8. Liikeyhtälö ja voimakuvio

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 8.1.

a) B

b) B

c) A

d) B

e) B

f) C

g) B

h) C

Tehtävä 8.2.

Voiman $\overline{T_1}$ komponentit:

$T_{1,x} = -30\text{ N}$

$T_{1,y} = 10\text{ N}$

Voiman $\overline{T_2}$ komponentit:

$T_{2,x} = 30\text{ N}$

$T_{2,y} = 10\text{ N}$

Painon $\overline{G}$ komponentit:

$G_x = 0$

$G_y = -20\text{ N}$

Tehtävä 8.3.

a) Kappaleeseen vaikuttavat voimien suuruudet ovat $F_1 = 12$ N ja $F_2 = 16$ N.

Voimat ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden, joten

kokonaisvoiman suuruus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla.

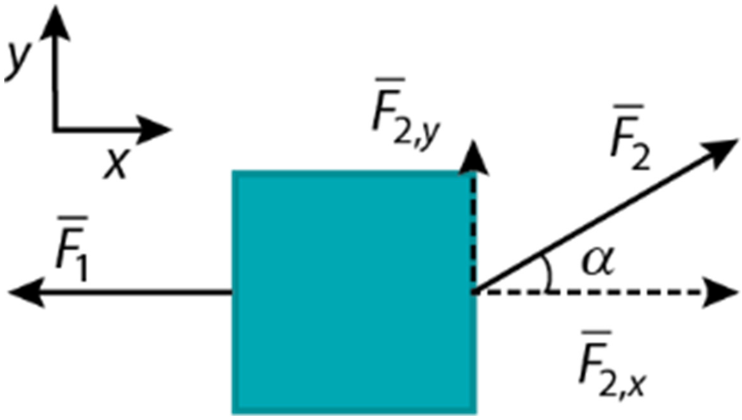
$$F_1^2 + F_2^2 = F_{\text{kok}}^2$$
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(12\,\text{N})^2 + (16\,\text{N})^2} = 20\,\text{N}$$

Kokonaisvoiman ja vaakasuunnan väliselle kulmalle saadaan

$$\tan\alpha = \frac{F_2}{F_1}$$
$$\tan\alpha = \frac{16\,\text{N}}{12\,\text{N}}$$
$$\alpha = 53{,}1301^\circ \approx 53^\circ.$$

Kokonaisvoiman suuruus on 20 N ja sen suunta on vasemmalle yläviistoon 53° kulmassa vaakasuuntaan nähden.

b) Jaetaan voimat vaaka- ja pystysuuntaisiin komponentteihin.



$F_{1,x} = F_1$

$F_{1,y} = 0$

$F_{2,x} = F_2 \cos\alpha$

$F_{2,y} = F_2 \sin\alpha$

Kokonaisvoimat *x*- ja *y*-suunnissa:

$F_x = -F_{1,x} + F_{2,x} = -F_1 + F_2 \cos\alpha$

$F_y = F_{2,y} = F_2 \sin\alpha$

Ratkaistaan kokonaisvoiman suuruus Pythagoraan lauseen avulla.

$$F_x{}^2 + F_y{}^2 = F^2$$

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2} \\ &= \sqrt{(-F_1 + F_2 \cos\alpha)^2 + (F_2 \cdot \sin\alpha)^2} \\ &= \sqrt{(-12\,\mathrm{N} + 16\,\mathrm{N} \cdot \cos 30^\circ)^2 + (16\,\mathrm{N} \cdot \sin 30^\circ)^2} \\ &= 8{,}21256\,\mathrm{N} \approx 8{,}2\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Kokonaisvoiman ja vaakasuunnan väliselle kulmalle saadaan

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_2 \cdot \sin\alpha}{-F_1 + F_2 \cos\alpha} = \frac{16\,\mathrm{N} \cdot \sin 30^\circ}{-12\,\mathrm{N} + 16\,\mathrm{N} \cdot \cos 30^\circ}$$

$$\alpha = 76{,}9357^\circ \approx 77^\circ.$$

Kokonaisvoiman suuruus on 8,2 N ja sen suunta on oikealle yläviistoon 77° kulmassa vaakasuuntaan nähden.

