1 GEOMETRIAN PERUSTEITA

1.1 Geometrian peruskäsitteitä

ALOITA PERUSTEISTA

101. **a)** Kulmat α ja $\sphericalangle BCD$ ovat alle 90°, joten ne ovat teräviä.

Vastaus: α ja $\sphericalangle BCD$

b) Kulmat γ ja $\sphericalangle DCA$ ovat 90°:n ja 180°:n välissä, joten ne ovat tylppiä.

Vastaus: γ ja $\sphericalangle DCA$

c) Kulma β on suorakulma.

Vastaus: β

102. A Kulma 36° on välillä $0 < \alpha < 90°$, joten se on terävä kulma. Kulmaa 36° vastaa vaihtoehto I.

B Kulma 180° on oikokulma, joten sitä vastaa vaihtoehto IV.

C Kulma 175° on välillä $90° < \alpha < 180°$, joten se on tylppä kulma. Kulmaa 175° vastaavaa vaihtoehto II.

D Kulma 90° on suorakulma, joten sitä vastaa vaihtoehto III.

E Kulma 201° on välillä $180° < \alpha < 360°$, joten se on kupera kulma. Kulmaa 201° vastaa vaihtoehto V.

Vastaus: A: I, B: IV, C: II, D: III ja E: V

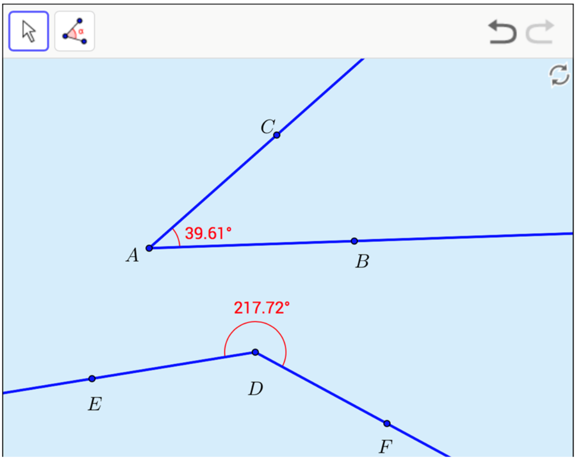
103. Kulman α kärki on pisteessä Q, oikealla kyljellä on piste R ja vasemmalla kyljellä piste P.

Täten $\alpha = \sphericalangle RQP$.

Vastaavasti $\beta = \sphericalangle QPR$ ja $\gamma = \sphericalangle PRQ$.

Vastaus: $\alpha = \sphericalangle RQP$, $\beta = \sphericalangle QPR$ ja $\gamma = \sphericalangle PRQ$

104. Appletin kulmatyökalun avulla kulman BAC suuruudeksi saadaan 39,61° ja kulman FDE suuruudeksi saadaan 217,72°.



Vastaus: $\sphericalangle BAC = 39{,}61°$ ja $\sphericalangle FDE = 217{,}72°$

105. **a)** Kolmion kulmien summa on 180°. Kulma α saadaan, kun180°:sta vähennetään tunnettujen kulmien arvot, eli

$\alpha = 180° - 51° - 62° = 67°$.

Vastaus: $\alpha = 67°$

b) Kulma α saadaan, kun 180°:sta vähennetään tunnettujen kulmien arvot, eli $\alpha = 180° - 90° - 63° = 27°$

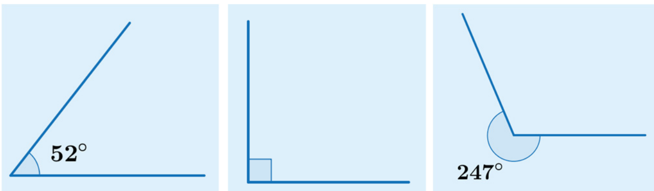
Vastaus: $\alpha = 27°$

c) Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summalle ja ratkaistaan siitä kulma α.

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + 2\alpha &= 180° \\ 4\alpha &= 180° \quad \| : 4 \\ \alpha &= 45° \end{aligned}$$

Vastaus: $\alpha = 45°$

106. Videossa https://vimeo.com/182675208/8fd7a4985a näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Vastaus: 

107. Kulmat α ja 60° ovat vieruskulmia, joten $\alpha = 180° - 60° = 120°$.

Kulmat β ja 48° ovat ristikulmia, joten $\beta = 48°$.

Kulma γ on kulman 56° kanssa samankohtaisen kulman vieruskulma ja suorat s ja l ovat yhdensuuntaisia,

joten $\gamma = 180° - 56° = 124°$.

Vastaus: $\alpha = 120°$, $\beta = 48°$, $\gamma = 124°$

108. Kulma α on kulman 40° kanssa samankohtainen ja lisäksi suorat k ja l ovat yhdensuuntaisia, joten kulma $\alpha = 40°$.

Kulmat α, β ja 90° muodostavat oikokulman, joten $\alpha + \beta + 90° = 180°$.

Sijoitetaan saatuun yhtälöön $\alpha = 40°$ ja ratkaistaan yhtälöstä β.

$$40° + \beta + 90° = 180°$$
$$\beta = 180° - 90° - 40°$$
$$\beta = 50°$$

Kulma $\beta = 50°$.

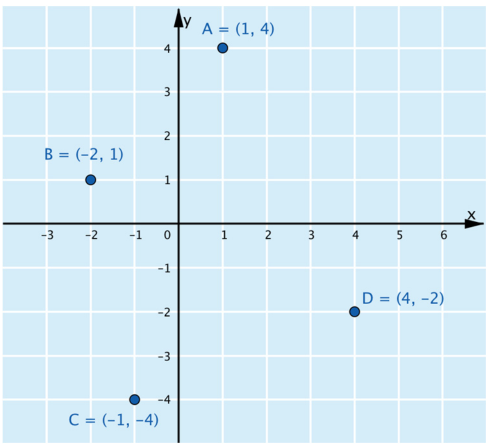
Merkitään kolmion kolmatta kulmaa kirjaimella ε. Kulma ε saadaan, kun kolmion kulmien summasta eli 180°:sta vähennetään kolmion tunnetut kulmat.

$$\varepsilon = 180° - 29° - 102° = 49°$$

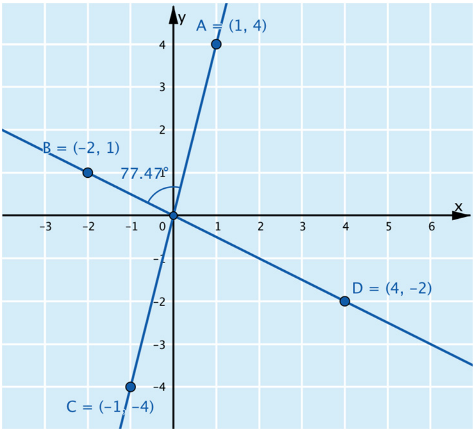
Kulma γ on kulman ε vieruskulma, joten $\gamma = 180° - 49° = 131°$.

Vastaus: $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$ ja $\gamma = 131°$

109. Piirretään koordinaatistoon pisteet
$A = (1, 4)$, $B = (–2, 1)$, $C = (–1, –4)$ ja $D = (4, –2)$.

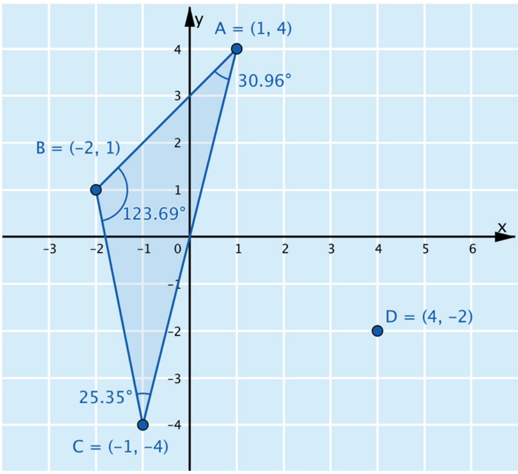


a) Piirretään suorat AC ja BD sekä merkitään suorien leikkauspiste. Mitataan suorien välinen kulma kolmen pisteen (A, leikkauspiste ja B) avulla.



Suorien välinen kulma on 77°.
Vastaus: 77°

b) Piirretään kolmio ABC ja mitataan sen kulmat.

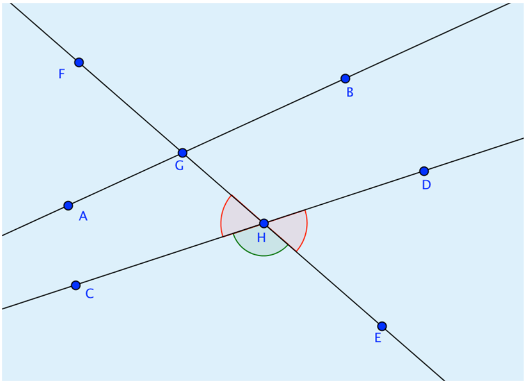


Kolmion kulmien suuruudet ovat 124°, 31° ja 25°. Kulma $\sphericalangle CBA = 124°$ on yli 90° ja alle 180° eli tylppä kulma, joten kolmiossa on tylppä kulma.

Vastaus: 124°, 31° ja 25°. On.

VAHVISTA OSAAMISTA

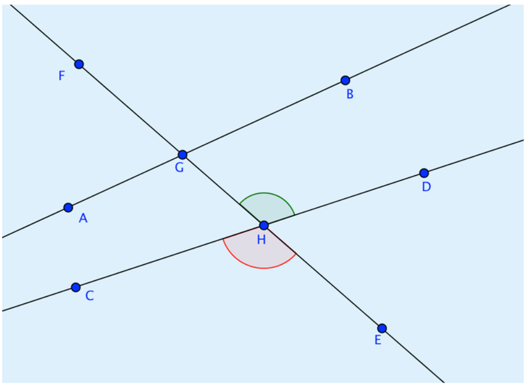
110. a)



Kulman $\sphericalangle CHE$ vieruskulmia ovat kulmat $\sphericalangle EHD$ ja $\sphericalangle GHC$.

Vastaus: $\sphericalangle EHD$ ja $\sphericalangle GHC$

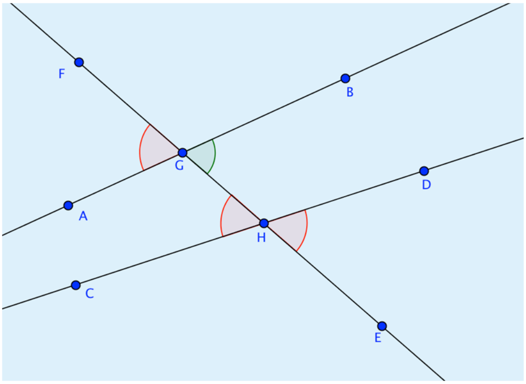
b)



Kulman *DHG* ristikulma on kulma *CHE*.

Vastaus: $\sphericalangle CHE$

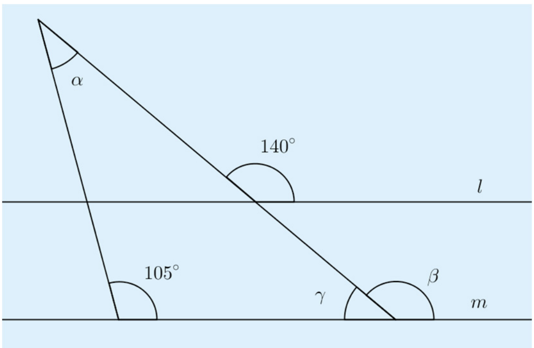
c)



Kulman *HGB* samankohtaiset kulmat ovat kulmat *FGA*, *EHD* ja *GHC*.

Vastaus: $\sphericalangle FGA$, $\sphericalangle EHD$ ja $\sphericalangle GHC$

111. **a)**



Suorat *l* ja *m* ovat yhdensuuntaisia, joten samankohtaiset kulmat 140° ja β ovat yhtä suuria eli $\beta = 140°$.

Kulmat β ja γ ovat vieruskulmia, joten $\gamma = 180° - 140° = 40°$.
Kolmion kulmien summa on 180°, joten isommasta kolmiosta saadaan
$\alpha = 180° - 105° - \gamma = 180° - 105° - 40° = 180° - 145° = 35°$.

