

9. Kitka

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 9.1.

Oikeat vastaukset:

a) C

b) A

c) A

d) B

e) B

f) A

Tehtävä 9.2.

Kitkan hyötyjä ovat esimerkiksi:

- liikenteessä renkaiden pito
- naulan tai ruuvin pysyminen puussa
- kynän pysyminen kädessä
- kirjan sivun kääntäminen
- pyörällä kiihdyttäminen ja jarruttaminen
- käveleminen

Kitkan haittoja ovat esimerkiksi:

- koneen osien hankaus
- mäenlasku
- sukan ja lattian välinen kitka kuluttaa sukanpohja

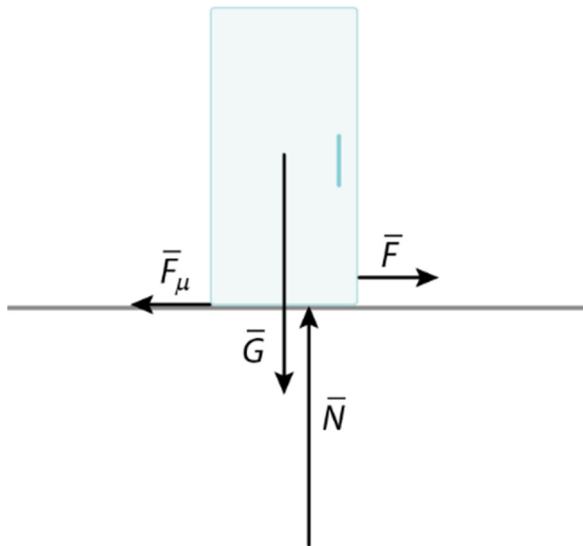
Tehtävä 9.3.

a) Jääkaappia vedetään voimalla $F = 160 \text{ N}$.

Jääkaappiin vaikuttavat pystysuunnassa sen oma paino ja alustan tukivoima.

Vaakasuunnassa jääkaappiin vaikuttavat vetävä voima, ja alustan ja jääkaapin välinen kitka.

Koska kaappi liikkuu, kitka on liukukitkaa.



\bar{G} = paino

\bar{N} = pinnan
tukivoima

\bar{F}_μ = kitka

\bar{F} = vetävä voima

Kun jääkaappi liikkuu tasaisella nopeudella, siihen vaikuttavien voimien summa on Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = \bar{0}$. Sovitaan positiiviset suunnat alas ja oikealle, jolloin

Pystysuunnassa: $G - N = 0$ eli $G = N$

Vaakasuunnassa $F - F_\mu = 0$ eli $F_\mu = F$

Kitka on 160 N. Kitka on liukukitkaa.

b) Jääkaappia vedetään voimalla $F = 10 \text{ N}$.

Kuten a-kohdassa, jääkaappiin vaikuttavat pystysuunnassa sen oma paino ja alustan tukivoima.

Vaakasuunnassa jääkaappiin vaikuttavat vetävä voima, ja alustan ja jääkaapin välinen kitka. Koska kaappi on paikallaan, kitka on lepokitkaa.

Kun jääkaappi on paikallaan, siihen vaikuttavien voimien summa on Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

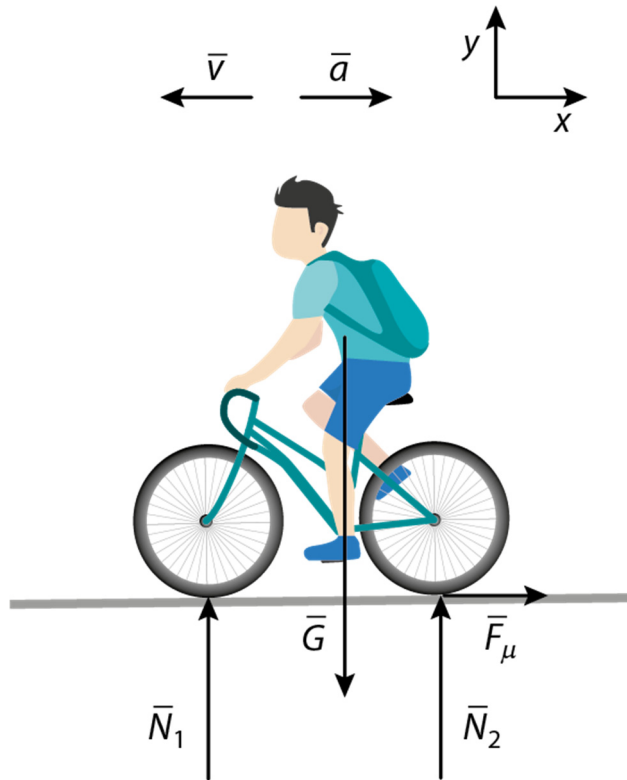
Pystysuunnassa: $G - N = 0$ eli $G = N$

Vaakasuunnassa $F - F_{\mu} = 0$ eli $F_{\mu} = F = 10 \text{ N}$.

Kitka on 10 N. Kitka on lepokitkaa.

Tehtävä 9.4.

a)



\bar{G} = koululaisen ja polkupyörän paino

\bar{N}_1 = eturenkaaseen kohdistuva tukivoima

\bar{N}_2 = takarenkaaseen kohdistuva tukivoima

\bar{F}_μ = takarenkaan ja alustan välinen liukukitka

b) Koululaisen ja polkupyörän massa $m = 58 \text{ kg}$

Takapyörälle kohdistuu puolet painosta, joten takapyörään kohdistuva tukivoima on $N_2 = \frac{mg}{2}$.

Asfalttiin tulee jarrutusjälkiä, kun koululainen tekee lukkojarrutuksen. Tällöin kyseessä on liukukitka. Kumin ja kuivan asfaltin välinen liukukitkakerroin on $\mu = 0,7$.

Takarenkaan kitka on

$$F_{\mu} = \mu N = \mu \frac{mg}{2} = 0,7 \cdot \frac{58 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} = 199,143 \text{ N} \approx 200 \text{ N}.$$

Tehtävä 9.5.

- a) Kirja pysyy paikallaan, kun kitka on yhtä suuri kuin kirjan painon pinnan suuntainen komponentti. Tämä toteutuu, kun kallistuskulma on enintään 30° .
- b) Kirjan ja tason välinen lepokitka on suurimmillaan, kun tason kallistuskulma $\alpha = 30^\circ$. Tällöin pinnan tukivoiman suuruus on $N = G_y = G \cos \alpha$ ja kitka on yhtä suuri kuin kirjan painon pinnan suuntainen komponentti,
 $F_\mu = G_x = G \sin \alpha$.

Kitkakerroin on siis

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{F_\mu}{N} = \frac{G \sin \alpha}{G \cos \alpha} = \tan \alpha \\ &= \tan 30^\circ = 0,5773503 \approx 0,58.\end{aligned}$$

- c) Kun kirja lähtee liukumaan, alkaa tason ja kirjan välillä vaikuttaa liukukitka. Liukukitka on pienempi kuin lepokitka, joten painon pinnan suuntainen komponentti on selvästi suurempi kuin kitka. Kirjaan vaikuttava kokonaisvoima on nollaa suurempi, joten kirja on Newtonin II lain nojalla kiihtyvässä liikkeessä.

Tehtävä 9.6.

Pyörättömän matkalaukun ja lattian välillä vaikuttaa liukukitka. Pyörällisen matkalaukun pyörien vierimisvastus on tätä liukukitkaa pienempi. Siksi pyörällisen matkalaukun vetämiseen tarvitaan pienempi voima.

Sovella

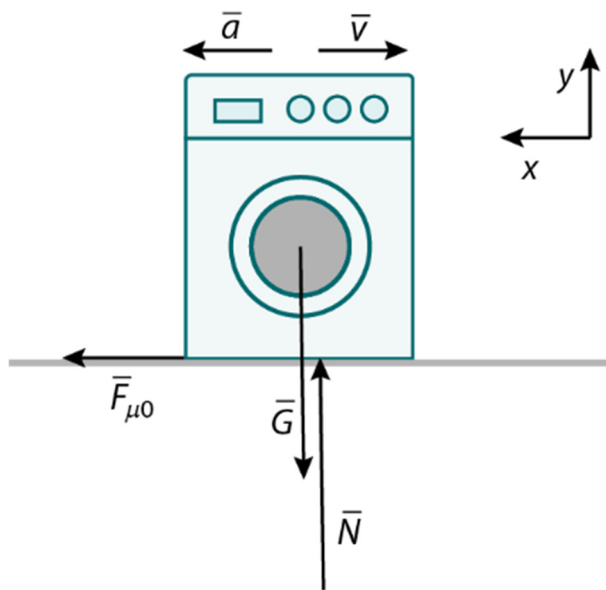
Tehtävä 9.7.

- a) Jos pesukonetta ei ole kiinnitetty esimerkiksi kuormaliinoilla, äkkijarrutuksessa pesukone jatkaa liikettään alkuperäiseen suuntaan eli liikkuu kuorma-auton lavalla eteenpäin. Newtonin I lain mukaisesti kappale jatkaa liikettään samaan suuntaan muuttumattomalla nopeudella, jos mikään voima ei vaikuta.

b) Pesukoneen massa $m = 70 \text{ kg}$

Lepokitkan suurin arvo $F_{\mu 0} = 340 \text{ N}$

Jos pesukone pysyy auton lavalla samalla paikalla, eikä lähde liukumaan, on pesukoneen kiihtyvyys sama kuin auton. Piirretään pesukoneen voimakuvio ja kirjoitetaan pesukoneen liikeyhtälö.