Tehtävä 8.4.

Kaappi ei lähde liukumaan, kun sen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Valitaan koordinaatiston *x*-akseli rampin suuntaiseksi, jolloin *y*-akseli on kohtisuorassa pintaa vastaan.

x-suunnassa: $F_x + F_\mu - G_x = 0$ eli $F_x = G_x - F_\mu$

y-suunnassa: $N - G_y - F_y = 0$ eli $N = G_y + F_y$

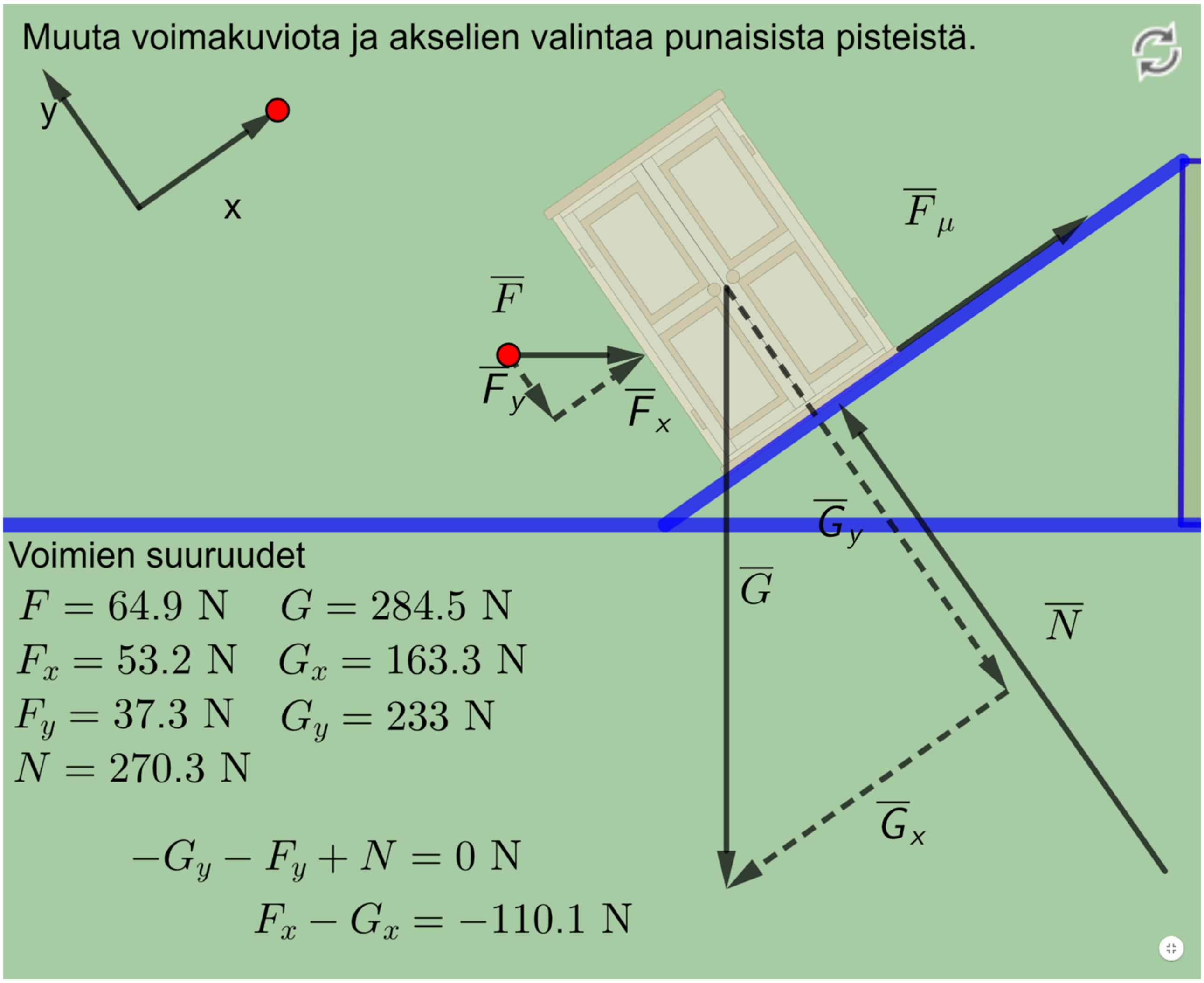
Muokataan simulaatiossa akselit sopivan suuntaisiksi.