Vastaus: $\alpha = 35°$

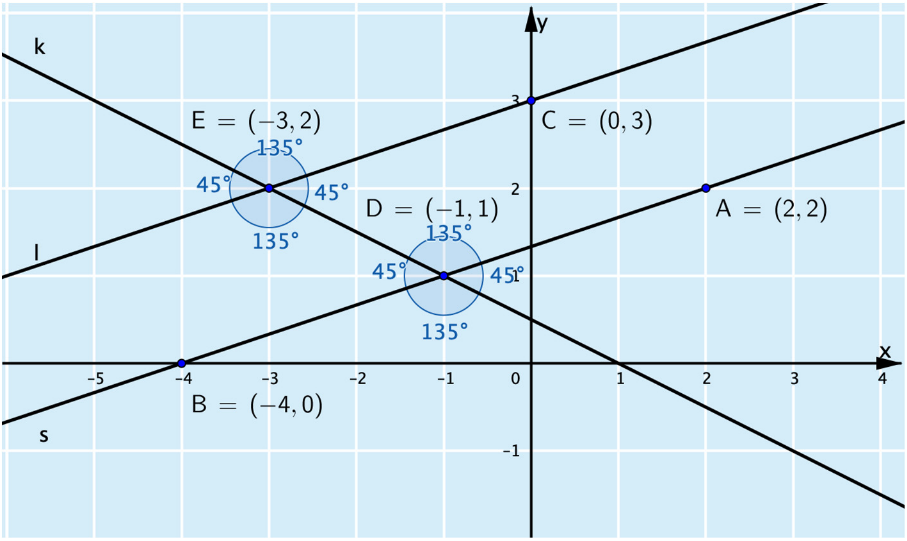
b) Kulman 113° vieruskulma on 180° – 113° = 67°.

Samankohtaiset kulmat 67° ja 68° eivät ole yhtä suuria, joten suorat *s* ja *t* eivät ole yhdensuuntaisia.

Vastaus: eivät ole

112. Videossa https://vimeo.com/499543151/1691e10472 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

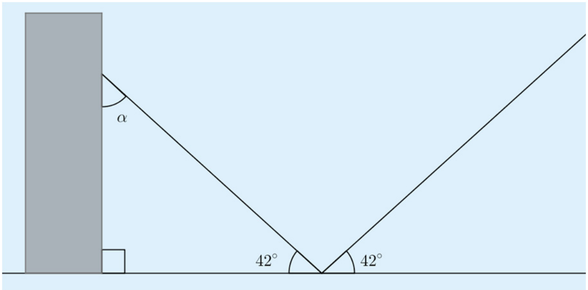
Piirretään tehtävänannon suorat ja määritetään suorien leikkauspisteisiin muodostuneiden kulmien suuruudet ohjelmalla.



Leikkauspisteisiin muodostuneet kulmat ovat 45° ja 135°.

Vastaus: 45° ja 135°

113. Auringonsäde heijastuu vesilätäköstä maahan nähden samassa kulmassa kuin se osuu siihen. Piirretään mallikuva.



Seinä, maa ja heijastunut auringon säde muodostavat kolmion, josta tunnetaan kulmat 42° ja 90°.

Heijastuva valo muodostaa seinän kanssa kulman
$\alpha = 180° - 90° - 42° = 48°$.

Vastaus: 48°

114. **a)** Kun 180 asteen kulmasta vähennetään terävä kulma, saadaan kulma, jonka suuruus on 90 ja 180 asteen välissä. Kulma on tylppä, joten väite on epätosi

Vastaus: epätosi, tylppä kulma

b) Ristikulmat ovat yhtä suuria, joten suoran kulman ristikulma on suora kulma. Väite on tosi.

Vastaus: tosi

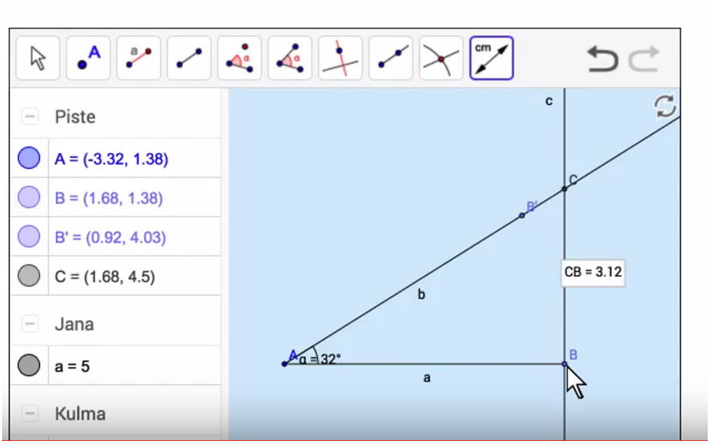
c) Tylpän kulman suuruus on välillä $90° < \alpha < 180°$. Kun lasketaan kahden tylpän kulman summa saadaan kulma,
joka on 180 ja 360 asteen välissä. Kulma on suurempi kuin oikokulma, joten väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, suurempi kuin oikokulma

d) Vieruskulmien summa on 180° ja kolmion kulmien summa on 180°. Jos merkitään yhtä kolmion kulmaa kirjaimella α, sen vieruskulman suuruus on $180° - \alpha$. Toisaalta myös kolmion kahden muun kulman summa on $180° - \alpha$. Joten väite on

Vastaus: tosi

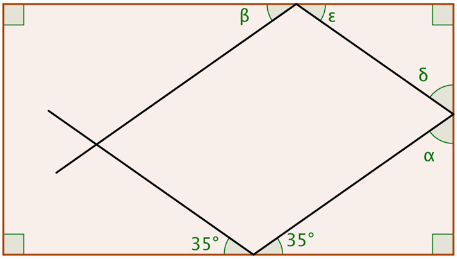
115. Videossa https://vimeo.com/182675258/63b5464954 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.



Puu on 3,12 m ≈ 3,1 metriä korkea.

Vastaus: 3,1 metriä

116.



Biljardipallo kimpoaa reunasta samassa kulmassa kuin se tulee siihen, joten kulma α saadaan laskettua suorakulmaisesta kolmiosta, jossa on α ja suora kulma sekä 35° kulma.

Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin

$\alpha = 180° - 90° - 35°) = 55°$.

Koska pallo kimpoaa reunasta samassa kulmassa kuin se tulee siihen, kulma $\delta = 55°$.

Kulmat ε saadaan laskettua kolmiosta, jossa on suora kulma ja 55° kulma.

Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin

$\varepsilon = 180° - 90° - 55°) = 35°$.

Koska pallo kimpoaa reunasta samassa kulmassa kuin se tulee siihen, kulma $\beta = 35°$.

Vastaus: $\alpha = 55°$, $\beta = 35°$

117. Merkitään toiseksi suurimman kulman suuruutta kirjaimella x.

Tällöin pienimmän kulman suuruus on $x - 4°$ ja suurimman $2x$.

Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summalle ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} x + x - 4° + 2x &= 180° \\ 4x &= 180° + 4° \\ 4x &= 184° \quad \| :4 \\ x &= 46° \end{aligned}$$

Pienin kulma on $46° - 4° = 42°$ ja suurin kulma on $2 \cdot 46° = 92°$.

Vastaus: 42°, 46° ja 92°

118. **a)** Merkitään pienemmän kulman suuruutta kirjaimella x, jolloin suuremman kulman suuruus on $x + 13°$.

Vieruskulmien summa 180°, joten $x + x + 13° = 180°$.

Ratkaistaan yhtälöstä pienemmän kulman suuruus x.

$$\begin{aligned} x + x + 13° &= 180° \\ 2x &= 180° - 13° \\ 2x &= 167° \quad \| :2 \\ x &= 83{,}5° \end{aligned}$$

Suurempi kulma on $83{,}5° + 13° = 96{,}5°$.

Vastaus: 83,5° ja 96,5°

b) Merkitään kolmion pienimmän kulman suuruutta kirjaimella x.

Tällöin toiseksi pienimmän kulman suuruus on $2x$ ja suurimman $3x$.

Kolmion kulmien summa on 180°, josta saadaan yhtälö
$x + 2x + 3x = 180°$.

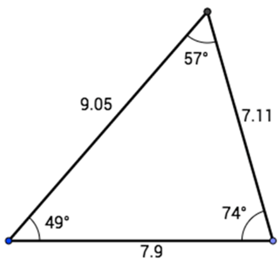
Ratkaistaan yhtälöstä pienimmän kulman suuruus x.

$$\begin{aligned} x + 2x + 3x &= 180° \\ 6x &= 180° \quad \| : 6 \\ x &= 30° \end{aligned}$$

Toiseksi pienimmän kulman suuruus on $2 \cdot 30° = 60°$ ja suurimman kulman $3 \cdot 30° = 90°$.

Vastaus: 30°, 60° ja 90°

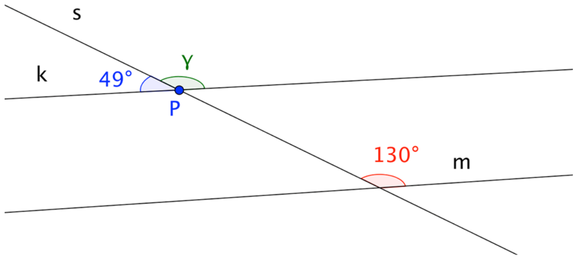
119. Videossa https://vimeo.com/182675351/2b1bfe26bf näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.



Tuntemattomien sivujen pituudet ovat 9,1 ja 7,1 ja kulman suuruus on 57°.

Vastaus: sivun pituudet 9,1 ja 7,1 ja 57°

120. Kulman 49° vieruskulma on γ = 180° – 49° = 131°, joten samankohtaiset kulmat eivät ole yhtä suuret eivätkä suorat ole yhdensuuntaiset.



Suora m nousee oikealle mentäessä jyrkemmin kuin suora k, joten suorat leikkaavat pisteen P oikealla puolella.

Vastaus: Eivät ole. Oikealla puolella.

121. **a)** Ristikulmat ovat yhtä suuret, joten $x + 30° = x^2$.

Tästä saadaan toisen asteen yhtälö $-x^2 + x + 30 = 0$.

Yhtälön voi ratkaista ohjelmalla tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 30}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{-2} = \frac{-1 \pm 11}{-2}$$

$$x = \frac{-1+11}{-2} = \frac{10}{-2} = -5 \text{ tai } x = \frac{-1-11}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$

Vain positiivinen ratkaisu kelpaa, joten $x = 6°$.

Vastaus: $x = 6°$

b) Vieruskulmien summa on 180°, joten $5x + 26° + x^2 + 10x = 180°$.

Tästä saadaan toisen asteen yhtälö $x^2 + 15x – 154 = 0$.

Yhtälön voi ratkaista ohjelmalla tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla

$$\begin{aligned} x &= \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-154)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 616}}{2} \\ &= \frac{-15 \pm \sqrt{841}}{2} \\ &= \frac{-15 \pm 29}{2} \end{aligned}$$

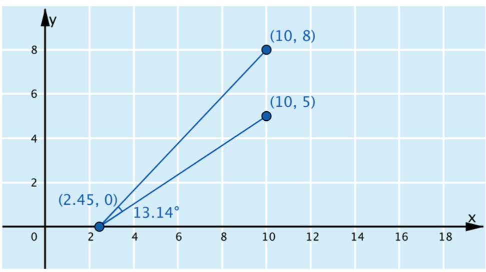
$$x = \frac{-15 + 29}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-15 - 29}{2} = \frac{-44}{2} = -22$$

Vain positiivinen ratkaisu kelpaa, joten $x = 7°$.

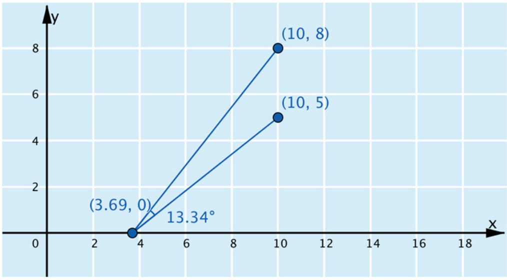
Vastaus: $x = 7°$

122. Piirretään tilanteesta kuva, johon merkitään

piste (10, 5), piste (10, 8), x-akselin piste ja kulma, jonka kärki on x-akselin pisteessä.



a) Selvitetään siirtämällä x-akselin pistettä, milloin piirretty kulma on suurin.