\bar{G} = pesukoneen paino

\bar{N} = lavan tukivoima

$\bar{F}_{\mu 0}$ = lepokitka

Pesukoneen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Kun positiiviset suunnat valitaan vasemmalle ja ylöspäin, saadaan laatikon liikeyhtälö komponenttimuodossa

vaakasuunnassa: $F_{\mu 0} = ma$

pystysuunnassa: $N - G = 0.$

Vaakasuunnan yhtälöstä saadaan ratkaistua suurin kiihtyvyys, jolla lepokitka vielä riittää antamaan pesukoneelle saman kiihtyvyyden kuin autolla.

Ratkaistaan kiihtyvyys.

$$a = \frac{F_{\mu 0}}{m} = \frac{340 \text{ N}}{70 \text{ kg}} = 4,8571 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pesukone lähtee liikkeelle, jos auton kiihtyvyys ylittää $4,9 \text{ m/s}^2$.

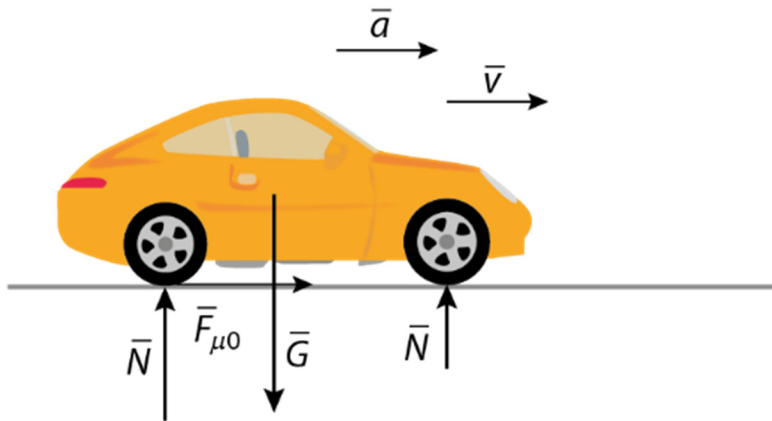
Huom. Ajoneuvolain (11.12.2002/1090) mukaan kuljettajan on huolehdittava kuorman turvallisesta ja tarkoituksenmukaisesta sitomisesta.

Tehtävä 9.8.

Renkaan ja lattian välinen lepokitkakerroin on $\mu = 0,27$

Auton massa $m = 1,35 \text{ kg}$

a) Piirretään auton voimakuvio.



$\bar{F}_{\mu 0}$ = lepokitka yhdessä renkaassa

\bar{G} = auton paino

\bar{N} = alustan tukivoima

Auton painon oletetaan jakautuvan tasaisesti neljälle renkaalle, jolloin yhden renkaan ja lattian välinen kitka on

$$F_{\mu 0} = \mu N = \mu \frac{mg}{4} = 0,27 \cdot \frac{1,35 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4} = 0,8939 \text{ N} \approx 0,89 \text{ N}.$$

b) Autolla on suurin kiihtyvyys, kun renkaat eivät sudi paikallaan vaan kahden vetävän renkaan lepokitka välittää suurimman työntövoiman autolle. Kun auto on kiihtyvässä liikkeessä, Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

Auton liikeyhtälö komponenttimuodossa

$$\text{vaakasuunnassa: } 2F_{\mu 0} = ma$$

$$\text{pystysuunnassa: } N - G = 0.$$

Vaakasuunnan yhtälöstä saadaan ratkaistua suurin kiihtyvyys, jolla lepokitka vielä riittää antamaan pitoa renkaille ilman sutimista.

Ratkaistaan kiihtyvyys.

$$\begin{aligned} a &= \frac{2F_{\mu 0}}{m} = \frac{2\mu \frac{mg}{4}}{m} = \mu g \\ &= \frac{0,27 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} = 1,3244 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Auton suurin kiihtyvyys on $1,3 \text{ m/s}^2$.

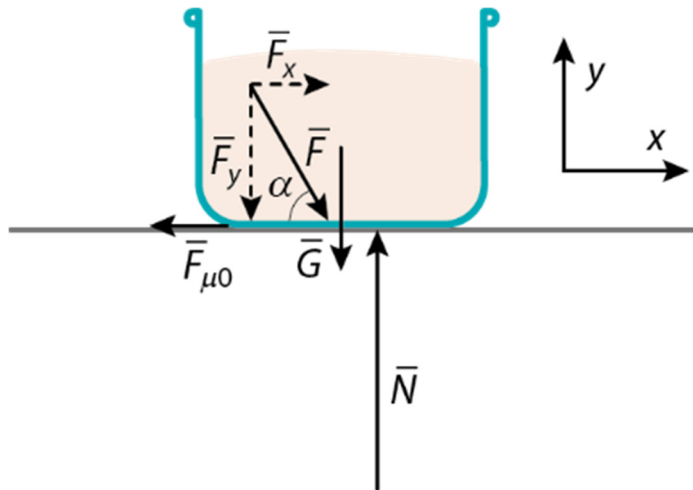
Tehtävä 9.9.

a) pullataikinan ja kulhon massa $m = 1,6 \text{ kg}$

taikinaa työntävä voima $F = 9,4 \text{ N}$

työntävän voiman kulma pöydän pintaan nähden

$\alpha = 75^\circ$



\bar{G} = taikinan ja kulhon paino

\bar{N} = pöydän pinnan tukivoima

\bar{F} = taikinaa työntävä voima

$\bar{F}_{\mu 0}$ = kulhon ja pöydän pinnan välinen kitka

b) Kun pullataikinaa työnnetään niin, että kulho pysyy paikallaan, Newtonin II lain mukaan kulhoon vaikuttavien voimien summa on nollavektori $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Kun positiiviset suunnat valitaan vasemmalle ja ylöspäin, saadaan kulhon ja taikinan liikeyhtälöiksi

$$\text{vaakasuunnassa: } F_{\mu 0} - F_x = 0$$

$$\text{pystysuunnassa: } N - G - F_y = 0.$$

Tarkastellaan voimia pystysuunnassa

$$N - G - F_y = 0$$

$$N - G - \sin\alpha \cdot F = 0$$

$$N = G + \sin\alpha \cdot F$$

$$= mg + \sin\alpha \cdot F$$

$$= 1,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \sin 75^\circ \cdot 9,4 \text{ N}$$

$$= 24,7757 \text{ N} \approx 25 \text{ N}.$$

c) b-kohdan vaakasuuntaisesta liikeyhtälöstä saadaan

$$F_{\mu 0} - F_x = 0$$

$$F_{\mu 0} = F_x$$

$$F_{\mu 0} = F \cdot \cos\alpha = 9,4 \text{ N} \cdot \cos 75^\circ = 2,4329 \text{ N} \approx 2,4 \text{ N}.$$

Kitka on vastakkaiseen suuntaan työntävän voiman vaakakomponenttiin nähden.

d) Pöydän pinnan ja kulhon välinen lepokitka $F_{\mu 0}$ on tilanteessa taikinaa työntävän voiman vaakakomponentin suuruinen.

Lepokitkan arvot vaihtelevat nollan ja maksimiarvon välillä. Tilanteessa lepokitka ei välttämättä ole vielä saavuttanut suurinta arvoaan, mutta olettamalla näin, voidaan päätellä lepokitkakertoimelle minimiarvo.

Lepokitkan maksimiarvo on tukivoiman N ja lepokitkakertoimen μ_0 tulo, jolloin saadaan

$$F_{\mu 0} = \mu_0 N$$

$$\mu_0 = \frac{F_{\mu 0}}{N} = \frac{2,4329 \text{ N}}{24,7757 \text{ N}} = 0,0982 \approx 0,10.$$

Lepokitkakertoimen arvo on tilanteessa vähintään 0,10.

Tehtävä 9.10.

