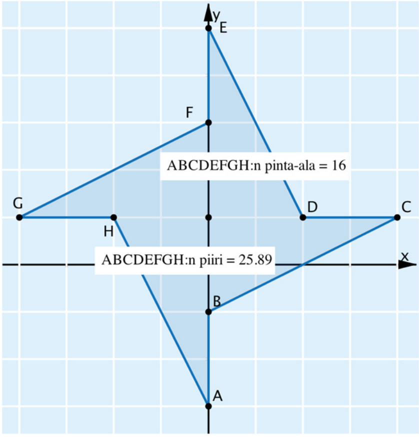
$$x^2 = 2^2 + 4^2$$
$$x^2 = 20$$
$$x = -\sqrt{20} \quad \text{tai } x = \sqrt{20}$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $x = \sqrt{20}$.

8-kulmion piiri on

$$4 \cdot x + \ 4 \cdot 2 = 4 \cdot \sqrt{20} + 4 \cdot 2 = 25{,}888... \approx 25{,}9$$

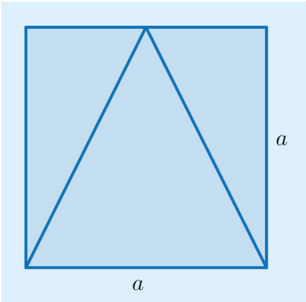
Tarkistus:



Vastaus: pinta-ala 16,0 ja piiri 25,9

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

291. Piirretään mallikuva. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella a.



Neliön pinta-ala on tällöin $A_{\text{neliö}} = a^2$.

Kolmion korkeus on yhtä suuri kuin neliön sivun pituus a,

joten kolmion pinta-ala on $A_{\text{kolmio}} = \dfrac{a \cdot a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

Kolmion pinta-alan suhde neliön pinta-alaan on

$$\frac{A_{\text{kolmio}}}{A_{\text{neliö}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{\cancel{a^2}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{a^2}} = \frac{1}{2}.$$

Vastaus: 1:2

292. Säännöllisen seitsemänkulmion sivujen pituudet kasvavat 25 %.

a) Säännöllisen monikulmion kulmien suuruudet ovat aina samat.
Ne eivät riipu sivujen pituuksista, joten jos sivujen pituudet kasvavat, pysyvät kulmien suuruudet silti samoina.

Vastaus: säilyvät ennallaan

b) Säännöllisen monikulmion jokainen sivu on yhtä pitkä.
Olkoon säännöllisen 7-kulmion sivun pituus aluksi a,
jolloin piiri on $7a$.

Kun sivun pituus kasvaa 25 %, on sivujen pituudet lopuksi $1{,}25a$.
Piiri on tällöin $7 \cdot 1{,}25\ a$, mikä on 1,25-kertainen alkuperäiseen piiriin $7a$ verrattuna.

Piirin pituus on kasvanut 1,25-kertaiseksi eli se on kasvanut 25 %.

Vastaus: 25 %.

c) Alkuperäinen 7-kulmio ja suurempi 7-kulmio ovat yhdenmuotoisia, koska ne ovat molemmat säännöllisiä 7-kulmioita.

Mittakaava on vastinsivujen pituuksien suhde eli $\dfrac{\cancel{a}}{1{,}25\cancel{a}} = \dfrac{1}{1{,}25}$.

Olkoon alkuperäisen 7-kulmion pinta-ala A_1 ja suuremman 7-kulmion pinta-ala A_2.

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten saadaan yhtälö
$\dfrac{A_1}{A_2} = \left(\dfrac{1}{1{,}25}\right)^2$.

Ratkaistaan tästä yhtälöstä pinta-ala A_2.

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{1}{1{,}25}\right)^2$$
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{1{,}25^2}$$
$$A_2 = 1{,}25^2 \cdot A_1$$
$$A_2 = 1{,}5625 \cdot A_1$$

Uusi pinta-ala A_2 on 1,5625-kertainen alkuperäiseen
pinta-alaan A_1 verrattuna, joten pinta-ala on kasvanut 56,25 % ≈ 56 %

Vastaus: 56 %

293. Koska pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö ja pinta-alojen suhde on

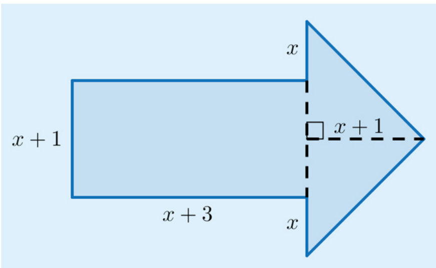
$\frac{1}{2}$, niin mittakaavojen suhde on $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Uusi mittakaava saadaan kertomalla alkuperäinen mittakaavaa luvulla
$\frac{1}{\sqrt{2}}$ eli uusi mittakaava on

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{20\,000} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 20\,000} \approx \frac{1}{28\,300}.$$

Vastaus: 1 : 28 300

294. Kuvio muodostuu suorakulmiosta ja tasakylkisestä kolmiosta.



Suorakulmion kanta on $x + 3$ ja korkeus $x + 1$, joten sen pinta-ala on

$$A_{\text{suorakulmio}} = (x+3)(x+1) = x^2 + x + 3x + 3 = x^2 + 4x + 3.$$

Tasakylkisen kolmion kanta on $x + x + 1 + x = 3x + 1$ ja
korkeus $x + 1$, joten sen pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{(3x+1)(x+1)}{2} = \frac{3x^2 + 3x + x + 1}{2} = \frac{3x^2 + 4x + 1}{2}..$$