Suurin kulma on 13,34°.

Vastaus: 13,34°

b) Näkökulma on suurin, kun katsojan x-koordinaatti on 3,69 ja patsaan jalustan x-koordinaatti on 10.

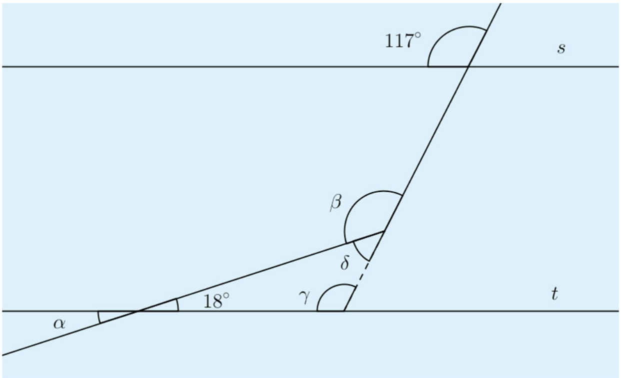
Näkökulma on suurin, kun katsojan etäisyys patsaan jalustasta on $10 - 3{,}69 = 6{,}31 \approx 6$ metriä.

Vastaus: 6 m

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

123. Kulma α ja 18° ovat ristikulmia, joten kulma α = 18°.

Jatketaan suoraa s leikkaavaa puolisuoraa alaspäin niin, että kuvioon muodostuu kolmio.

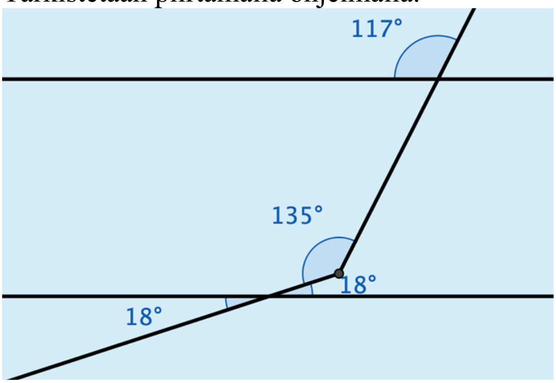


Suorat s ja t ovat yhdensuuntaisia, joten samankohtaiset kulmat 117° ja γ ovat yhtä suuria, eli γ = 117°.

Kolmion kulmien summa on 180°, joten
$\delta = 180° - 18° - \gamma) = 180° - 18° - 117°) = 45°$.

Kulmat β ja δ ovat vieruskulmia, joten $\beta = 180° - \delta = 180° - 45° = 135°$.

Tarkistetaan piirtämällä ohjelmalla.



Vastaus: α = 18°, β =135°

124. Kulma α on kulman $3x$ vieruskulma, joten $\alpha = 180° - 3x$.

Kolmion merkitsemätön kulma on myös kulman $3x$ vieruskulma eli se on myös $180° - 3x$.

Kolmion kulmien summa on 180°, josta saadaan yhtälö $(180° - 3x) + (180° - 3x) + x = 180°$.

Ratkaistaan yhtälöstä kulma x.

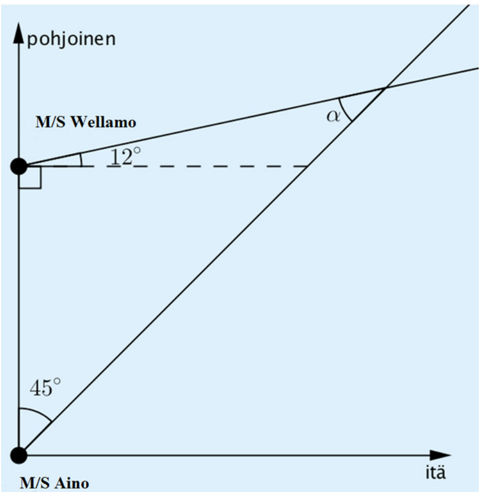
$$
\begin{aligned}
180° - 3x + 180° - 3x + x &= 180° \\
-5x &= 180° - 180° - 180° \\
-5x &= -180° \quad \| : (-5) \\
x &= 36°
\end{aligned}
$$

Kysytty kulma $\alpha = 180° - 3 \cdot 36° = 180° - 108° = 72°$.

Vastaus: $\alpha = 72°$

125. Pohjoinen ja itä ovat toisiaan vastaan suorassa kulmassa. Koillinen on 45° kulmassa pohjoisesta itään (tai idästä pohjoiseen).

Piirretään mallikuva laivojen kulkureiteistä.



Laivojen sijainnit ja kurssien leikkauspiste muodostavat kolmion, jonka yksi kulma on 45°, toinen kulma on 90° + 12° = 102° ja
kolmas on kysytty kulma α.

Kolmion kulmien summan avulla saadaan

$\alpha = 180° – (45° + 102°) = 180° – 147° = 33°$.

Laivojen kurssit leikkaavat toisensa 33 asteen kulmassa.

Vastaus: 33 asteen kulmassa

126. Lasketaan ensin, kuinka pitkä kaari vastaa yhtä astetta.

$$\frac{40\,000\text{ km}}{360} = 111{,}111\ldots\text{ km}$$

Yksi aste on 60 kulmaminuuttia, joten yhtä kaariminuuttia
vastaavan kaaren pituus on

$$\frac{111{,}111\ldots\text{ km}}{60} = 1{,}85185\ldots\text{ km} \approx 1850\text{ m}$$

Vastaus: 1850 metriä

1.2 Kolmio

ALOITA PERUSTEISTA

127. **a)** Teräväkulmaisessa kolmiossa kaikki kulmat ovat alle 90°.
Kuvissa I, III ja IV olevat kolmiot ovat likimain teräväkulmaisia.

Vastaus: I, III ja IV

b) Tylppäkulmaisissa kolmioissa on yksi tylppä kulma.
Kuvassa VI on likimain tylppäkulmainen kolmio.

Vastaus: VI

c) Suorakulmaisessa kolmiossa on 90°:n kulma.
Kuvissa II ja V olevat kolmiot ovat likimain suorakulmaisia.

Vastaus: II ja V

d) Tasakylkisessä kolmiossa on ainakin kaksi yhtä pitkää sivua.
Kuvissa I, III, IV, V ja VI olevat kolmiot ovat likimain tasakylkisiä.

Vastaus: I, III, IV, V ja VI

e) Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät.
Kuvissa I ja III olevat kolmiot ovat likimain tasasivuisia.

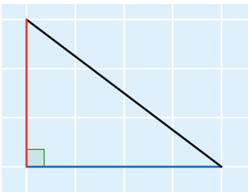
Vastaus: I ja III

128. Kolmion korkeusjana piirretään kannan vastaisesta kärjestä ja se on kohtisuorassa kantaa vastaan.

a)

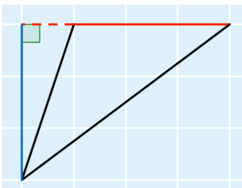
Kolmion korkeus on 3.

b)



Kolmion korkeus on 4.

c)



Kolmion korkeus on 3.

129. **a)** Kolmion piiri on sivujen pituuksien summa.

$p = 4{,}0 \text{ m} + 3{,}2 \text{ m} + 4{,}2 \text{ m} = 11{,}4 \text{ m} \approx 11 \text{ m}$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{4{,}0 \text{ m} \cdot 3{,}0 \text{ m}}{2} = \frac{12 \text{ m}^2}{2} = 6{,}0 \text{ m}^2$$

Vastaus: 11 m ja 6,0 m^2

b) Piiri on $p = 3{,}0 \text{ mm} + 4{,}5 \text{ mm} + 3{,}4 \text{ mm} = 10{,}9 \text{ mm} \approx 11 \text{ mm}$.

Pinta-ala on $A = \dfrac{3{,}0 \text{ mm} \cdot 3{,}4 \text{ mm}}{2} = \dfrac{10{,}2 \text{ mm}^2}{2} = 5{,}1 \text{ mm}^2$

Vastaus: 11 mm ja 5,1 mm^2

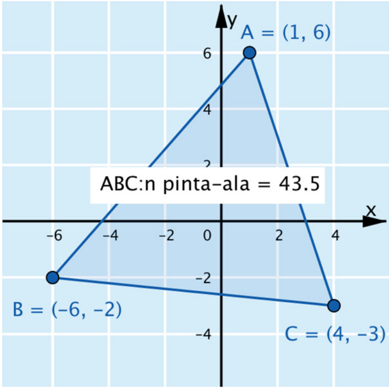
c) Piiri on $p = 3{,}2 \text{ cm} + 6{,}2 \text{ cm} + 4{,}4 \text{ cm} = 13{,}8 \text{ cm} \approx 14 \text{ cm}$.

Pinta-ala on $A =$

$$A = \frac{3{,}2 \text{ cm} \cdot 4{,}1 \text{ cm}}{2} = \frac{13{,}12 \text{ cm}^2}{2} = 6{,}56 \text{ cm}^2 \approx 6{,}6 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 14 cm ja 6,6 cm^2

130. Piirretään koordinaatistoon pisteiden $A = (1, 6)$, $B = (–6, –2)$ ja $C = (4, –3)$ muodostama kolmio ja määritetään sen pinta-ala.



Kolmion *ABC* pinta-ala on 43,5.

Vastaus: 43,5

131. **a)** Sijoitetaan kanta a = 8,0 cm ja pinta-ala A = 22 cm^2 kolmion pinta-alan laskukaavaan $A = \frac{ah}{2}$ ja ratkaistaan yhtälöstä korkeus h.

$$\begin{aligned} 22 &= \frac{8{,}0 \cdot h}{2} \quad \| \cdot 2 \\ 44 &= 8{,}0h \quad \| : 8{,}0 \\ h &= 5{,}5 \end{aligned}$$

Kolmion korkeus on 5,5 cm.

Vastaus: h = 5,5 cm

b) Sijoitetaan kanta $a = 6{,}5$ cm ja pinta-ala $A = 22\ \text{cm}^2$ kolmion pinta-alan laskukaavaan $A = \dfrac{ah}{2}$ ja ratkaistaan yhtälöstä korkeus h.

$$\begin{aligned} 22 &= \frac{6{,}5 \cdot h}{2} && \|\cdot 2 \\ 44 &= 6{,}5h && \|: 6{,}5 \\ h &= 6{,}769... \\ h &\approx 6{,}8 \end{aligned}$$

Kolmion korkeus on 6,8 cm.

Vastaus: $h = 6{,}8$ cm

132. TAPA 1:
Iso kolmio on suorakulmainen ja sen kateettien pituudet ovat 6,1 cm ja 4,5 cm.

Pinta-ala on $A = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{6{,}2\ \text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm}}{2} = 13{,}95\ \text{cm}^2 \approx 14\ \text{cm}^2$.

TAPA 2:
Otetaan ison kolmion hypotenuusa 7,7 cm kolmion kannaksi. Kolmion korkeus on tällöin 3,6 cm.

Pinta-ala on $A = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{7{,}7\ \text{cm} \cdot 3{,}6\,\text{cm}}{2} = 13{,}86\ \text{cm}^2 \approx 14\ \text{cm}^2$.

TAPA 3:
Täydennetään kolmio suorakulmioksi.

$A = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{6{,}2\ \text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm}}{2} = 13{,}95\ \text{cm}^2 \approx 14\ \text{cm}^2$.

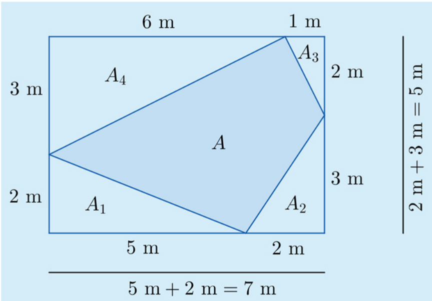
Kolmion pinta-ala on puolet suorakulmion pinta-alasta.

Suorakulmion pinta-ala on $4{,}5\ \text{cm} \cdot 6{,}2\ \text{cm} = 27{,}9\ \text{cm}^2$.

Kolmion pinta-ala on siis $\dfrac{27{,}9\ \text{cm}^2}{2} = 13{,}95\ \text{cm}^2 \approx 14\ \text{cm}^2$.