Paketin massa $m = 4,1 \text{ kg}$

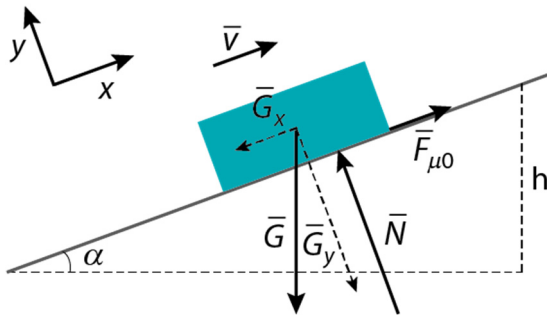
Paketin korkeus maan tasalta $h = 1,6 \text{ m}$

Liukuhihnan kulma vaakatasoon nähden $\alpha = 23^\circ$

Paketin nopeus $v = 0,54 \text{ m/s}$

Putoamiskiihtyvyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

a)



\vec{G} = laatikon paino

\vec{N} = liukuhihnan laatikkoon kohdistama tukivoima

$\vec{F}_{\mu 0}$ = liukuhihnan ja laatikon välinen lepokitka

b) Paketin kulkema matka x maan pinnalta korkeudelle $h = 1,6$ m saadaan ratkaistua trigonometrian avulla

$$\sin \alpha = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1,6 \text{ m}}{\sin 23^\circ} = 4,0949 \text{ m.}$$

Kun liukuhihnan nopeus $v = 0,54$ m/s. Paketti on tasaisessa liikkeessä. Paketin kulkemaan matkaan kuluu aikaa

$$t = \frac{x}{v} = \frac{4,0949 \text{ m}}{0,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 7,5831 \text{ s} \approx 7,6 \text{ s.}$$

c) Jotta paketti liikkuu tasaisella nopeudella hihnalla, Newtonin II lain mukaan pakettiin vaikuttavien voimien summa on nolla. Tarkastellaan pakettiin vaikuttavia voimia liukuhinnan suunnassa x

$$F_{\mu 0} - G_x = 0$$

$$F_{\mu 0} = G_x$$

$$= \sin \alpha \cdot G = mg \sin \alpha$$

$$= 4,1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 23^\circ = 15,715597 \text{ N.}$$

Pakettiin vaikuttava kitka $F_{\mu 0}$ on tukivoiman N ja lepokitkakertoimen μ tulo, kun taas tukivoiman suuruus N on sama kuin painon y -komponentti G_y

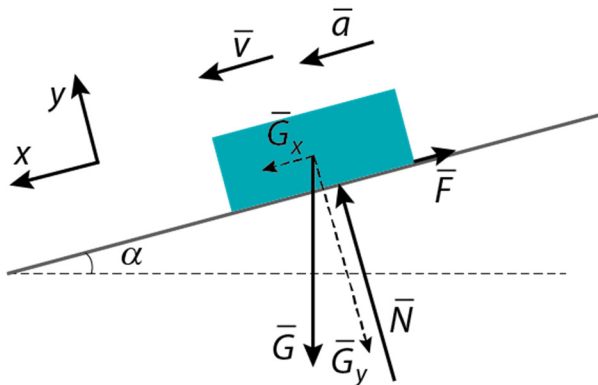
$$F_{\mu 0} = \mu_0 N$$

$$\mu_0 = \frac{F_{\mu 0}}{N} = \frac{F_{\mu 0}}{G_y} = \frac{\cancel{mg} \sin \alpha}{\cancel{mg} \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$= \tan 23^\circ = 0,424475 \approx 0,42.$$

Tehtävä 9.11.

a)



\bar{G} = pulkkailijan paino

\bar{N} = mäen pinnan pulkkailijaan kohdistama tukivoima

\bar{F} = pulkkailijan liikettä vastustavat voimat

b) Pulkkailijan massa $m = 38 \text{ kg}$

Mäen kulma vaakatasoon nähden $\alpha = 15^\circ$, sama kulma on G ja G_y välillä

Liikettä vastustavat voimat yhteensä $F = 12 \text{ N}$

Koska pulkka ei liiku y -suunnassa, Newtonin II lain mukaan kokonaisvoima on nollavektori y -suunnassa. Siksi pinnan tukivoima N on yhtä suuri kuin pulkkailijan painon y -suuntainen komponentti G_y

$$N = G_y = G \cos \alpha = mg \cos \alpha = 38 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 15^\circ = 360,078 \text{ N} \approx 360 \text{ N}.$$

c) Tarkastellaan ensin pulkkailijaan kohdistuvaa painon x -komponenttia G_x ,

$$G_x = G \sin \alpha = mg \sin \alpha = 38 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 15^\circ = 96,4826 \text{ N}.$$

Koska $G_x > F$, pulkkailija on kiihtyvässä liikkeessä x -suunnassa mäkeä alaspäin. Newtonin II mukaan pulkkailijan liikeyhtälö on $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, eli

$$G_x - F = ma.$$

Pulkkailijan kiihtyvyys on

$$\begin{aligned} a &= \frac{G_x - F}{m} = \frac{G \sin \alpha - F}{m} = \frac{mg \sin \alpha - F}{m} \\ &= \frac{38 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 15^\circ - 12 \text{ N}}{38 \text{ kg}} \\ &= 2,2232 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

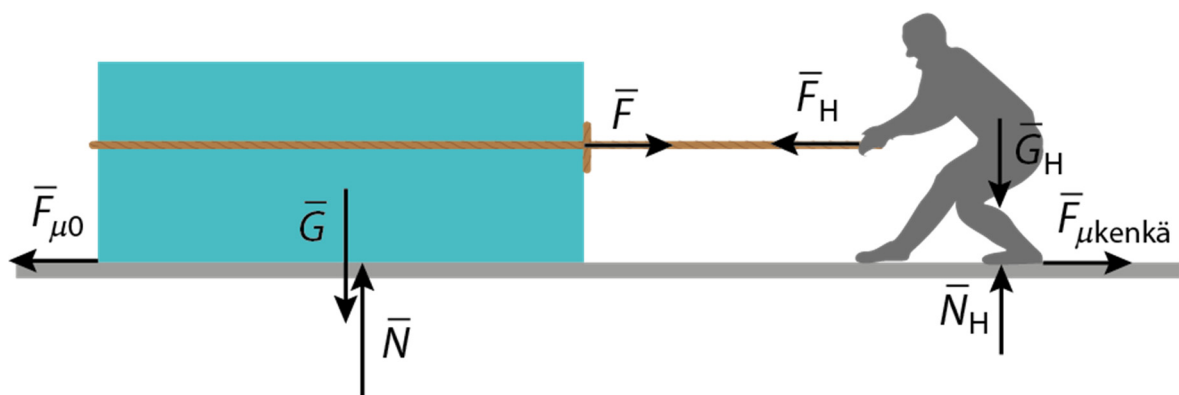
Tehtävä 9.12.

Henkilön massa $m_{\text{henkilö}} = 85 \text{ kg}$

Laatikon massa $m_{\text{laatikko}} = 120 \text{ kg}$

a) Lepokitkakerroin $\mu_0 = 0,5$

Hahmotellaan tilanteen voimakuviota.



\bar{G} = laatikon paino

\bar{N} = pinnan tukivoima

$\bar{F}_{\mu 0}$ = laatikon ja alustan lepokitka

\bar{F} = voima, jolla henkilö vetää laatikkoa

\bar{G}_H = henkilön paino

\bar{N}_H = pinnan tukivoima

$\bar{F}_{\mu \text{kenkä}}$ = kengän ja alustan lepokitka

\bar{F}_H = voima, jolla laatikko vetää henkilöä

Kun systeemi on paikallaan tai juuri lähdössä liikkeelle, ovat kummankin kappaleen Newtonin II lain mukaiset liikeyhtälöt $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Silloin laatikkoa vedettäessä kaikki vaakasuuntaiset voimat ovat yhtä suuria.

Laatikkoon kohdistuvan vetävän voiman ja siten myös laatikkoon kohdistuvan lepokitkan suuruus riippuu vetävän henkilön kengän ja alustan välisestä lepokitkasta. Koska laatikon massa on suurempi kuin vetäjän, laatikko ei lähde liikkeelle, kun sekä laatikon että kenkien lepokitkakertoimet ovat samat.

Määritetään suurin voima, jolla henkilö pystyy vetämään laatikkoa vaakasuoraan niin, että kengät eivät liu'u. Tämä voima on samansuuruinen kuin laatikkoon kohdistuva lepokitka, kun laatikko pysyy paikallaan. Laatikkoon kohdistuva lepokitka on suurimmillaan

$$F_{\mu 0} = \mu_0 N = \mu_0 m_{\text{henkilö}} g = 0,50 \cdot 85 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 416,925 \text{ N} \approx 420 \text{ N}.$$

b) Määritetään uusi lepokitkakerroin kenkien ja pinnan välille $\mu_{\text{kenkä}}$, joka vastaa laatikkoon kohdistuvaa suurinta kitkaa $F_{\mu 0}$.

$$F_{\mu_{\text{kenkä}}} = F_{\mu 0}$$

$$\mu_{\text{kenkä}} m_{\text{henkilö}} g = \mu_0 m_{\text{laatikko}} g$$

$$\mu_{\text{kenkä}} = \frac{\mu_0 m_{\text{laatikko}}}{m_{\text{henkilö}}} = \frac{0,50 \cdot 120 \text{ kg}}{85 \text{ kg}} = 0,7059 \approx 0,71.$$

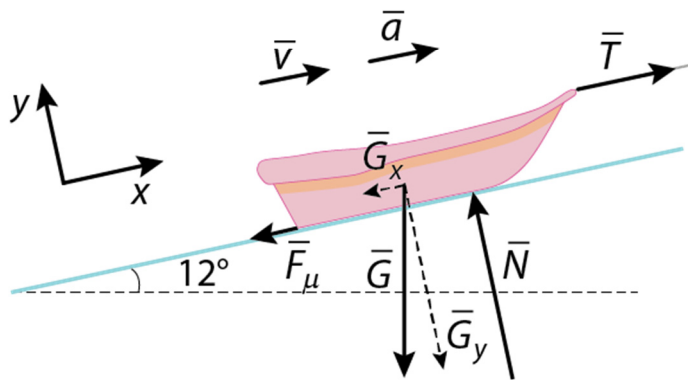
Tehtävä 9.13.