Simulaatiosta havaitaan, että *y*-suunnan yhtälö toteutuu kaikilla työntävän voiman $\overline{F}$ suuruuksilla.

Liikeyhtälö toteutuu myös *x*-suunnassa, kun

$F_x - G_y = -F_\mu$ eli $F_\mathrm{x} - G_y = -\,110$ N.

Tällöin työntävän voiman suuruus on $F \approx 65$ N.


Muuta voimakuviota ja akselien valintaa punaisista pisteistä.
y
x
$\overline{F}_{\mu}$
$\overline{F}$
$\overline{F}_y$
$\overline{F}_x$
$\overline{G}_y$
$\overline{G}$
$\overline{N}$
$\overline{G}_x$
Voimien suuruudet
$F = 64.9\ \mathrm{N}$ $G = 284.5\ \mathrm{N}$
$F_x = 53.2\ \mathrm{N}$ $G_x = 163.3\ \mathrm{N}$
$F_y = 37.3\ \mathrm{N}$ $G_y = 233\ \mathrm{N}$
$N = 270.3\ \mathrm{N}$
$-G_y - F_y + N = 0\ \mathrm{N}$
$F_x - G_x = -110.1\ \mathrm{N}$

Tehtävä 8.5.

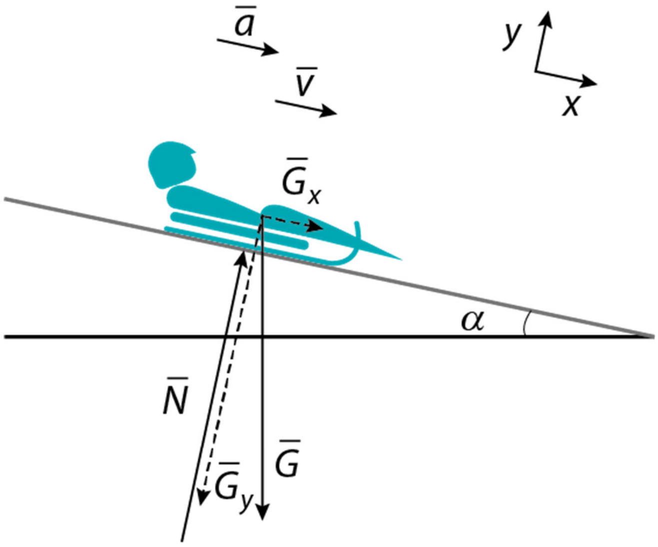
Kun selvitetään rakennuksen tai koneen osiin kohdistuvat voimat, voidaan varmistua, että rakenteet ovat riittävän kestäviä käyttötarkoitukseensa. Toisaalta voidaan säästää myös kustannuksissa, kun valitaan edullisimmat materiaalit, jotka täyttävät kestävyysvaatimukset.

Tehtävä 8.6.

a) Jos vastusvoimia ei huomioida, kelkkailijaan vaikuttavat vain paino ja pinnan tukivoima.

Merkitään kaltevan tason suuntaa *x*:llä ja sitä vastaan kohtisuoraa suuntaa *y*:llä.

Tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa ei ole kiihtyvyyttä, joten pinnan tukivoima $\bar{N}$ on yhtä suuri kuin painovoiman *y*-komponentti, G_y.



$\bar{G}$ = paino

$\bar{N}$ = pinnan tukivoima

b) Mäen kaltevuuskulma on $\alpha = 12°$.