Vastaus: $14\ \text{cm}^2$

133. Väritetyn alueen pinta-ala saadaan vähentämällä suorakulmion pinta-alasta nurkissa olevien suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat.



$A = A_{\text{suorakulmio}} - A_1 - A_2 - A_3 - A_4$

$$= 7 \cdot 5 - \frac{5 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{6 \cdot 3}{2}$$
$$= 35 - 5 - 3 - 1 - 9$$
$$= 17\ (\text{m}^2)$$

Pinta-ala on 17 m^2.

Vastaus: 17 m^2

134. Kolmion piiri saadaan laskemalla sivujen pituuksien summa $x + 2x + (x + 3)$.
Piiri on toisaalta 24 m, joten saadaan yhtälö $x + 2x + (x + 3) = 24$.
Ratkaistaan yhtälöstä kirjain x.

$$x + 2x + (x + 3) = 24$$
$$4x + 3 = 24$$
$$4x = 21 \quad \| :4$$
$$x = 5{,}25$$

Kolmion sivujen mitat ovat

x:	5,25
$2x$:	$2 \cdot 5{,}25 = 10{,}5$
$x + 3$:	$5{,}25 + 3 = 8{,}25$

Vastaus: 5,25; 10,5 ja 8,2

VAHVISTA OSAAMISTA

135. Kolmio on tasakylkinen, joten korkeusjana jakaa huippukulman puoliksi.

Huippukulman puolikas on 30°, joten huippukulma on $2 \cdot 30° = 60°$.
Tällöin kantakulmat ovat yhteensä $180° – 60° = 120°$.

Koska tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, ne ovat 60°.

Kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret, joten kolmio on tasasivuinen.

Koska kannan puolikas on 2,5, niin kanta on yhteensä 5.

Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkät, joten $x = 5$.

Vastaus: $x = 5$, $\alpha = 60°$

136. **a)** Tasakylkisen kolmion on kyljet ovat pitkät, joten väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, kaksi

b) Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Tasakylkisessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, joten tasasivuinen kolmion on myös tasakylkinen kolmio. Väite on tosi.

Vastaus: tosi

c) Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan, joten väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, huippukulman ja kannan

d) Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuria. Koska kolmion kulmien summa on 180°, on yhden tasasivuisen kolmion

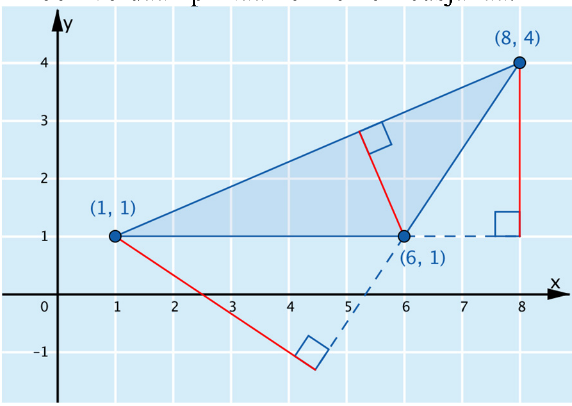
kulman suuruus $\frac{180°}{3} = 60°$. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, 60°

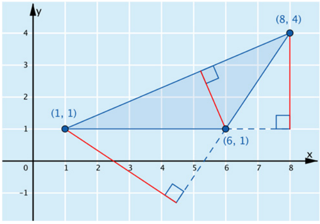
e) Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60°, joten ne ovat teräviä. Tasasivuinen kolmio on siis teräväkulmainen kolmio. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, teräväkulmainen

137. Korkeusjanat ovat kärjestä vastakkaiselle sivulle piirrettyjä janoja. Kolmioon voidaan piirtää kolme korkeusjanaa.



Videossa https://vimeo.com/182676176/f745b680b7 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Vastaus: 

138. Merkitään kolmion korkeutta kirjaimella x.

Tällöin kolmion korkeus on $4x$. Muodostetaan yhtälö kolmion pinta-alan avulla ja ratkaistaan siitä kirjain x.

$$\frac{x \cdot 4x}{2} = 64$$
$$2x^2 = 64 \quad \| :2$$
$$x^2 = 32$$
$$x = \sqrt{32} \qquad \text{tai } x = -\sqrt{32}$$
$$x = 5{,}656\ldots \text{tai } x = -5{,}656\ldots$$

Koska korkeus x on positiivinen, ratkaisuksi käy vain

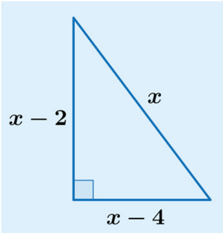
$x = 5{,}656\ldots$ m $\approx 5{,}7$ m.

Kolmion kanta on $4 \cdot 5{,}656\ldots$ m $= 22{,}627\ldots$ m ≈ 23 m.

Vastaus: kanta 23 m ja korkeus 5,7 m

139. Merkitään kolmion pisintä sivua kirjaimella x.

Tällöin toiseksi pisin sivu on $x - 2$ ja lyhin sivu on $(x - 2) - 2 = x - 4$.



a) Terassin aitaamiseen tarvitaan 21 m köyttä, ja terassin 3 metrin mittainen sisääntuloaukko jätetään vapaaksi.

Kolmion muotoisen terassin piiri on siten 21 m + 3 m = 24 m.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x.

$$
\begin{aligned}
x + x - 2 + x - 4 &= 24 \\
3x &= 30 \qquad \| :3 \\
x &= 10
\end{aligned}
$$

Terassin sivujen pituudet ovat

10 m,
10 m – 2 m = 8 m ja
10 m – 4 m = 6 m.

Vastaus: 6 m, 8 m ja 10 m

b) Kolmio on suorakulmainen, joten sen lyhimmät sivut ovat kanta ja korkeus. Pinta-ala on

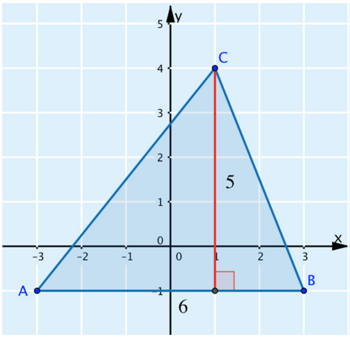
$$A = \frac{ah}{2} = \frac{6\text{ m} \cdot 8\text{ m}}{2} = \frac{48\text{ m}^2}{2} = 21\text{ m}^2$$

Terassin pinta-ala on 24 m^2.

Vastaus: 24 m^2

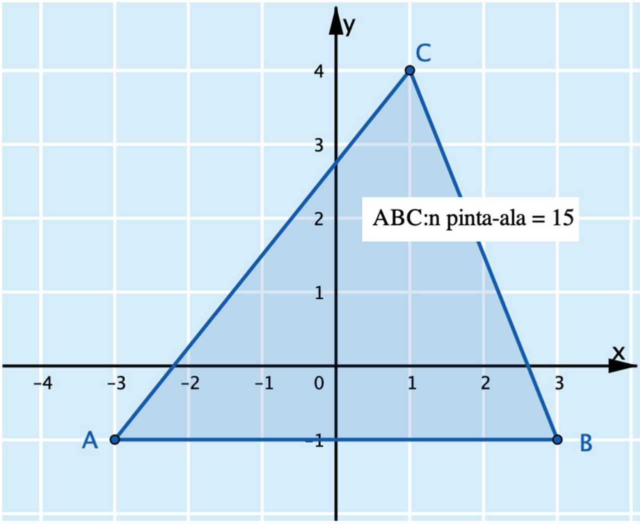
140. **a)** Piirretään kolmion korkeusjana. Korkeusjanan pituus $h = 5$.

Kolmion kannan pituus $a = 6$.



Kolmion pinta-ala on $A = \frac{ah}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$.

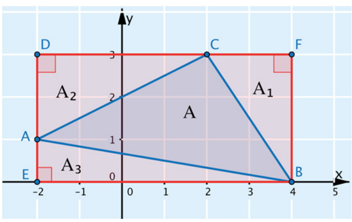
Tarkistus:



Vastaus: 15

b) Kehystetään kolmio suorakulmiolla, joka kulkee kolmion kärkipisteiden kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

Kolmion pinta-ala A saadaan, kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään nurkkiin jäävät suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat A_1, A_2 ja A_3.

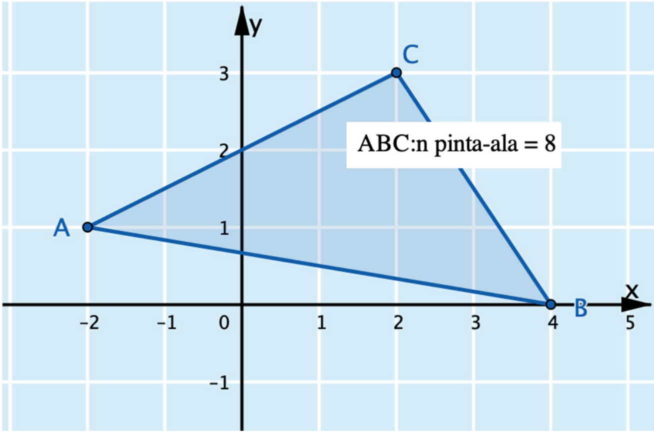


Kolmion pinta-ala on

$$A = A_{\text{suorakulmio}} - A_1 - A_2 - A_3$$

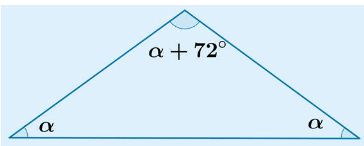
$$= 6 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 6}{2}$$
$$= 18 - 3 - 4 - 3$$
$$= 8$$

Tarkistus:



Vastaus: 8

141. **a)** Merkitään kantakulman suuruutta kirjaimella α.
Huippukulman suuruus on tällöin $\alpha + 72°$.



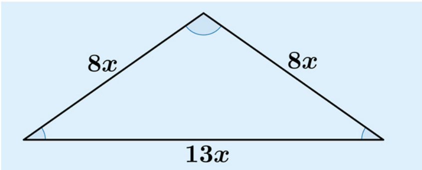
Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien suuruuksille ja ratkaistaan siitä kantakulma α.

$$\alpha + \alpha + \alpha + 72° = 180°$$
$$3\alpha = 108° \quad \|: 3$$
$$\alpha = 36°$$

Kolmion kantakulmien suuruudet ovat 36° ja huippukulman suuruus on 36° + 72° = 108°.

Vastaus: 36°, 36° ja 108°

b) Merkitään kolmion sivujen pituuksia $8x$, $8x$ ja $13x$. Muodostetaan yhtälö kolmion piirille ja ratkaistaan siitä tuntematon x.



$$\begin{aligned} 8x + 8x + 13x &= 11{,}6 \\ 29x &= 11{,}6 \quad \|: 29 \\ x &= 0{,}4 \end{aligned}$$

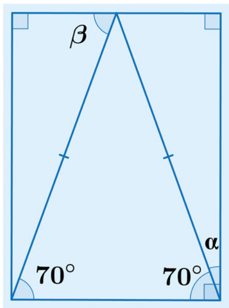
Kolmion sivujen pituudet ovat

$$8x = 8 \cdot 0{,}4 \text{ cm} = 3{,}2 \text{ cm ja}$$

$$13x = 13 \cdot 0{,}4 \text{ cm} = 5{,}2 \text{ cm} .$$

Vastaus: 3,2 cm, 3,2 cm ja 5,2 cm

142. **a)** Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten kulman α viereinen kulma on 70°.



Koska suorakulmion kaikki kulmat ovat 90°, niin kulma $\alpha = 90° - 70° = 20°$.

Samoin vasemmanpuoleisen suorakulmaisen kolmion tuntematon terävä kulma on 20°.

Kulmat 20° ja β ovat suorakulmaisen kolmion terävät kulmat. Niiden summa on 90°, joten

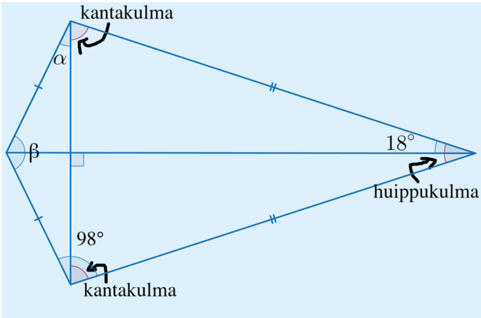
$$\begin{aligned} 20° + \beta &= 90° \\ \beta &= 90° - 20° = 70° \end{aligned}$$

Vastaus: $\alpha = 20°$ ja $\beta = 70°$

b) Oikeanpuoleisen tasakylkisen kolmion huippukulman puolikas on 18°, joten huippukulma on $2 \cdot 18° = 36°$.