Pulkkailijan ja pulkan yhteinen massa $m = 22 \text{ kg}$

Pulkan ja lumen liukukitkakerroin $\mu = 0,24$

Rinteen kaltevuuskulma vaakasuoraan nähden $\alpha = 12^\circ$

a) Piirretään pulkan voimakuvio.



\bar{G} = pulkkailijan paino

\bar{T} = narun jännitysvoima

\bar{N} = mäen pinnan pulkkailijaan kohdistama tukivoima

\bar{F}_μ = liukukitka

Koska pulkka ei liiku y -suunnassa, Newtonin II lain mukaan kokonaisvoima on nollavektori y -suunnassa. Pinnan tukivoima N on yhtä suuri kuin pulkkailijan painon y -suuntainen komponentti G_y .

Pulkkiaan vaikuttaa kitka

$$F_{\mu} = \mu N = \mu G_y = \mu mg \cos \alpha$$

$$= 0,24 \cdot 22 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 12^{\circ} = 50,6649 \text{ N} \approx 51 \text{ N}.$$

b) Pulkkailija on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä.
Newtonin II lain mukaan tason suunnassa $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, ja suunnat huomioiden

$$T - F_{\mu} - G_x = ma .$$

Sijoitetaan yhtälöön a-kohdasta kitkan lauseke,
 $F_{\mu} = \mu mg \cos \alpha$, sekä painon x-komponentin lauseke,
 $G_x = mg \sin \alpha$, ja ratkaistaan narun jännitysvoima.

Narun jännitysvoima on

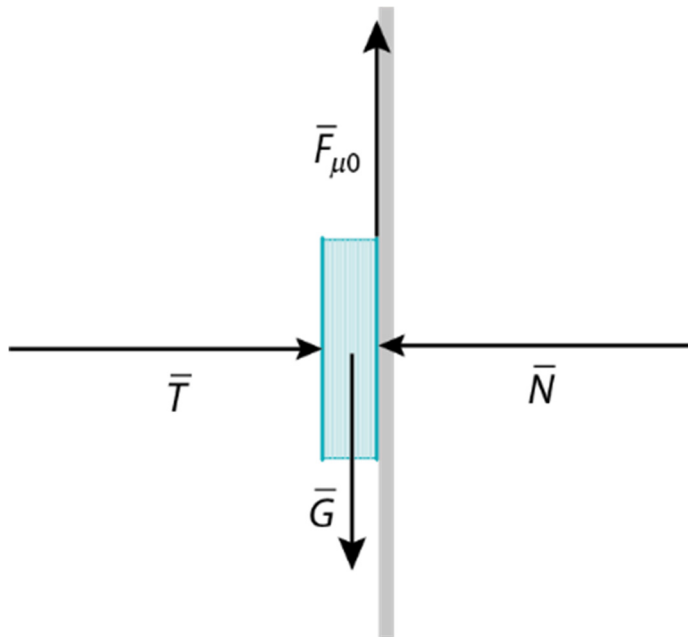
$$\begin{aligned} T &= F_{\mu} + G_x + ma \\ &= \mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha + ma \\ &= 0,24 \cdot 22 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 12^{\circ} + 22 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 12^{\circ} + 22 \text{ kg} \cdot 0,16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &= 99,0564 \text{ N} \approx 99 \text{ N}. \end{aligned}$$

Tehtävä 9.14.

a) Kirjan massa $m = 0,712 \text{ kg}$

Kirjan ja seinän lepokitkakerroin $\mu_0 = 0,36$

Piirretään kirjan voimakuvio.



\vec{G} = kirjan paino

$\vec{F}_{\mu 0}$ = kirjan ja seinän välinen lepokitka

\vec{N} = seinän kirjaan kohdistama tukivoima

\vec{T} = käden kirjaan kohdistama voima

Kun kirja pysyy paikallaan, Newtonin II lain mukaan kirjaan vaikuttavien voimien summa on nollavektori

$$\sum \vec{F} = \vec{0}.$$

Tarkastellaan voimien suuruuksia pysty- ja vaakasuunnassa

vaakasuunnassa: $T - N = 0$

pystysuunnassa: $F_{\mu 0} - mg = 0$

Toisaalta kitka on $F_{\mu 0} = \mu_0 N$, jolloin

vaakasuunnassa: $T = N$

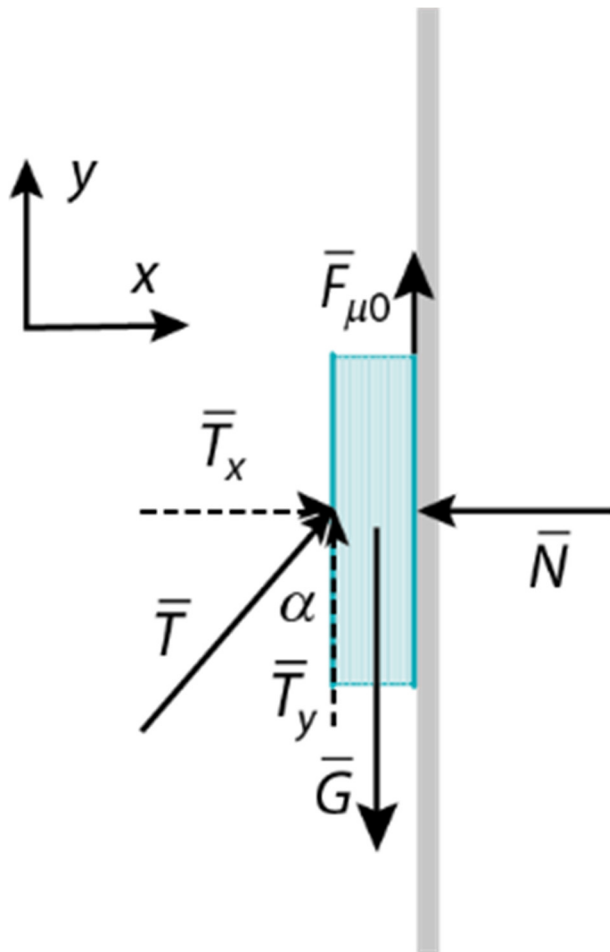
pystysuunnassa: $\mu_0 N = mg$.

Käden kirjaan kohdistama voima on

$$\mu_0 T = mg$$

$$T = \frac{mg}{\mu_0} = \frac{0,712 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,36} = 19,402 \text{ N} \approx 19 \text{ N}$$

b)



\bar{G} = kirjan paino

$\bar{F}_{\mu 0}$ = kirjan ja seinän välinen lepokitka

\bar{N} = seinän kirjaan kohdistama tukivoima

\bar{T} = käden kirjaan kohdistama voima

Kirja pysyy edelleen paikallaan, vaikka työntävän voiman ja seinän välinen kulma $\alpha = 18^\circ$, joten Newtonin II lain mukaan kirjaan vaikuttavien voimien summa on nollavektori $\sum \bar{F} = \bar{0}$.

Tarkastellaan voimien suuruuksia

$$\text{vaakasuunnassa: } T_x - N = 0$$

$$\text{pystysuunnassa: } F_{\mu 0} + T_y - mg = 0.$$

Lisätään yhtälöihin lepokitka $F_{\mu 0} = \mu_0 N$ ja esitetään voiman T komponentit kulmien avulla,

$$\text{vaakasuunnassa: } N = T \sin \alpha$$

$$\text{pystysuunnassa: } \mu_0 N + T \cos \alpha - mg = 0.$$

Pystysuunnan yhtälöstä saadaan käden kirjaan kohdistama voima

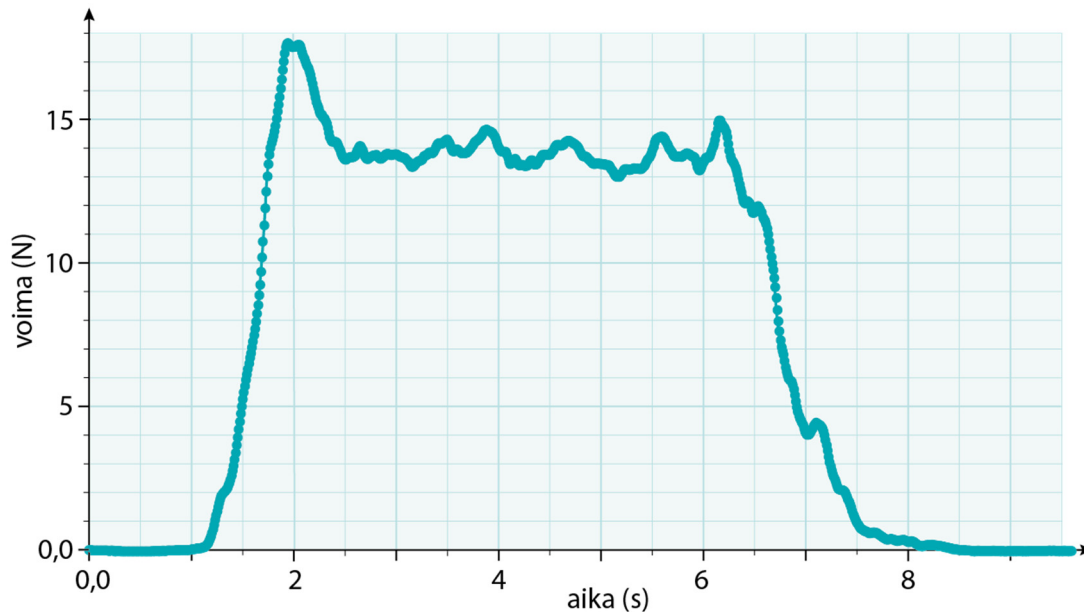
$$\mu_0 T \sin \alpha + T \cos \alpha = mg$$

$$T(\mu_0 \sin \alpha + \cos \alpha) = mg$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{mg}{\mu_0 \sin \alpha + \cos \alpha} \\ &= \frac{0,712 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,36 \cdot \sin 18^\circ + \cos 18^\circ} = 6,575 \text{ N} \approx 6,6 \text{ N}. \end{aligned}$$