Kelkkailija on kiihtyvässä liikkeessä, joten sen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Muodostetaan liikeyhtälöt komponenttimuodossa.

x-suunnassa eli pinnan suunnassa: $G_x = ma$

y-suunnassa eli pintaa vastaan kohtisuorassa suunnassa: $N - G_y = 0$

Voimakuvion perusteella $\sin\alpha = \frac{G_x}{G}$, joten

$G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha.$

Ratkaistaan kiihtyvyys pinnan suuntaisesta liikeyhtälöstä.

$$
\begin{aligned}
G_x &= ma \\
\cancel{m}g\sin\alpha &= \cancel{m}a \\
a &= g\sin\alpha \\
a &= 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 12° = 2{,}039614\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}
\end{aligned}
$$

Tehtävä 8.7.

Kappaleen massa m = 1,2 kg

a) Kun suunta oikealle valitaan positiiviseksi, on kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima

$\Sigma F = 14\,\text{N} - 8{,}5\,\text{N} = 5{,}5\,\text{N}.$

Newtonin II lain mukaan $\Sigma F = ma$.

Kappaleen kiihtyvyys on kokonaisvoiman suuntaan eli oikealle

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{5{,}5\,\text{N}}{1{,}2\,\text{kg}} = 4{,}5833\,\text{m/s}^2 \approx 4{,}6\,\text{m/s}^2.$$

b) Lasketaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima Pythagoraan lauseella

$$\Sigma F = \sqrt{(18\,\text{N})^2 + (12\,\text{N})^2} = 21{,}6333\,\text{N}.$$

Voiman suunta vaakasuuntaan nähden on

$$\tan\alpha = \frac{12\,\text{N}}{18\,\text{N}}$$

$$\alpha = 33{,}690^\circ \approx 34^\circ.$$

Newtonin II lain mukaan $\Sigma F = ma$.

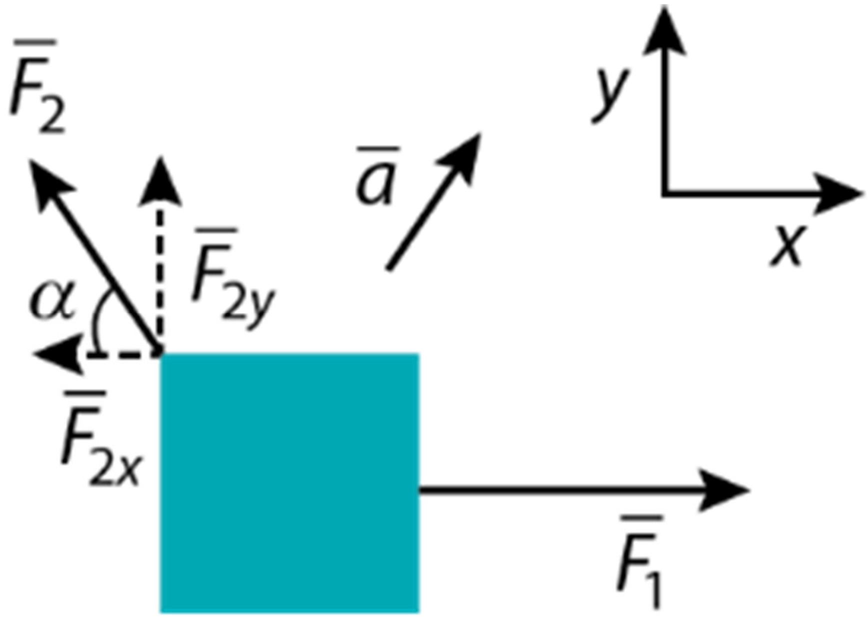
Kappaleen kiihtyvyys kokonaisvoiman suuntaan on

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{21{,}6333\,\text{N}}{1{,}2\,\text{kg}} = 18{,}03\,\text{m/s}^2 \approx 18\,\text{m/s}^2.$$

Kappaleen kiihtyvyys on 18 m/s^2 oikealle yläviistoon 34°kulmassa vaakasuuntaan nähden.

c) Kulma $\alpha = 30°$

Jaetaan vino 10 N voima vaaka- ja pystysuuntaisiin komponentteihin.