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten

oikeanpuoleisen kolmion kantakulmat ovat $\dfrac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72°$.

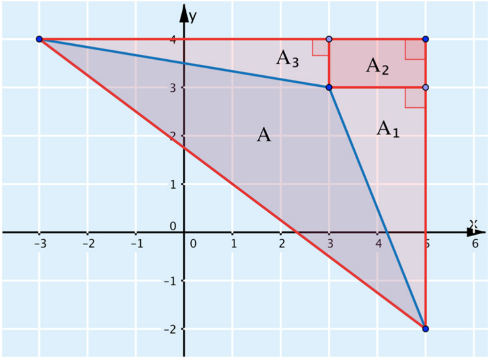


Vasemmanpuoleisen kolmion kantakulma on $\alpha = 98° - 72° = 26°$ ja huippukulma $\beta = 180° - 2 \cdot 26° = 128°$.

Vastaus: $\alpha = 26°$ ja $\beta = 128°$

143. Piirretään metsäpalstasta mallikuva. Täydennetään metsäpalsta suorakulmaiseksi kolmioksi, jonka hypotenuusa on sama kuin metsäpalstakolmion sivu.

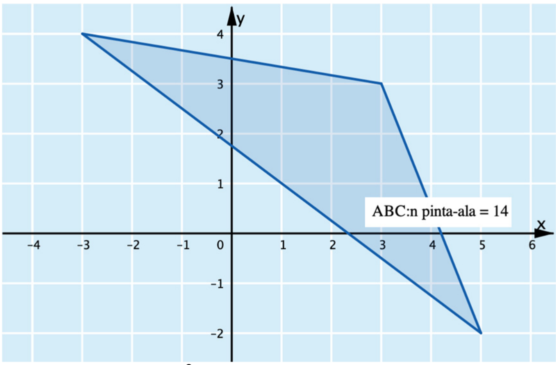
Metsäpalstan pinta-ala A saadaan, kun ison suorakulmaisen kolmion pinta-alasta vähennetään pienten suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat A_1 ja A_3 ja suorakulmion pinta-ala A_2.



$$A = A_{\text{iso suorakulmainen kolmio}} - A_1 - A_2 - A_3$$
$$= \frac{6 \cdot 8}{2} - \frac{2 \cdot 5}{2} - 2 \cdot 1 - \frac{6 \cdot 1}{2}$$
$$= 24 - 5 - 2 - 3$$
$$= 14$$

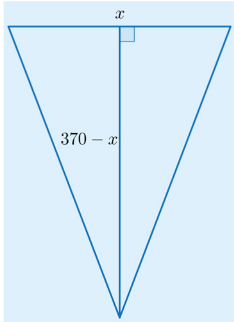
Metsäpalstan pinta-ala kartalla on 14 km^2.

Tarkistus:



Vastaus: 14 km^2

144. Merkitään tukiriman vaakasuoraa pituutta eli tasakylkisen kolmion kantaa kirjaimella x.



Tällöin pystysuoran tukiriman pituus eli kolmion korkeus on $370 - x$.

Muodostetaan yhtälö kyltin pinta-alalle $1{,}68\ \text{m}^2 = 16\ 800\ \text{cm}^2$ ja ratkaistaan siitä pituus x.

$$A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$$

$$16\,800 = \frac{x(370-x)}{2} \quad \| \cdot 2$$

$$33\,600 = 370x - x^2$$

$$x^2 - 370x + 33\,600 = 0 \quad \| \; a = 1,\ b = -370,\ c = 33\,600$$

Ratkaistaan yhtälö ohjelmalla tai sijoittamalla kertoimet a, b ja c toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-370) \pm \sqrt{(-370)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33\,600}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{370 \pm \sqrt{2500}}{2}$$

$$x = \frac{370 \pm 50}{2}$$

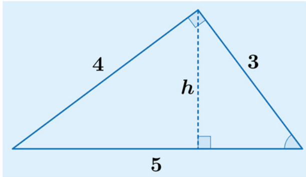
$$x = \frac{370 + 50}{2} = 210 \quad \text{tai} \quad x = \frac{370 - 50}{2} = 160$$

Jos vaakasuoran tukiriman pituus on 210 cm, on pystysuora tukirima $370 - 210 = 160$ cm.

Jos vaakasuoran tukiriman pituus on 160 cm, on pystysuora tukirima $370 - 160 = 210$ cm.

Vastaus: 160 cm ja 210 cm

145. Suurimman suorakulmaisen kolmion pinta-ala on kateettien avulla laskettuna



$$\frac{4\cdot 3}{2}=\frac{12}{2}=6.$$

Pinta-ala voidaan laskea myös niin, että kannaksi valitaan 5 yksikköä pitkä sivu ja korkeudeksi h.

Tällöin kolmion pinta-ala on $\frac{5\cdot h}{2}$.

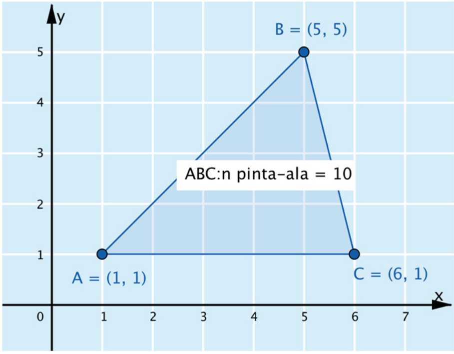
Asetetaan pinta-alat yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä korkeus h.

$$\frac{5h}{2}=6 \quad \| \cdot 2$$
$$5h=12 \quad \| :5$$
$$h=\frac{12}{5}=2{,}4$$

Vastaus: $\frac{12}{5}=2{,}4$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

146. **a)** Piirretään kulmio *ABC* ja määritetään sen pinta-ala.

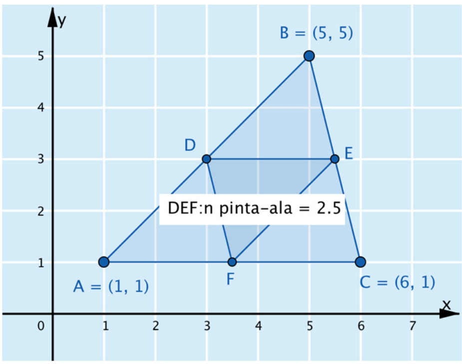


Kolmion *ABC* pinta-ala on 10.

Vastaus: 10

b) Piirretään jokaisen sivun keskipiste ja muodostetaan keskipisteiden avulla uusi kolmio.

Määritetään uuden kolmion pinta-ala.



Uuden kolmion pinta-ala on 2,5.

Vastaus: 2,5

c) Kohdan b kolmion pinta-alan ja kolmion *ABC* pinta-alan suhde on 2,5 : 10 = 1 : 4.

Kolmioiden suhde säilyy samana, vaikka kolmion *ABC* muotoa muuttaa.

Vastaus: $\frac{1}{4}$, suhde säilyy samana

147. Kolmion piiri on sivujen pituuksien summa 3,6 + 2,9 + 5,1 = 11,6 m.

Piirin puolikas $p = \frac{11{,}6 \text{ m}}{2} = 5{,}8 \text{ m}$.

Lasketaan kolmion pinta-ala Heronin kaavan avulla.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{5{,}8 \cdot (5{,}8-3{,}6) \cdot (5{,}8-2{,}9) \cdot (5{,}8-5{,}1)} \\ &= \sqrt{5{,}8 \cdot 2{,}2 \cdot 2{,}9 \cdot 0{,}7} \\ &= 5{,}0894\ldots \\ &\approx 5{,}1 \end{aligned}$$

Pinta-ala on noin 5,1 m^2.

Vastaus: 5,1 m^2

148. **a)** Kulman vastaisen sivun pituus on 2 + 3 = 5.

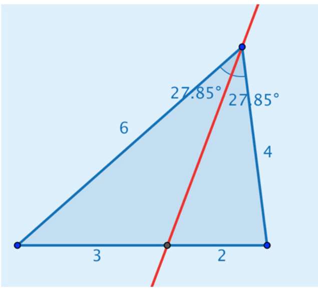
Merkitään kulman lyhempää viereistä sivua kirjaimella *x*

ja ratkaistaan sen pituus verrannosta.

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{6}$$
$$3x=12 \quad \|:3$$
$$x=4$$

Kolmion piiri on 5 + 6 + 4 = 15.

Tarkistus:



Vastaus: 15

b) Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma.

Ratkaistaan, kuinka pitkiin osiin kulman puolittaja jakaa kolmion sivun, jonka pituus on 10.

Merkitään lyhempää osaa kirjaimella x.

Tällöin pidempi osa on $10 - x$.

Muodostetaan verranto viereisten sivujen suhteen avulla ja ratkaistaan siitä tuntematon x.

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{10-x} &= \frac{4}{7} \\
7x &= 4 \cdot (10 - x) \\
7x &= 40 - 4x \\
11x &= 40 \quad \| :11 \\
x &= \frac{40}{11} \\
x &\approx 3{,}636\ldots
\end{aligned}
$$

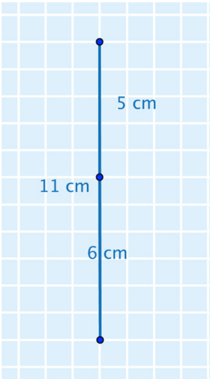
Lyhempi osa on noin 3,64 ja pidempi osa on noin 10 – 3,64 = 6,36

Vastaus: 3,64 ja 6,36

149. Videossa https://vimeo.com/182676253/2dcbd45c43 havainnollistetaan kolmion kolmannen sivun pituuden tutkimista.

a) Kolmion kolmas sivu on korkeintaan kahden muun sivun pituuksien summan mittainen.

Kolmion sivun yläraja on siten 5 cm + 6 cm = 11 cm.



Vastaus: 11 cm

b) Kolmion kolmas sivu on lyhimmillään silloin, kun muut sivut ovat päällekkäin.

Kolmion sivun alaraja on 6 cm – 5 cm = 1 cm.

Vastaus: 1 cm

c) Kolmion kolmannen sivun pituus on välillä 1 cm – 11 cm.

Jos kolmas sivu on ylärajan tai alarajan mittainen, kolmiolla ei ole enää pinta-alaa vaan se on surkastunut janaksi.

Vastaus: jana

1.3 Pythagoraan lause

ALOITA PERUSTEISTA

150. **a)** Hypotenuusa on suoran kulman vastainen sivu. Sen pituus on 15.

Vastaus: 15

b) Kolmion kateetit ovat suoran kulman viereiset sivut.
Niiden pituudet ovat 9 ja 12.

Vastaus: 9 ja 12

c) Pythagoraan lauseen mukaan kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö, joten yhtälö on $9^2 + 12^2 = 15^2$.

Vastaus: $9^2 + 12^2 = 15^2$

151. **a)** Lasketaan hypotenuusan x pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 12^2 + 16^2$$
$$x^2 = 400$$
$$x = \sqrt{400} \text{ tai } x = -\sqrt{400}$$
$$x = 20 \quad \text{ tai } x = -20$$

Koska hypotenuusan pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 20$. Sivun x pituus on 20.

Vastaus: 20

b) Lasketaan kateetin x pituus Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} x^2 + 20^2 &= 29^2 \\ x^2 &= 29^2 - 20^2 \\ x^2 &= 441 \\ x = \sqrt{441} &\text{ tai } x = -\sqrt{441} \\ x = 21 &\text{ tai } x = -21 \end{aligned}$$

Koska kateetin x pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 21$. Sivun x pituus on 21.

Vastaus: 21

c) Lasketaan kateetin x pituus Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} x^2 + 36^2 &= 85^2 \\ x^2 &= 85^2 - 36^2 \\ x^2 &= 5929 \\ x = \sqrt{5929} &\text{ tai } x = -\sqrt{5929} \\ x = 77 &\text{ tai } x = -77 \end{aligned}$$

Koska kateetin x pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 77$. Sivun x pituus on 77.