Tehtävä 9.15.

a)

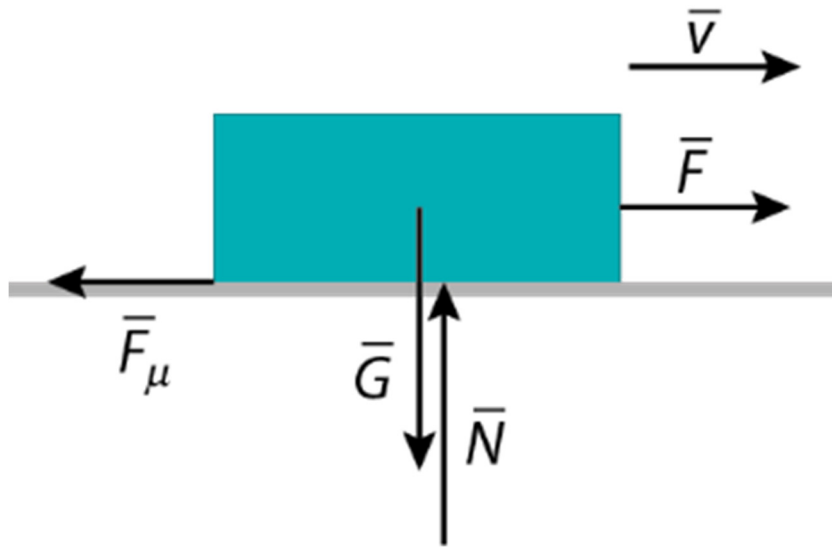


Kuvaajasta havaitaan, että voima-anturin lukema kasvoi nolasta maksimiarvoon, 18 N:iin, jonka jälkeen voima-anturin lukema pieneni arvoon 14 N. Koska alussa pakkaus oli paikallaan, Newtonin II mukaan voima-anturin lukema on yhtä suuri kuin pakkauksen ja lattian pinnan välinen kitka. Voima-anturin lukema kasvaa nolasta maksimiarvoon, joten myös lepokitka kasvaa samalla tavalla.

b) Pakkauksen massa $m = 5,1$ kg.

Pakkaus lähti liukumaan ajanhetkellä 2,5 s. Pakkausta vedettiin vaakasuoralla tasolla vakionopeudella, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Piirretään tilanteesta voimakuvio.



\vec{G} = paino

\vec{N} = pinnan tukivoima

\vec{F}_μ = kitka

\vec{F} = vetävä voima

Kun positiiviset suunnat valitaan oikealle ja alaspäin, saadaan

$$\text{vaakasuunnassa: } F - F_{\mu} = 0$$

$$\text{pystysuunnassa: } G - N = 0$$

Kitka $F_{\mu} = \mu N$ ja paino $G = mg$, joten

$$\text{vaakasuunnassa: } F = \mu N$$

$$\text{pystysuunnassa: } N = mg.$$

Sijoittamalla alempi yhtälö ylempään saadaan

$$F = \mu mg.$$

Liukukitkakerroin on

$$\mu = \frac{F}{mg} = \frac{13,8 \text{ N}}{5,1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 0,2758 \approx 0,28.$$

c) Kun pakkaus on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, on pakkauksen liikeyhtälö Newtonin II lain mukaan

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Silloin vaakasuunnassa $F - F_{\mu} = ma$

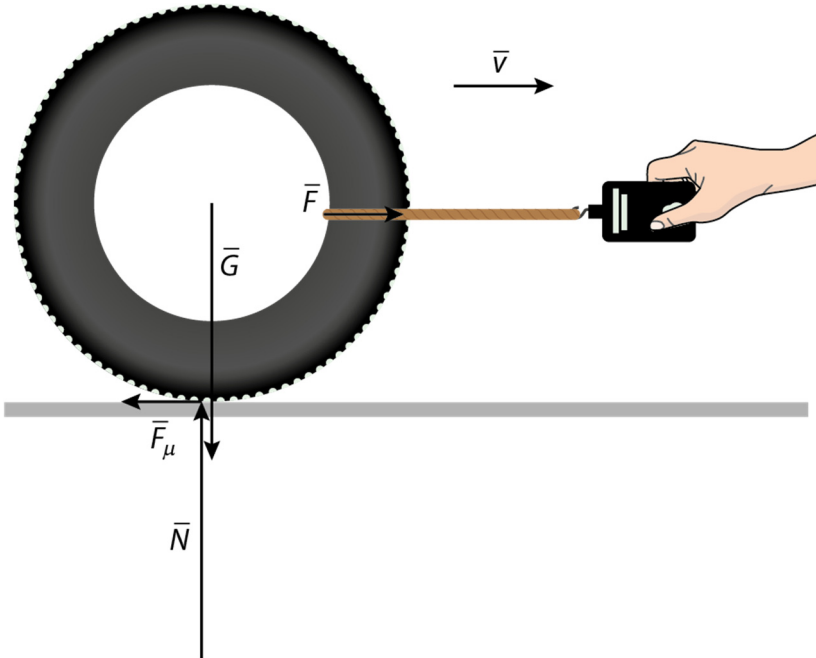
ja vetämiseen tarvittava voima on $F = F_{\mu} + ma$.

Koska varsinaisessa mittauksessa pakkaus oli tasaisessa liikkeessä, oli Newtonin II mukaan $F = F_{\mu}$.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan pakkauksen vetäminen vaatii suuremman voiman, jolloin paketin liikkeessä kuvaajan pystyakselin arvot kasvavat sitä suuremmiksi, mitä suurempi on kiihtyvyys. Paketin kiihtyvä liike ei kuitenkaan muuta alun lepokitkan arvoa.

Tehtävä 9.16.

Piirretään renkaaseen vaikuttavat voimat.



\vec{F} = voima-anturin renkaaseen kohdistama voima

\vec{F}_μ = renkaan ja lattian välinen liukukitka

\vec{G} = renkaan paino

\vec{N} = lattian renkaaseen kohdistama tukivoima

Kun rengas liikuu vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Valitaan suunnat oikealle ja ylös positiivisiksi

vaakasuunnassa: $F - F_\mu = 0$

pystysuunnassa: $G - N = 0$.

Kitka $F_\mu = \mu N$ ja paino $G = mg$, joten

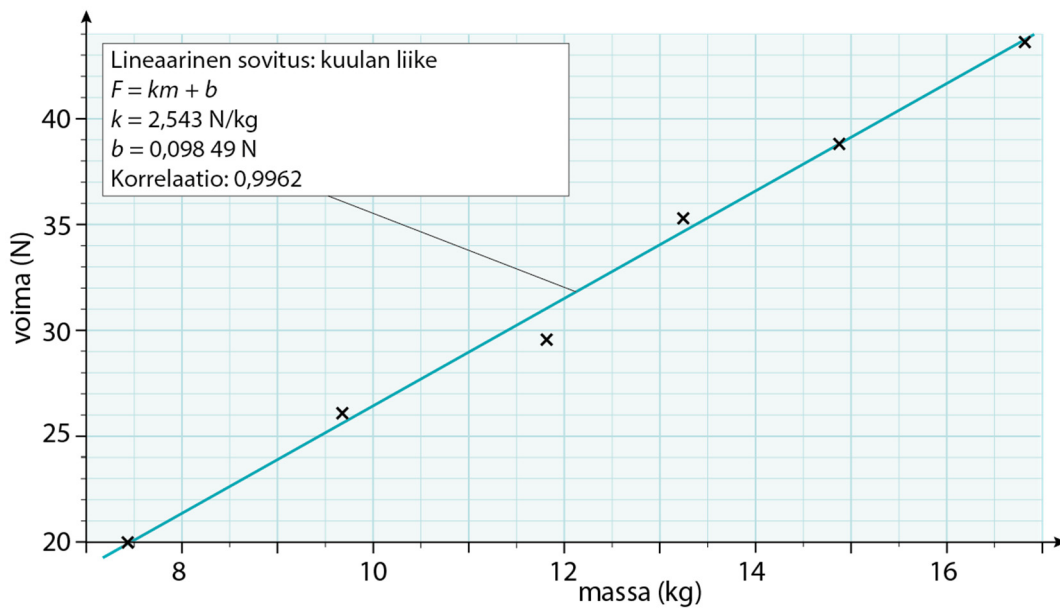
vaakasuunnassa: $F = \mu N$

pystysuunnassa: $N = mg$.