Kuvion pinta-alasta saadaan lauseke

$$A = A_{\text{suorakulmio}} + A_{\text{kolmio}} = x^2 + 4x + 3 + \frac{3x^2 + 4x + 1}{2}.$$

Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä tuntematon x.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 + \frac{3x^2 + 4x + 1}{2} &= 12 \quad \| \cdot 2 \\ 2x^2 + 8x + 6 + 3x^2 + 4x + 1 &= 24 \\ 5x^2 + 12x + 7 &= 24 \\ 5x^2 + 12x - 17 &= 0 \end{aligned}$$

Sijoitetaan kertoimet $a = 5$, $b = 12$ ja $c = -17$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

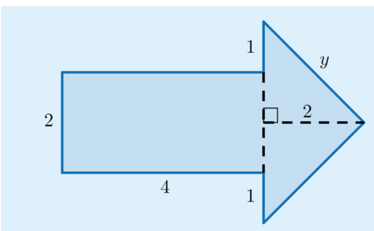
$$\begin{aligned} x &= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-17)}}{2 \cdot 5} \\ &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 340}}{10} \\ &= \frac{-12 \pm \sqrt{484}}{10} \\ &= \frac{-12 \pm 22}{10} \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisut ovat

$$x = \frac{-12 + 22}{10} = \frac{10}{10} = 1 \text{ ja } x = \frac{-12 - 22}{10} = \frac{-34}{10}^{(2} = -\frac{17}{5}.$$

Pituus ei voi olla negatiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

Sijoitetaan $x = 1$ kuvioon.



Tasakylkisen kolmion kyljen pituus y saadaan suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on 2 ja

toinen on puolet tasakylkisen kolmion kannasta eli $\frac{1+2+1}{2}=\frac{4}{2}=2$.

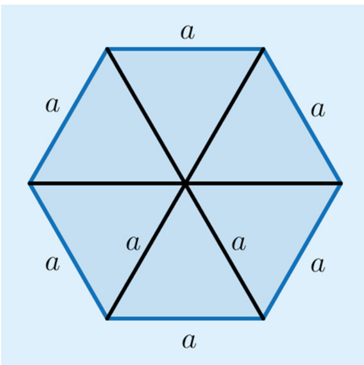
$$y^2 = 2^2 + 2^2$$
$$y^2 = 8$$
$$y = -\sqrt{8} \text{ tai } y = \sqrt{8}$$
Negatiivinen rarkaisu ei kelpaa.
$$y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Kuvion piiri on

$$p = 2+4+1+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+1+4 = 12+4\sqrt{2} = 17{,}656\ldots$$

Vastaus: $12+4\sqrt{2} \approx 17{,}7$

295. Piirretään mallikuva.

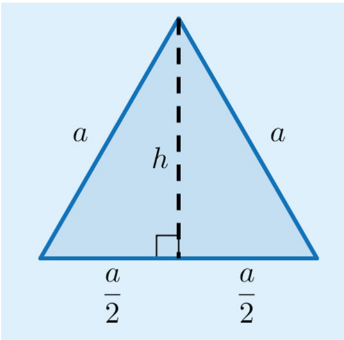


Säännöllinen kuusikulmio koostuu kuudesta yhtenevästä tasasivuisesta kolmiosta.

Jos säännöllisen kuusikulmion pinta-ala on 18 cm^2, niin

yhden tasasivuisen kolmion pinta-ala on $\dfrac{18\,\text{cm}^2}{6} = 3\,\text{cm}^2$.

Piirretään mallikuva yhdestä tasasivuisesta kolmiosta ja määritetään kolmion pinta-ala.



Kolmion korkeus h saadaan ratkaistua Pythagoraan lauseella.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$\frac{a^2}{4} + h^2 = a^2$$

$$h^2 = {}^{4)}a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = -\sqrt{\frac{3a^2}{4}} \quad \text{tai } h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa.

$$h = \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$

Tasasivuisen kolmion pinta-ala on

$$A=\frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot a}{2}}{2}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

kun kolmion sivun pituus on a.

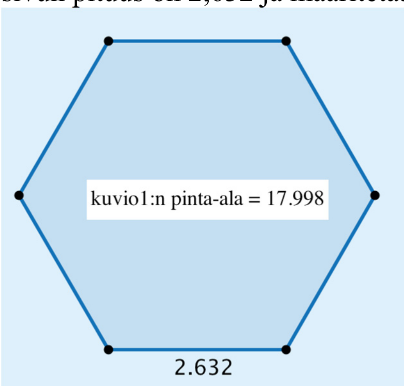
Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö, josta ratkaistaan sivun pituus a.

$$\begin{aligned}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}&=3 \quad \| \cdot 4\\ a^2\sqrt{3}&=12 \quad \| :\sqrt{3}\\ a^2&=\frac{12}{\sqrt{3}}\\ a^2&=6{,}928...\\ a=-\sqrt{6{,}928...} \quad &\text{tai} \quad a=\sqrt{6{,}928...}\\ a=-2{,}632... \quad &\text{tai} \quad a=2{,}632...\end{aligned}$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, joten $a \approx 2{,}6$.

Tasakylkisen kolmion sivun pituus a on samalla myös säännöllisen kuusikulmion sivun pituus a.

Tarkistus: Piirretään sopivalla ohjelmalla säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 2,632 ja määritetään sen pinta-ala.



Vastaus: 2,6 cm