Vastaus: 77

152. **a)** Lasketaan hypotenuusan x pituus Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} x^2 &= 4{,}1^2 + 5{,}6^2 \\ x^2 &= 48{,}17 \\ x = \sqrt{48{,}17} &\text{ tai } x = -\sqrt{48{,}17} \\ x = 6{,}940\ldots &\text{ tai } x = -6{,}940\ldots \end{aligned}$$

Koska hypotenuusan pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 6{,}940\ldots \approx 6{,}9$. Sivun x pituus on noin 6,9 m.

Vastaus: 6,9 m

b) Lasketaan kateetin x pituus Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 3,2^2 &= 5,3^2 \\
x^2 &= 5,3^2 - 3,2^2 \\
x^2 &= 17,85 \\
x = \sqrt{17,85} &\quad \text{tai } x = -\sqrt{17,85} \\
x = 4,224\ldots &\quad \text{tai } x = -4,224\ldots
\end{aligned}
$$

Koska kateetin x pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 4{,}224\ldots \approx 4{,}2$.

Sivun x pituus on noin 4,2 dm.

Vastaus: 4,2 dm

c) Lasketaan hypotenuusan x pituus Pythagoraan lauseella.

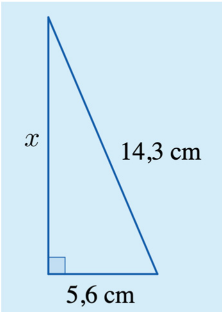
$$
\begin{aligned}
x^2 &= 7^2 + 24^2 \\
x^2 &= 625 \\
x = \sqrt{625} &\quad \text{tai } x = -\sqrt{625} \\
x = 25 &\quad \text{tai } x = -25
\end{aligned}
$$

Koska hypotenuusan pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 25$.

Sivun x pituus on 25 cm.

Vastaus: 25 cm

153. Piirretään hahmotelma kolmiosta. Merkitään kolmannen sivun pituutta kirjaimella x.



Lasketaan kateetin x pituus Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
x^2 + 5{,}6^2 &= 14{,}3^2 \\
x^2 &= 14{,}3^2 - 5{,}6^2 \\
x^2 &= 173{,}13 \\
x &= \sqrt{173{,}13} \quad \text{tai } x = -\sqrt{173{,}13} \\
x &= 13{,}157\ldots \quad \text{tai } x = -13{,}157\ldots
\end{aligned}
$$

Koska kateetin x pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 13{,}157\ldots \approx 13{,}2$.

Lasketaan kolmion pinta-ala. Kolmio on suorakulmainen, joten sen kateetit ovat kanta ja korkeus.

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{5{,}6 \text{ cm} \cdot 13{,}137\ldots \text{ cm}}{2} = 36{,}842\ldots \text{ cm}^2 \approx 36{,}8 \text{ cm}^2.$$

Kolmannen sivun pituus on 13,2 cm ja kolmion pinta-ala on 36,8 cm^2.

Vastaus: 13,2 cm ja 36,8 cm^2

154. Lasketaan hypotenuusan x pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{25} \quad \text{tai } x = -\sqrt{25}$$
$$x = 5 \qquad \text{tai } x = -5$$

Koska hypotenuusan pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 5$.

Sivun x pituus on 5.

Lasketaan hypotenuusan y pituus Pythagoraan lauseella.

$$y^2 = 5^2 + 12^2$$
$$y^2 = 169$$
$$y = \sqrt{169} \quad \text{tai y} = -\sqrt{169}$$
$$y = 13 \qquad \text{tai y} = -13$$

Koska hypotenuusan pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $y = 13$.

Sivun y pituus on 13.

Vastaus: $x = 5$ ja $y = 13$

155. **a)** Teräväkulmaisessa kolmiossa kaikki kulmat ovat teräviä. Kuvan kolmiossa on yksi suora kulma, joten kolmio on suorakulmainen ja väite on väärin.

Vastaus: väärin, suorakulmainen

b) Suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusa on suoran kulman vastainen sivu. Suoran kulman viereiset sivut ovat kateetteja. Kuvan kolmiossa kateetin pituus on 8, joten väite on väärin.

Vastaus: väärin, kateetin

c) Ratkaistaan sivun x pituus Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
8^2 + x^2 &= 10^2 \\
x^2 &= 10^2 - 8^2 \\
x^2 &= 36 \\
x = \sqrt{36} \quad &\text{tai } x = -\sqrt{36} \\
x = 6 \quad &\text{tai } x = -6
\end{aligned}
$$

Koska sivun x pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 6$.

Vastaus: oikein

d) Kolmion piiri on sivujen pituuksien summa $10 + 8 + 6 = 24$.

Kolmion piiri ei ole 22, joten väite on väärin.

Vastaus: väärin, 24

e) Kolmion pinta-ala on $A = \frac{ah}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24,$ joten väite on väärin.

Vastaus: väärin, 24

156. Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella *x* ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 15^2 + 8^2$$
$$x^2 = 289$$
$$x = \sqrt{289} \quad \text{tai } x = -\sqrt{289}$$
$$x = 17 \quad \text{tai } x = -17$$

Koska hypotenuusan *x* pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 17$.

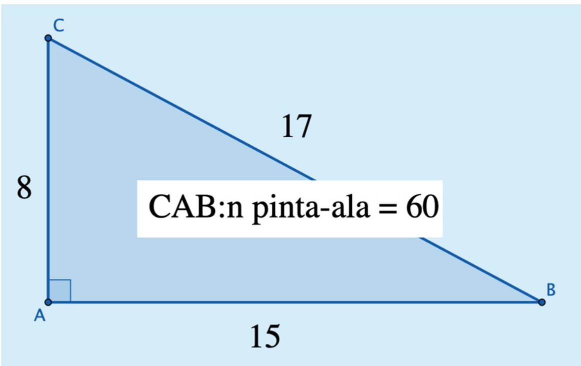
Pinta-ala lasketaan kateettien avulla.

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60$$

Hypotenuusan pituus on 17 ja kolmion pinta-ala on 60.

Tarkistus: Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 15 ja 8.

Määritetään hypotenuusan pituus ja kolmion pinta-ala ohjelman avulla.



Vastaus: hypotenuusan pituus 17, pinta-ala 60

157. **a)** Tutkitaan, toteuttavatko kolmion sivut Pythagoraan lauseen.

Kahden lyhimmän sivun neliöiden summa on

$3{,}9^2 + 8{,}0^2 = 79{,}21.$

Pisimmän sivun neliö on $8{,}8^2 = 77{,}44$.

Koska $79{,}21 \neq 77{,}44$, kolmio ei toteuta Pythagoraan lausetta, joten se ei ole suorakulmainen.

Vastaus: ei ole

b) Tutkitaan, toteuttavatko kolmion sivut Pythagoraan lauseen.

Kahden lyhimmän sivun neliöiden summa on

$9^2 + 40^2 = 1681.$

Pisimmän sivun neliö on $41^2 = 1681$.

Koska $1681 = 1681$, kolmio toteuttaa Pythagoraan lauseen, joten se on suorakulmainen.

Vastaus: on

158. Lasketaan janan pituus eli pisteiden

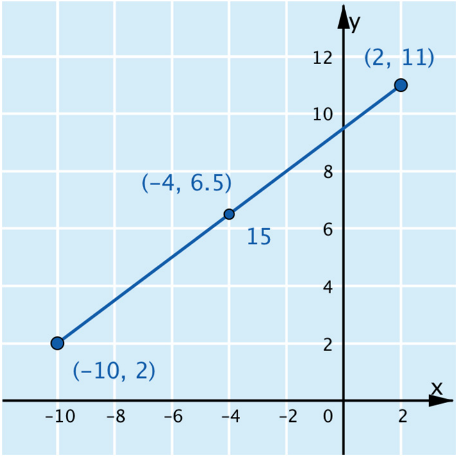
$(x_1, y_1) = (–10, 2)$ ja
$(x_2, y_2) = (2, 11)$ etäisyys d.

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(2-(-10))^2 + (11-2)^2} \\
&= \sqrt{(2+10)^2 + 9^2} \\
&= \sqrt{12^2 + 9^2} \\
&= \sqrt{144+81} \\
&= \sqrt{225} \\
&= 15
\end{aligned}
$$

Janan keskipiste M:

$$
\begin{aligned}
M &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-10+2}{2}, \frac{2+11}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-8}{2}, \frac{13}{2}\right) \\
&= \left(-4, 6\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Piirretään pisteiden (–10, 2) ja (2, 11) välille ja määritetään sen pituus ja keskipiste.

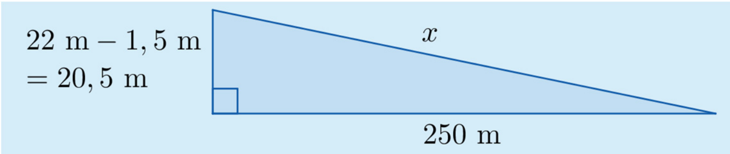


Janan pituus on 15 ja keskipiste $\left(-4, 6\frac{1}{2}\right)$.

Vastaus: pituus 15, keskipiste $\left(-4, 6\frac{1}{2}\right)$

VAHVISTA OSAAMISTA

159. Piirretään tilanteesta mallikuva, johon merkitään vaijerin pituutta kirjaimella x.



Lasketaan vaijerin pituus x Pythagoraan lauseella.

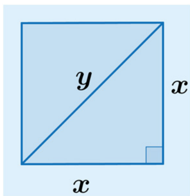
$$x^2 = 20{,}5^2 + 250^2$$
$$x^2 = 62\,920{,}25$$
$$x = \sqrt{62\,920{,}25} \quad \text{tai } x = -\sqrt{62\,920{,}25}$$
$$x = 250.839\ldots \quad \text{tai } x = -250.839\ldots$$

Koska hypotenuusan pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 250{,}839\ldots \approx 251$.

Vaijerin pitää olla 251 m pitkä.

Vastaus: 251 metriä

160. **a)** Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x. Ratkaistaan tuntematon x neliön pinta-alan yhtälöstä.



$$x \cdot x = 2{,}56$$
$$x^2 = 2{,}56$$
$$x = \sqrt{2{,}56} \quad \text{tai } x = -\sqrt{2{,}56}$$
$$x = 1{,}6 \quad \text{tai } x = -1{,}6$$

Koska sivun x pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 1{,}6$.

Merkitään neliön lävistäjää kirjaimella y ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

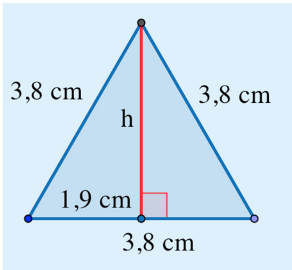
$$\begin{aligned}
x^2 + x^2 &= y^2 \\
1{,}6^2 + 1{,}6^2 &= y^2 \\
y^2 &= 5{,}12 \\
y &= \sqrt{5{,}12} \quad \text{tai } y = -\sqrt{5{,}12} \\
y &= 2{,}262\ldots \quad \text{tai } y = -2{,}262\ldots
\end{aligned}$$

Koska lävistäjän pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain y = 2,262… ≈ 2,26.

Neliön lävistäjän pituus on noin 2,26 m.

Vastaus: 2,26 m

b) Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kolmion kannan ja jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.



Suorakulmaisen kolmion kannan pituus on $\dfrac{3{,}8 \text{ cm}}{2} = 1{,}9 \text{ cm}$.

Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned}
1{,}9^2 + h^2 &= 3{,}8^2 \\
h^2 &= 3{,}8^2 - 1{,}9^2 \\
h^2 &= 10{,}83 \\
h &= \sqrt{10{,}83} \quad \text{tai h} = -\sqrt{10{,}83} \\
h &= 3{,}290\ldots \quad \text{tai h} = -3{,}290\ldots
\end{aligned}$$

Koska korkeus h on positiivinen, ratkaisuksi käy vain h = 3,290… ≈ 3,3.

Kolmion korkeus on noin 3,3 cm.
Vastaus: 3,3 cm

161. **a)** Tutkitaan, mitkä palojen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen

$a^2 + b^2 = c^2$.

Lasketaan aitapalojen neliöt ja neliöiden summat.