Sijoittamalla alempi yhtälö ylempään saadaan

$$F = \mu mg.$$

Tällöin (m, F) -koordinaatiston kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin on $k = \mu g$. Määritetään fysikaalinen kulmakerroin.



Lattian ja renkaan väliseksi liukukitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{k}{g} = \frac{2,543 \text{ N/kg}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 0,25922 \approx 0,26.$$

Kokeellinen tehtävä 9.17.

- a) Mittauksen perusteella nähdään, että kirjan liike liu'un aikana on likimain tasaisesti hidastuvaa, sillä kiihtyvyys on likimain vakio.
- b) Liu'un aikana kirjaan kohdistuu vaakasuunnassa vain kirjan ja lattian välinen kitka. Pystysuunnassa vaakasuoralla pinnalla kirjan paino G on yhtä suuri kuin pinnan kirjaan kohdistama tukivoima N . Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa suunnat huomioituna

$$F_{\mu} = ma$$

$$\mu N = ma$$

$$\mu mg = ma$$

$$\mu = \frac{a}{g}$$

Määritetään mittauksesta liu'un kiihtyvyys ja sijoitetaan saatu arvo edellä olevaan lausekkeeseen.

Tehtävä 9.18.

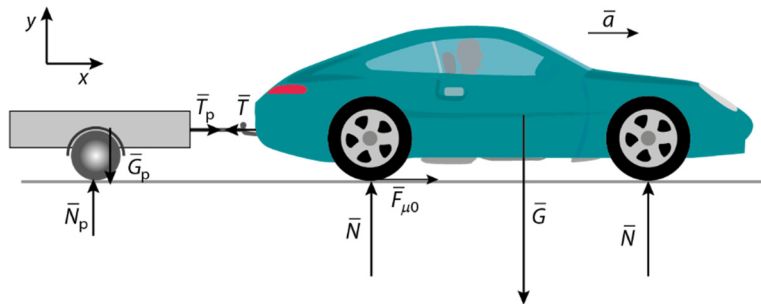
a) Auton massa $m_{\text{auto}} = 1340 \text{ kg}$

Peräkärryn massa $m_{\text{kärry}} = 420 \text{ kg}$

Auton kiihtyvyys $a = 0,47 \text{ m/s}^2$

Autoa kiihdyttävä lepokitkavoima $F_{\mu 0}$

Peräkärryn aisaan kohdistava voima T



\bar{G} = auton paino

\bar{N} = pinnan tukivoima autoon

$\bar{F}_{\mu 0}$ = lepokitka

\bar{T} = voima, jolla peräkärryn aisa vetää autoa

\bar{G}_p = peräkärryn paino

\bar{N}_p = pinnan tukivoima peräkärryyn

\bar{T}_p = voima, jolla auto vetää peräkärryä

b) Autoa ja peräkärä kiihdyttää auton renkaiden ja pinnan välinen lepokitka, $F_{\mu 0}$. Riippuen siitä onko auto nelivetoinen vai ei, lepokitka jakaantuu neljälle tai kahdelle renkaalle, mutta kitkan kokonaissuuruus on $F_{\mu 0}$. Newtonin II lain mukaan autoa ja peräkärä kiihdyttää voima vaakasuunnassa $\sum F = (m_{\text{auto}} + m_{\text{kärä}})a$.

Koska vierimiskitka ja ilmanvastus ovat hyvin pieniä, x -suuntainen liikeyhtälö on

$$F_{\mu 0} = (m_{\text{auto}} + m_{\text{kärä}})a = (1340 \text{ kg} + 420 \text{ kg}) \cdot 0,47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 827,2 \text{ N} \approx 830 \text{ N}.$$

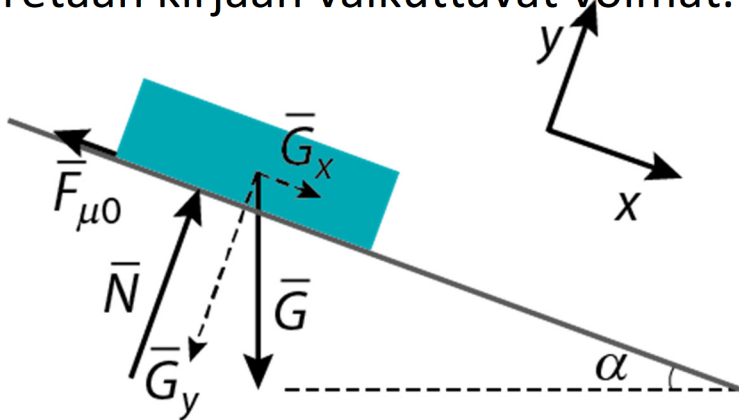
c) Peräkärä on kiihtyvässä liikkeessä. Peräkärä aiheuttaa aisaan voiman, jonka suuruus on sama kuin voiman suuruus T , jolla auto vetää kärä. Newtonin II lain mukaan

$$T = m_{\text{kärä}}a = 420 \text{ kg} \cdot 0,47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 197,4 \text{ N} \approx 200 \text{ N}.$$

Tehtävä 9.19.

a) Kun kirja lähtee liikkeelle, on kallistuskulma 10°

b) Piirretään kirjaan vaikuttavat voimat.



\bar{G} = kirjan paino

$\bar{F}_{\mu 0}$ = kirjan ja tason välinen lepokitka

\bar{N} = tason pinnan kirjaan kohdistama tukivoima

Tarkastellaan lepokitkan suurinta arvoa. Newtonin II lain mukaan paikallaan olevalle kirjalle pätee $\sum \bar{F} = \bar{0}$.

Kun voimien suunnat huomioidaan, saadaan x- ja y-suunnissa

$$G_x - F_{\mu 0} = 0$$

$$N - G_y = 0.$$

Esitetään painon komponentit ja kitkalle $F_{\mu 0} = \mu_0 N$

$$G \sin \alpha = \mu_0 N$$

$$N = G \cos \alpha.$$

Sijoitetaan alempi yhtälö ylempään, jolloin saadaan lepokitkakertoimen suurimmaksi arvoksi

$$mg \sin \alpha = \mu_0 mg \cos \alpha$$

$$\mu_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \tan 10^\circ = 0,1763 \approx 0,18.$$

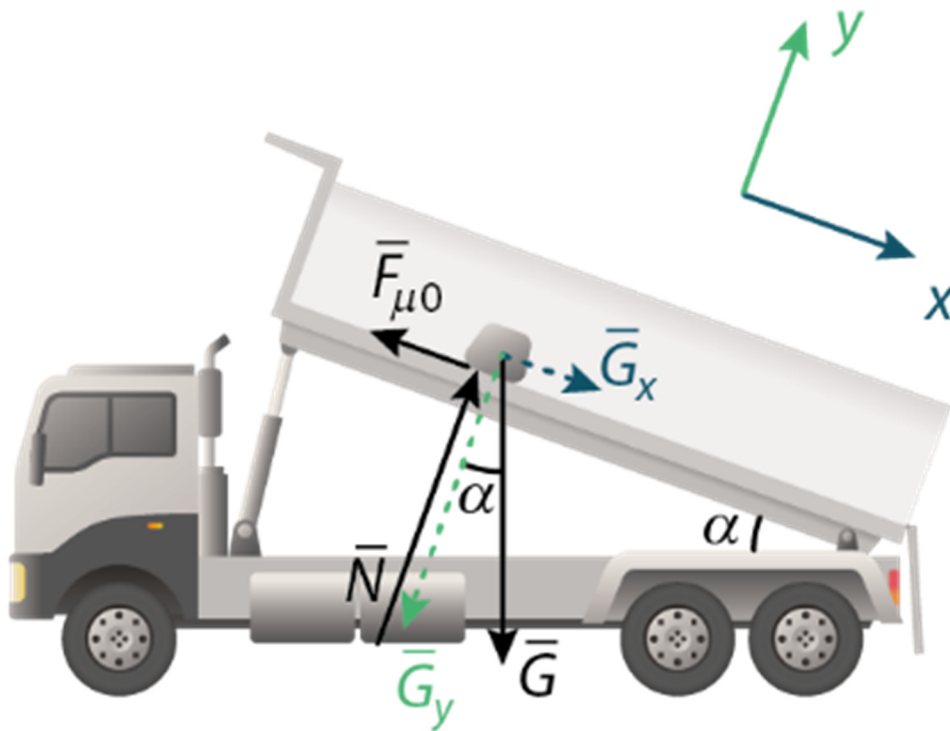
Tehtävä 9.20.

Kiven massa $m = 1,6 \text{ kg}$

Lepokitkakerroin $\mu_0 = 0,55$

Liukokitkakerroin $\mu = 0,42$

a) Kun $\alpha = 20^\circ$, kivi on paikallaan. Kitka on lepokitkaa.