$2{,}0^2 = 4{,}0$
$2{,}1^2 = 4{,}41$
$2{,}7^2 = 7{,}29$
$2{,}9^2 = 8{,}41$

$2{,}0^2 + 2{,}1^2 = 8{,}41$
$2{,}0^2 + 2{,}7^2 = 11{,}29$
$2{,}1^2 + 2{,}7^2 = 11{,}7$

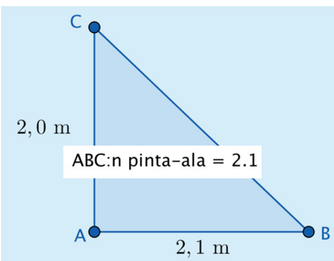
Tuloksista havaitaan, että mitat 2,0 m, 2,1 m ja 2,9 m toteuttavat Pythagoraan lauseen, joten näillä aitapaloilla voidaan muodostaa kolmionmuotoinen aitaus, jossa on suorakulma.

Vastaus: 2,0 m, 2,1 m ja 2,9 m

b) Suorakulmaisen kolmion pinta-ala voidaan laskea valitsemalla toinen kateetti kannaksi, jolloin toinen kateetti on korkeus.

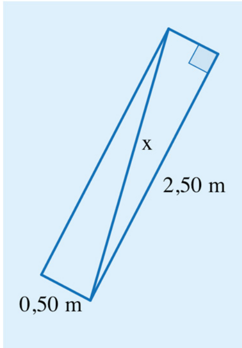
Aitauksen pinta-ala on $A = \dfrac{2{,}0\text{ m} \cdot 2{,}1\text{ m}}{2} = 2{,}1\text{ m}^2$.

Piirretään kolmio ohjelmalla ja mitataan sen pinta-ala.



Vastaus: 2,1 m^2

162. Merkitään kaapin suurinta korkeutta kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseella.



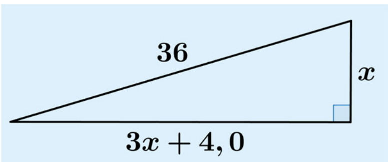
$$x^2 = 2{,}50^2 + 0{,}50^2$$
$$x^2 = 6{,}5$$
$$x = \sqrt{6{,}5} \quad \text{tai } x = -\sqrt{6{,}5}$$
$$x = 2{,}549\ldots \text{ tai } x = -2{,}549\ldots$$

Koska x on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 2{,}549\ldots \approx 2{,}55$.

Kaapin suurin korkeus on 2,55 m ja huoneen korkeus on 2,6 m, joten Liina ja Aatu mahtuvat kääntämään kaapin pystyyn.

Vastaus: mahtuvat

163. Merkitään suorakulmaisen kolmion lyhemmän kateetin pituutta kirjaimella x. Pidemmän kateetin pituus on silloin $3x + 4{,}0$.



Ratkaistaan tuntematon x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + (3x + 4{,}0)^2 = 36^2$$
$$x^2 + (3x + 4{,}0)(3x + 4{,}0) = 1296$$
$$x^2 + 9x^2 + 12x + 12x + 16 = 1296$$
$$10x^2 + 24x - 1280 = 0 \qquad \| \; a = 10,\ b = 24,\ c = -1280$$

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. (Yhtälön voi ratkaista myös ohjelmalla.)

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-24\pm\sqrt{24^2-4\cdot 10\cdot(-1280)}}{2\cdot 10}$$
$$x=\frac{-24\pm\sqrt{51776}}{20}$$

$$x=\frac{-24+\sqrt{51776}}{20}=10{,}177\ldots \quad \text{tai} \quad x=\frac{-24-\sqrt{51776}}{20}=-12{,}577\ldots$$

Sivun pituus on positiivinen luku, joten vain $x = 10{,}177\ldots$ kelpaa.

Kolmion kateettien pituudet ovat

$$x = 10{,}177 \approx 10 \text{ ja}$$
$$3x + 4{,}0 = 3 \cdot 10{,}177\ldots + 4{,}0 = 34{,}531\ldots \approx 35$$

Vastaus: 10 ja 35

164. **a)** Valitaan $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ ja $(x_2, y_2) = (1, 5)$.

Sijoitetaan koordinaatit pisteiden etäisyyskaavaan

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

$$d=\sqrt{(1-(-2))^2+(5-3)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}=3{,}6055\ldots\approx 3{,}61$$

Pisteiden etäisyys on $\sqrt{13}\approx 3{,}61$.

Vastaus: $\sqrt{13}\approx 3{,}61$

b) Janan pituus on sama kuin pisteiden välinen etäisyys.

Valitaan $(x_1, y_1) = (3, 4)$ ja $(x_2, y_2) = (–1, –5)$.

Sijoitetaan koordinaatit pisteiden etäisyyskaavaan

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-1-3)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-9)^2} \\ &= \sqrt{16+81} = \sqrt{97} = 9{,}848\ldots \approx 9{,}85 \end{aligned}$$

Janan pituus on $\sqrt{97} \approx 9{,}85$.

Vastaus: $\sqrt{97} \approx 9{,}85$

165. Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

Sivun *AB* pituus:
$$d_{AB} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \approx 5{,}830...$$

Sivun *AC* pituus:
$$d_{AC} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (7-(-1))^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} \approx 8{,}246...$$

Sivun *BC* pituus:
$$d_{BC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}830...$$

Tutkitaan, toteuttavatko sivut Pythagoraan lauseen.

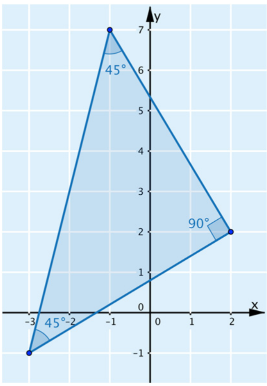
Kahden lyhemmän sivun neliön summa on

$$\left(\sqrt{34}\right)^2+\left(\sqrt{34}\right)^2=34+34=68$$

Pisimmän sivun neliö on $\left(\sqrt{68}\right)^2=68.$

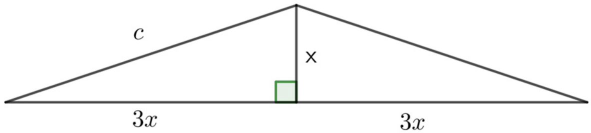
Pythagoraan lause toteutuu, joten kolmio on suorakulmainen.

Tarkistus: Piirretään kuva ohjelmalla ja määritetään
kolmion kulmien suuruudet.



Vastaus: on

166. Katto on tasakylkisen kolmion muotoinen. Katon lape on kolmion kylki. Merkitään sitä kirjaimella c. Jaetaan kolmio korkeusjanalla kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon ja merkitään kateetteja lausekkeilla x ja $3x$. Piirretään mallikuva.



Kolmion korkeus on x ja kanta on $3x + 3x = 6x$.

Kolmion pinta-ala on $A = \dfrac{6x \cdot x}{2}$.

Tiedetään, että pinta-ala on 3,9 m^2.

Ratkaistaan tuntematon x yhtälöstä $3{,}9 = \dfrac{6x \cdot x}{2}$ ohjelmalla.

Ratkaisuksi saadaan $x = 1{,}140...$ tai $x = –1{,}140...$

Pituus on aina positiivinen luku, joten ratkaisuista kelpaa vain $x = 1{,}140...$

Kateettien pituudet ovat $x = 1{,}140...$ m ja $3x = 3 \cdot 1{,}140... = 3{,}420...$

Ratkaistaan lappeen pituus c Pythagoraan lauseella yhtälöstä

$c^2 = 1{,}140...^2 + 3{,}420...^2$.

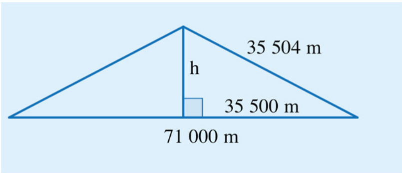
Yhtälön ratkaisuksi saadaan ohjelmalla $c = 3{,}605...$ tai $c = –3{,}605...$

Pituus on positiivinen luku, joten lappeen pituus on $3{,}605... \approx 3{,}6$ m.

Vastaus: 3,6 metriä

167. Laajennut rautatiekisko nousee korkeimmilleen Helsingin ja Riihimäen puolivälissä.

Muodostuu siis tasakylkinen kolmio, jonka
kanta on 71 km = 71 000 m ja
kylkien yhteispituus on 71 km + 8,0 m = 71 008 m.



Yhden kyljen pituus on $\dfrac{71\,008}{2} = 35\,504$ m.

Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla suorakulmaisesta

kolmiosta, jonka kanta on $\dfrac{71\,000}{2} = 35\,500$ m.

$$\begin{aligned} h^2 + 35\,500^2 &= 35\,504^2 \\ h^2 &= 284\,016 \\ h &= \sqrt{284\,016} \quad \text{tai h} = -\sqrt{284\,016} \\ h &= 532{,}931\ldots \quad \text{tai h} = -532{,}931\ldots \end{aligned}$$

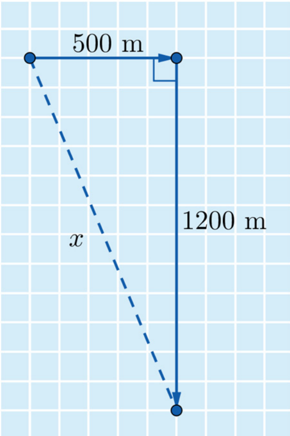
Koska h on positiivinen, ratkaisuksi käy vain h = 532,931… ≈ 530.

Rautatiekisko nousisi noin 530 m.

Vastaus: 530 m:n korkeudelle

168. **a)** Iinan reitti muodostaa suorakulmion, jonka kateetit ovat kulkemat matkat itään ja etelään.

Piirretään Iinan reitistä mallikuva ja merkitään alku- ja loppupisteen välistä etäisyyttä kirjaimella x.



Ratkaistaan x Pythagoraan lauseella.

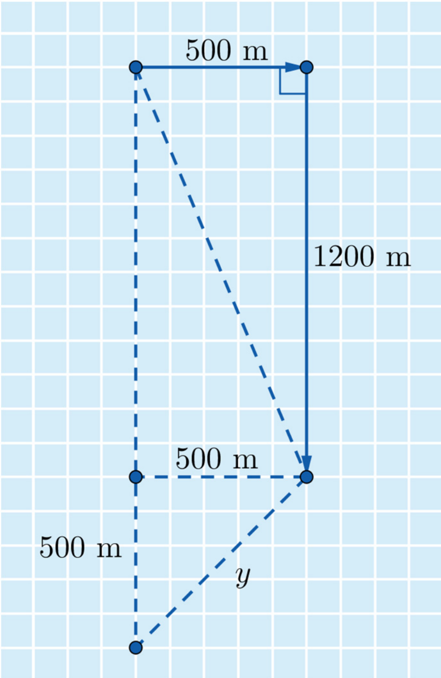
$$x^2 = 500^2 + 1200^2$$
$$x^2 = 1\,690\,000$$
$$x = \sqrt{1\,690\,000} \quad \text{tai } x = -\sqrt{1\,690\,000}$$
$$x = 1300 \qquad \text{tai } x = -1300$$

Koska hypotenuusan pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 1300$.

Iina päätyy 1300 metrin päähän lähtöpisteestä.

Vastaus: 1300 metrin etäisyydelle lähtöpisteestä

b) Lounaaseen kuljettaessa on kuljettava yhtä pitkä matka etelään ja länteen. Iina on suoraan lähtöpisteen eteläpuolella, kun hän on kulkenut 500 m etelään ja 500 m länteen. Kuljettu matka muodostaa tasasivuisen suorakulmaisen kolmion. Piirretään kuljetusta matkasta mallikuva ja merkitään lounaaseen kuljettua matkaa kirjaimella y.



Ratkaistaan x Pythagoraan lauseella.

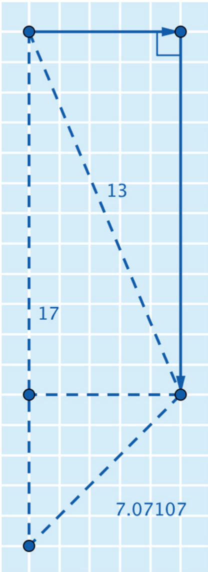
$$y^2 = 500^2 + 500^2$$
$$y^2 = 500\,000$$
$$y = \sqrt{500\,000} \quad \text{tai } y = -\sqrt{500\,000}$$
$$y = 707{,}106\ldots \quad \text{tai } y = -707{,}106\ldots$$

Koska hypotenuusan pituus on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $y = 707{,}106\ldots \approx 700$.

Iinan on kuljettava lounaaseen 700 m. Hän on tällöin
1200 m + 500m =1700 m etäisyydellä lähtöpisteestä.

Vastaus: 700 metriä lounaaseen, 1700 metrin etäisyydellä lähtöpisteestä

c) Piirretään a- ja b-kohdan tilanteet koordinaatistoon ja mitataan sivujen pituudet.



Koska koordinaatiston pituusyksikkö on 100 metriä, tulokset pitää vielä kertoa luvulla 100.

Vastaus: –

169. Merkitään toisen päätepisteen x-koordinaattia kirjaimella x ja y-koordinaattia kirjaimella y.

Keskipisteen x-koordinaatti on päätepisteiden keskiarvo, joten

saadaan yhtälö $\frac{4+x}{2}=0$.

Ratkaistaan yhtälöstä toisen päätepisteen x-koordinaatti x.

$$\begin{aligned} \frac{4+x}{2}&=0 \quad \| \cdot 2 \\ 4+x&=0 \\ x&=-4 \end{aligned}$$

Ratkaistaan vastaavasti toisen päätepisteen y-koordinaatti y.

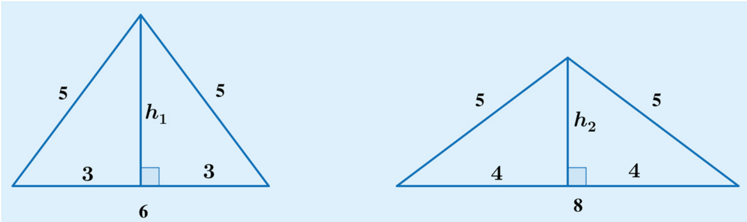
$$\begin{aligned} \frac{3+y}{2}&=2 \quad \| \cdot 2 \\ 3+y&=4 \\ y&=4-3 \\ y&=1 \end{aligned}$$

Toinen päätepiste on (–4, 1)

Vastaus: (–4, 1)

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

170. Kolmiot ovat tasakylkisiä, joten niiden korkeusjanat puolittavat kannat.



Lasketaan kolmioiden korkeudet.

$$
\begin{aligned}
h_1^2 + 3^2 &= 5^2 \\
h_1^2 &= 5^2 - 3^2 \\
h_1^2 &= 16 \\
h_1 &= \sqrt{16} \quad \text{tai } h_1 = -\sqrt{16} \\
h_1 &= 4 \qquad \text{tai } h_1 = -4
\end{aligned}
$$

Koska korkeus h_1 on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $h_1 = 4$.

$$
\begin{aligned}
h_2^2 + 4^2 &= 5^2 \\
h_2^2 &= 5^2 - 4^2 \\
h_2^2 &= 9 \\
h_2 &= \sqrt{9} \quad \text{tai } h_2 = -\sqrt{9} \\
h_2 &= 3 \qquad \text{tai } h_2 = -3
\end{aligned}
$$

Koska korkeus h_2 on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $h_2 = 3$.

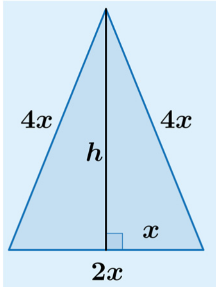
Lasketaan kolmioiden pinta-alat.

$$A_1 = \frac{ah}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \qquad A_2 = \frac{ah}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$

Pinta-alat ovat samat.

Vastaus: on totta

171. Piirretään mallikuva.
Merkitään kolmion kannan pituutta $2x$.
Tällöin kylki on $2 \cdot 2x = 4x$.



Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Muodostetaan lauseke kolmion korkeudelle h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}
h^2 + x^2 &= (4x)^2 \\
h^2 &= 16x^2 - x^2 \\
h^2 &= 15x^2 \\
h &= \sqrt{15x^2} \quad \text{tai } h = -\sqrt{15x^2} \\
h &= \sqrt{15} \cdot \sqrt{x^2} \quad \text{tai } h = -\sqrt{15} \cdot \sqrt{x^2} \\
h &= \sqrt{15}x \quad \text{tai } h = -\sqrt{15}x
\end{aligned}$$

Koska korkeus h on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $h =$ $h = \sqrt{15}x$.

Sijoitetaan saatu korkeuden lauseke kolmion pinta-alan laskukaavaan ja ratkaistaan siitä x.

$$A = \frac{ah}{2}$$

$$56 = \frac{2x \cdot \sqrt{15}x}{2}$$

$$x = 3{,}802... \quad \text{tai} \quad x = -3{,}802...$$

Koska x on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = 3{,}802...$

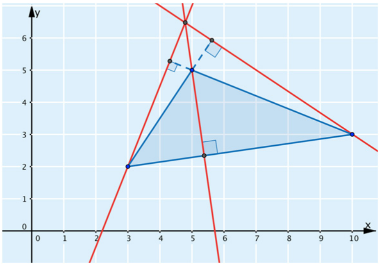
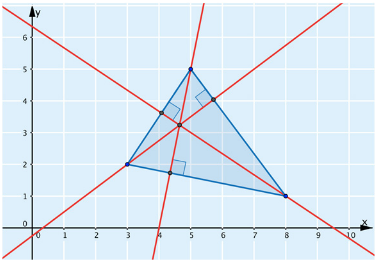
Kolmion korkeus on

$$h = \sqrt{15}x = \sqrt{15} \cdot 3{,}802...\text{m} = 14{,}727...\text{ m} \approx 15 \text{ m}.$$

Vastaus: 15 m

172. **a)** Videossa https://vimeo.com/182676305/4be2154a1a näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Esimerkiksi:

Normaalit leikkaavat samassa pisteessä.

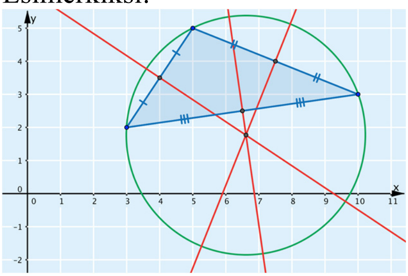
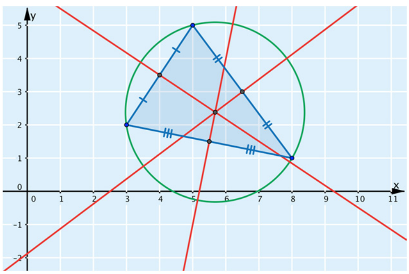
Ominaisuus säilyy, kun kolmion muotoa muutetaan. Kun kolmio on tylppäkulmainen, on normaalien leikkauspiste kolmion ulkopuolella.

Teräväkulmaisen kolmion normaalit leikkaavat kolmion sisäpuolella olevassa pisteessä.

Vastaus: Normaalit leikkaavat samassa pisteessä. Piste on teräväkulmaisessa kolmiossa kolmion sisäpuolella ja tylppäkulmaisessa kolmiossa kolmion ulkopuolella.

b) Videossa https://vimeo.com/182676372/3628aba6ab näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Esimerkiksi:

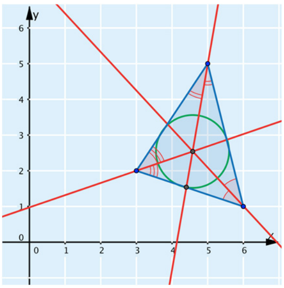
Keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä, joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

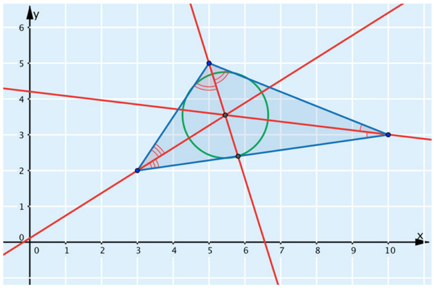
Ominaisuus säilyy, kun kolmion muotoa muutetaan. Keskinormaalien leikkauspiste on tylppäkulmaisessa kolmiossa kolmion ulkopuolella ja teräväkulmaisessa kolmiossa kolmion sisäpuolella.

Vastaus: Keskinormaalien leikkauspiste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Piste on teräväkulmaisessa kolmiossa kolmion sisäpuolella ja tylppäkulmaisessa kolmiossa kolmion ulkopuolella.

c) Videossa https://vimeo.com/182676428/09468c0bb1 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelmalla.

Esimerkiksi:



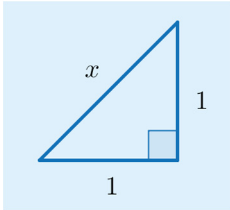


Kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

Kun muutetaan kolmion muotoa, ominaisuus säilyy.

Vastaus: Kulmanpuolittajien leikkauspiste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Ominaisuus säilyy.

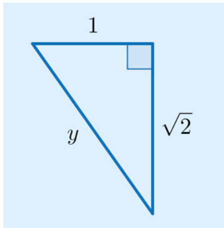
173. Ratkaistaan ensimmäisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusan x pituus Pythagoraan lauseella.



$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

Koska sivu x on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $x = \sqrt{2}$.

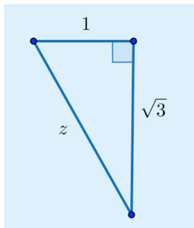
Ratkaistaan toisen kolmion hypotenuusan y pituus.



$$y^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$$
$$y^2 = 1 + 2$$
$$y = \pm\sqrt{3}$$

Koska sivu y on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $y = \sqrt{3}$.

Ratkaistaan kolmannen kolmion hypotenuusan z pituus.



$$z^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$$
$$z^2 = 1 + 3$$
$$z = \pm\sqrt{4}$$

Koska sivu z on positiivinen, ratkaisuksi käy vain $z = \sqrt{4}$.

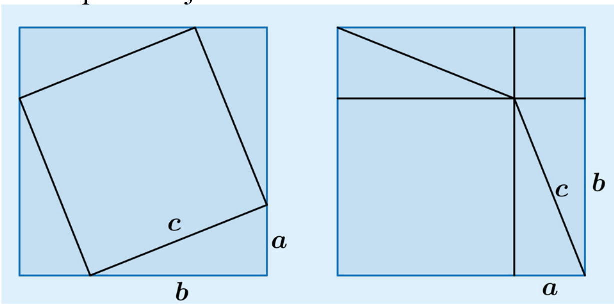
Ensimmäisen kolmion hypotenuusa on $\sqrt{2}$, toisen kolmion hypotenuusa on $\sqrt{3}$ ja kolmannen kolmion hypotenuusa on $\sqrt{4}$.

Voidaan päätellä, että hypotenuusan pituus on luvun "kolmion järjestysluku + 1" neliöjuuri.

Siis tuhannennen kolmion hypotenuusan pituus on $\sqrt{1001}$.

Vastaus: $\sqrt{1001}$

174. Todistetaan Pythagoraan lause oikeaksi oikean- ja vasemmanpuoleisen neliön pinta-alojen avulla.



Neliöiden sivut ovat $a + b$, joten niiden pinta-alat ovat yhtä suuret.

Muodostetaan pinta-alojen lausekkeet kuvioiden avulla.
Molemmissa neliöissä on neljä yhtenevää suorakulmaista kolmiota.

Oikeanpuoleisessa neliössä on kolmioiden lisäksi kaksi pientä neliöitä, joiden sivut ovat a ja b. Näiden pinta-alat ovat a^2 ja b^2.

Oikeanpuoleisen neliön pinta-ala on

$$A_{\text{oikea}} = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Vasemmanpuoleisessa neliössä on kolmioiden lisäksi neliö, jonka sivu on c ja pinta-ala c^2.

Vasemmanpuoleisen neliön pinta-ala on

$$A_{\text{vasen}} = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab.$$

Asetetaan neliöiden pinta-alat yhtä suuriksi.

$$\begin{aligned} A_{\text{oikea}} &= A_{\text{vasen}} \\ a^2 + b^2 + 2ab &= c^2 + 2ab \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Tämä on Pythagoraan lause.

Vastaus: –