\bar{G} = paino

\bar{N} = alustan tukivoima

$\bar{F}_{\mu 0}$ = lepokitka

Kiven Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Kun huomioidaan suunnat, saadaan

$$\text{tason suunnassa: } F_{\mu 0} - G_x = 0$$

$$\text{tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa: } N - G_y = 0$$

Tarkastellaan voimien komponentteja

$$\text{tason suunnassa: } F_{\mu 0} - G \sin \alpha = 0$$

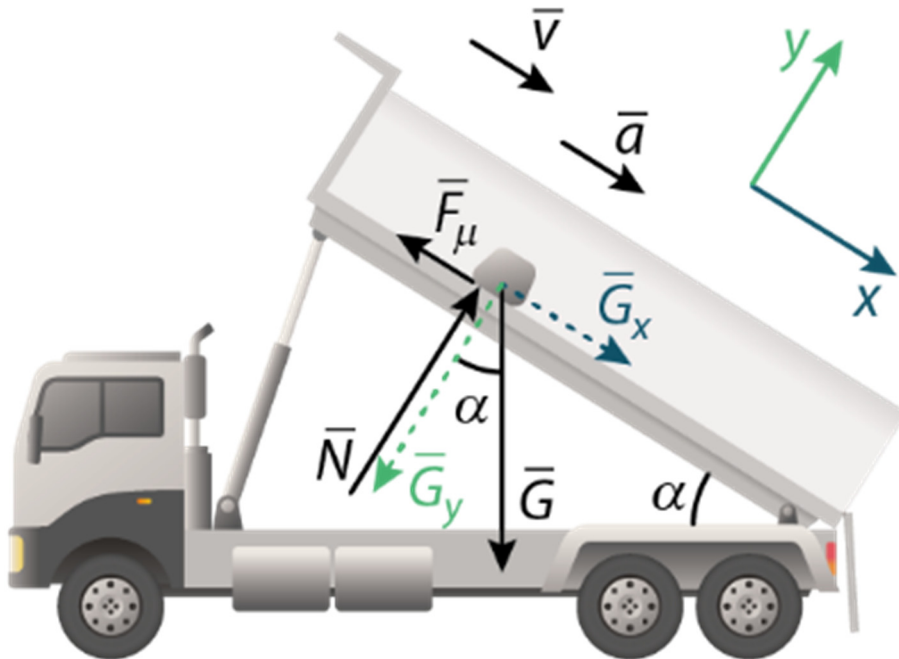
$$\text{tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa: } N - G \cos \alpha = 0.$$

Ylemmstä x-suunnan yhtälöstä saadaan

$$F_{\mu 0} = mg \sin \alpha = 1,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sin 20^\circ = 5,3683 \text{ N} \approx 5,4 \text{ N}.$$

Kun $\alpha = 20^\circ$, lepokitkan suuruus on 5,4 N.

b) Kun $\alpha = 32^\circ$, kivi liukuu ja kitka on liukukitkaa.



\bar{G} = paino

\bar{N} = alustan tukivoima

\bar{F}_μ = liukukitka

Kiven Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$.

Komponenttimuodossa

tason suunnassa: $F_\mu - G_x = ma$

tasoa vastaan kohtisuorassa: $N - G_y = 0$

Tarkastellaan voimien komponentteja

$$F_{\mu} - G \sin \alpha = ma$$

$$N - G \cos \alpha = 0.$$

Alemmasta y -suunnan yhtälöstä saadaan $N = mg \cos \alpha$.

Liukukitka on $F_{\mu} = \mu N$, joten voidaan kirjoittaa

$$F_{\mu} = \mu mg \cos \alpha = 0,42 \cdot 1,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cos 32^{\circ} = 5,5906 \text{ N} \approx 5,6 \text{ N}.$$

Kun $\alpha = 32^{\circ}$, liukukitkan suuruus on 5,6 N.

Tehtävä 9.21.

Laatikon massa $m = 425 \text{ kg}$

Putoamiskiihtyvyyys $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Lastaussillan kaltevuuskulma vaakatasoon nähden $\alpha = 35^\circ$

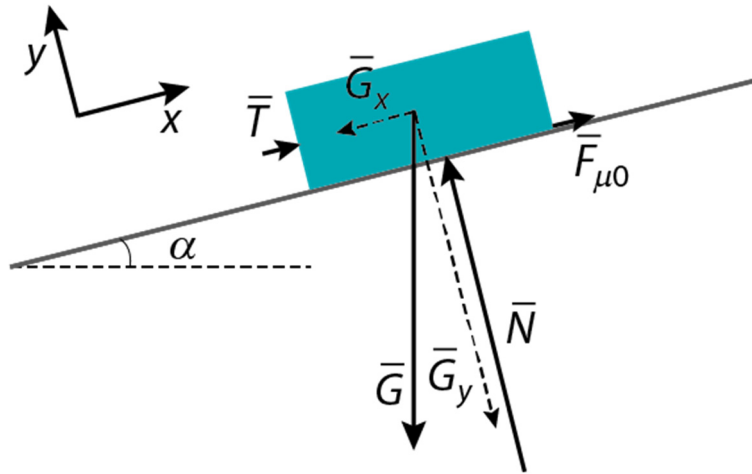
Lepokitkakerroin $\mu_0 = 0,52$

Tapaus 1: Kun laatikkoa tuetaan pienimmällä mahdollisella voimalla, se on lähtemäisillään liukuun alaspäin kaltevaa tasoa pitkin. Lepokitka vaikuttaa ylöspäin.

Tapaus 2: Kun työntövoiman T suuruutta kasvatetaan, laatikko lähtee lopulta liukumaan ylöspäin x -suunnassa. Kun laatikkoa tuetaan suurimmalla mahdollisella voimalla, se on lähtemäisillään liukuun ylöspäin kaltevaa tasoa pitkin. Lepokitka vaikuttaa alaspäin.

Molemmissa tilanteissa lepokitka estää kappaleen liukumista ja saa suurimman arvonsa.

Tutkitaan ensin tapausta 1. Piirretään tilanteesta voimakuvio.



\bar{G} = laatikon paino

\bar{N} = lastaussillan laatikkoon kohdistama tukivoima

$\bar{F}_{\mu 0}$ = lastaussillan ja laatikon välinen lepokitka

\bar{T} = laatikkoa työntävä voima

Koska laatikko pysyy paikallaan, on Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = \bar{0}$. Tarkastellaan laatikkoon vaikuttavien voimien suuruuksia kaltevan tason suunnassa ja kohtisuoran suunnassa.

$$y\text{-suunnassa: } N - G \cos \alpha = 0$$

$$x\text{-suunnassa: } F_{\mu 0} + T - G \sin \alpha = 0.$$

Koska lepokitka $F_{\mu 0} = \mu_0 N$ riippuu tukivoimasta, ratkaistaan ensin tukivoiman suuruus N

$$N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

$$= 425 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 35^\circ = 3415,2497 \text{ N}.$$

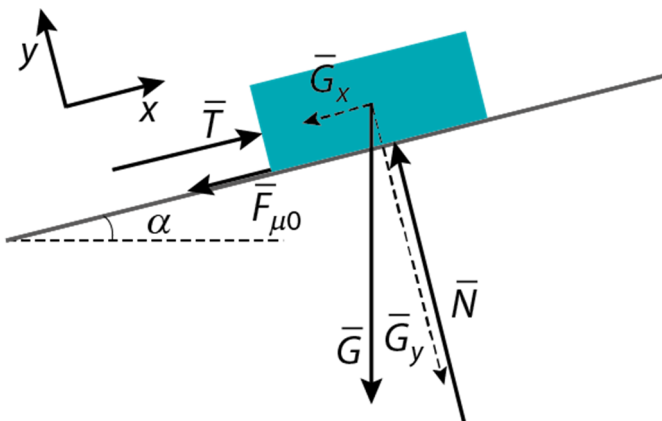
Sitten ratkaistaan pienin työntövoiman suuruus T siten, että laatikko ei lähde liukumaan alaspäin

$$T = G \sin \alpha - F_{\mu 0} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$$

$$= 425 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 35^\circ - 0,52 \cdot 425 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 35^\circ$$

$$= 615,454 \text{ N} \approx 620 \text{ N}.$$

Tutkitaan tapausta 2. Piirretään tilanteesta voimakuvio.



Liikkeyhtälöstä saadaan nyt

$$T - G \sin \alpha - F_{\mu 0} = 0$$

$$T = G \sin \alpha + F_{\mu 0} = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha$$

$$= 425 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 35^\circ + 0,52 \cdot 425 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 35^\circ$$

$$= 4167,3134 \text{ N} \approx 4200 \text{ N}.$$

Syvennä

Tehtävä 9.22.

- a) Kitka aiheuttaa häviöitä monissa teollisuuden prosesseissa ja sovelluksissa. Jos kitkaa voitaisiin pienentää hallitusti, niin saavutettaisiin merkittäviä kustannussäästöjä.

- b) Aineiden pinnat eivät ole mikroskooppisesti tarkasteltuna tasaisia. Tämän takia toisiaan hankaavat kappaleet eivät ole kontaktissa toisiinsa koko liukupinnan alueelta. Pintojen väliset kontaktialueet voivat olla mikroskooppisen pieniä.

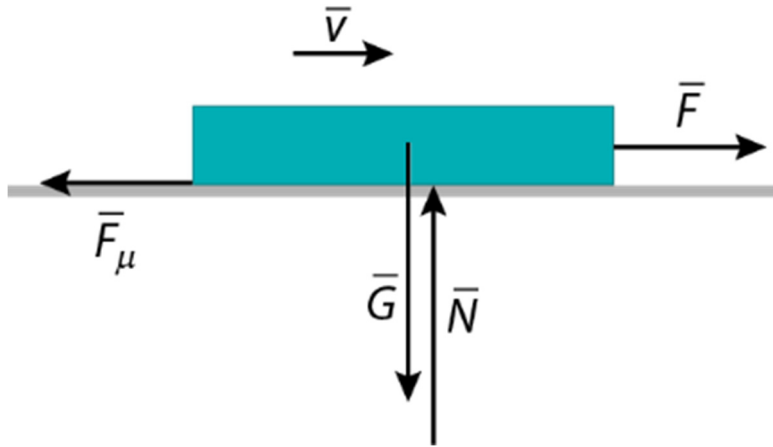
- c) Paljastuneen pinnan sisäenergia on suurempi kuin kontaktialueen sisäenergia. Kun kontaktialue häviää, atomien välisiä sidoksia katkeaa ja paljastuvan pinta-alueen sisäenergia kasvaa.

- d) Kappaleen mekaanista liike-energiaa muuntuu paljastuneen pinnan sisäenergiaksi, kun kontaktipintoja häviää ja sidoksia katkeaa.

e) Raudan koheesioenergia on suuri eli raudan sidosten katkeamiseen tarvitaan paljon energiaa. Voiteluaineessa on vetysidoksia, joiden koheesioenergia on paljon pienempi. Kun kontaktipintojen atomien sidosten katkeaminen ja muodostuminen tapahtuvat voiteluöljyssä rautalevyn sijaan, kitkan tekemä työ pienenee.

Tehtävä 9.23.

a)



\bar{G} = punnuslaatikon paino

\bar{F} = voima, jolla punnuslaatikkoa vedetään

\bar{F}_μ = punnuslaatikon ja pöydän pinnan välinen liukukitka

\bar{N} = pöydän pinnan punnuslaatikkoon kohdistama tukivoima.

Voimakuvion pisteytys:

Kuvaan on merkitty kaikki tilanteessa vaikuttavat voimavektorit oikeisiin suuntiin ja oikeille kohdilleen.

(1 p)

Kappaleen paino painopisteestä

Alustan tukivoima alkaa tai päättyy kappaleen alapinnasta

Kitka alkaa kappaleen alareunasta

Käden tukivoima päättyy kappaleen reunaan

Voimavektorien pituudet ovat oikein. (1 p)

vaakasuunnassa: käden tukivoima on pidempi kuin kitka

pystysuunnassa: tukivoima ja paino ovat yhtä pitkiä

Voimat on nimetty listaan kuvion alle ja kuvioon on merkitty nopeus- ja kiihtyvyyshvektorit (1 p)

Huom!

- Jos voimakuviossa on yksikin ylimääräinen voima, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

- Jos kaksi tai useampi voimista puuttuu, ei voimakuviosta voi saada pisteitä, 0 p.

b) Tarkastellaan vakionopeudella liukuvaa punnuslaatikkoa Newtonin II lain mukaan, jolloin $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Sovitaan suunnat ja muodostetaan liikeyhtälöt vaaka- ja pystysuunnassa

$$\text{vaakasuunta: } F - F_{\mu} = 0$$

$$\text{pystysuunta: } N - G = 0. \quad (2 \text{ p})$$

(Jos Newtonin II lakia ei ole mainittu, enintään 1 p.)

Kitkalle $F_{\mu} = \mu N$. Saadaan voimille

$$\text{vaakasuuntaan: } F = \mu N$$

$$\text{pystysuuntaan: } N = mg.$$

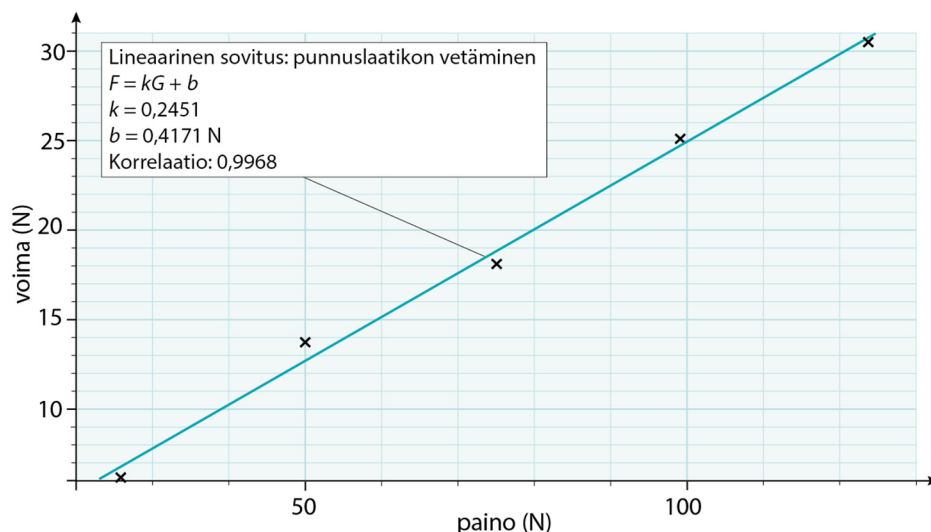
Vetävän voiman ja massan välille saadaan

$$F = \mu mg \text{ (1 p).}$$

Voima-anturin lukeman F ja painon mg välillä on lineaarinen riippuvuus. Tällöin kitkakerroin saadaan (mg, F) -kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. (1 p)

Lasketaan uusi sarake $G = mg$, tehdään kuvaaja ja sovitetaan mittauspisteisiin suora. Määritetään suoran fysikaalinen kulmakerroin.

Massa (kg)	Voima (N)	Paino (N)
2,65	6,2	25,997
5,1	13,8	50,031
7,65	18,1	75,047
10,1	25,1	99,081
12,6	30,5	123,606



(kuvaajan akselit oikein päin 1 p., mittauspisteet ja sovitus 1 p)

Punnuslaatikon pohjan ja pöydän pinnan välinen liukukitkakerroin on kuvaajan kulmakerroin $\mu = 0,2451 \approx 0,25$. (1 p)

Huom. Jos tehtävän on tehnyt vain yhdellä mittapisteellä max. 3 p. Jos määrittänyt keskiarvona max. 4 p

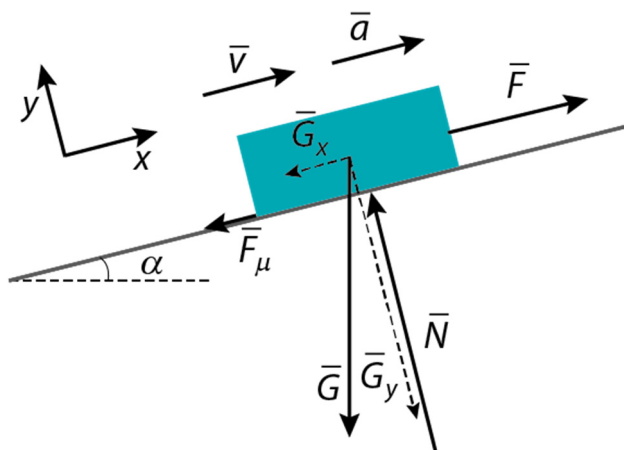
c) Punnuslaatikon kiihtyvyys $a = 1,4 \text{ m/s}^2$

Punnuslaatikon massa $m = 2,65 \text{ kg}$

Tason kaltevuuskulma $\alpha = 25^\circ$

Pöydän pinnan ja punnuslaatikon pohjan välinen kitkakerroin on b-kohdan mukaan $\mu = 0,2451$

Piirretään punnuslaatikon voimakuvio.



\vec{N} = pöydänpinnan tukivoima

\vec{F} = punnuslaatikon vetämiseen tarvittava voima

\vec{F}_μ = punnuslaatikon ja pöydän välinen kitka

\vec{G} = punnuslaatikon paino

Tarkastellaan punnuslaatikon liikettä tason suunnassa ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Tason suunnassa laatikko on kiihtyvässä liikkeessä ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa laatikko on paikallaan. Newtonin II lain mukaan voimien suunnat huomioiden

$$\text{tason suunnassa: } F - F_{\mu} - G_x = ma$$

$$\text{tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa: } N - G_y = 0.$$

(2 p, pitää olla maininta Newtonin II laista, jos ei mainintaa 1 p)

Kitka $F_{\mu} = \mu N$. Esitetään painon komponentit

$$F = \mu N + G \sin \alpha + ma$$

$$N = G \cos \alpha$$

(1 p)

Sijoitetaan tukivoima N ja $G = mg$ ylempään yhtälöön, jolloin saadaan

$$F = \mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha + ma$$

$$F = m(\mu g \cos \alpha + g \sin \alpha + a).$$

(1 p)

$$\begin{aligned} F &= 2,65 \text{ kg} \left(0,2451 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 25^\circ + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \sin 25^\circ + 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\ &= 20,471 \text{ N} \approx 20 \text{ N}. \quad (1 \text{ p.}) \end{aligned}$$