Kokonaisvoima *x*-suunnassa on

$F_x = F_1 - F_2 \cos\alpha = 12\,\text{N} - 10\,\text{N} \cdot \cos 30° = 3{,}33975\,\text{N}.$

Voima *y*-suunnassa $F_y = F_2 \sin\alpha = 10\,\text{N} \cdot \sin 30° = 5{,}0\,\text{N}.$

Lasketaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima Pythagoraan lauseella

$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2} = \sqrt{(3.33975\text{N})^2 + (5{,}0\text{N})^2} = 6{,}01281\,\text{N}.$

Voiman suunta vaakasuuntaan nähden on

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{5{,}0\,\text{N}}{3{,}33975\,\text{N}}$$

$$\alpha = 56{,}259^\circ \approx 56^\circ.$$

Newtonin II lain mukaan $\Sigma F = ma$.

Kappaleen kiihtyvyys kokonaisvoiman suuntaan

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{6{,}01281\,\text{N}}{1{,}2\,\text{kg}} = 5{,}0107\,\text{m/s}^2 \approx 5{,}0\,\text{m/s}^2.$$

Kappaleen kiihtyvyys on 5,0 m/s^2 oikealle yläviistoon

56° kulmassa vaakasuuntaan nähden.

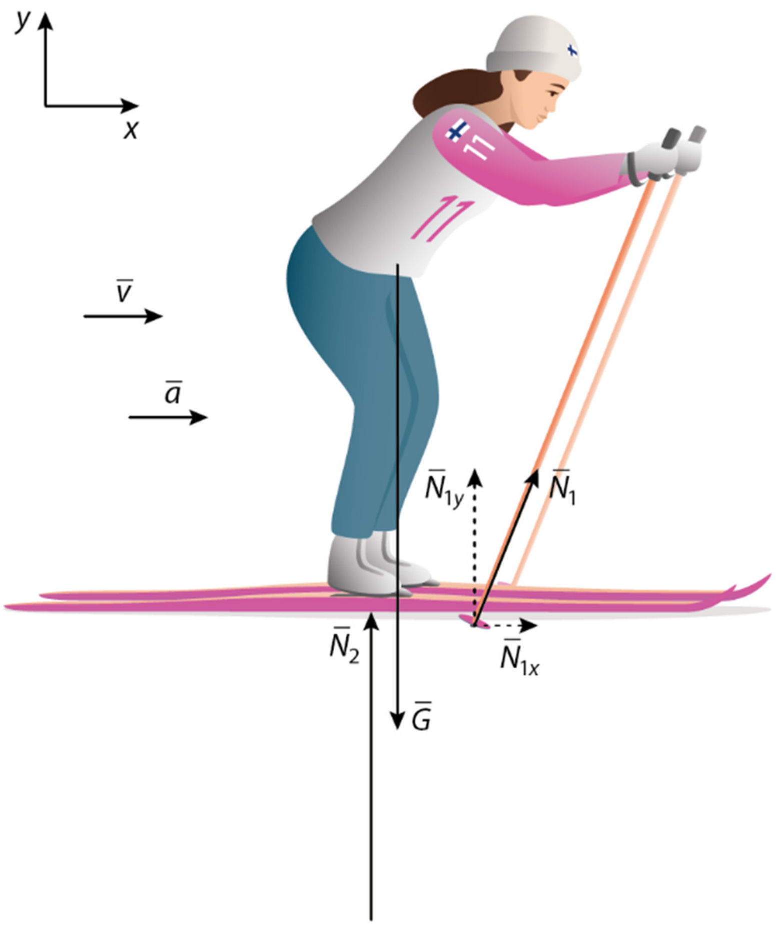
Sovella

Tehtävä 8.8.

Lumen sauvoihin kohdistama tukivoima $N_1 = 250$ N

Sauvojen ja maanpinnan välinen kulma $\alpha = 68°$

Hiihtäjän massa $m = 68$ kg



$\bar{G} =$ hiihtäjän paino

$\bar{N}_1 =$ lumen sauvoihin kohdistama tukivoima

$\bar{N}_2 =$ lumen suksiin kohdistama tukivoima

Oletetaan, että suksien ja ladunpinnan välinen kitka on hyvin pieni.

a) Tarkastellaan voimia x-suunnassa, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, ja hiihtäjää eteenpäin vievä voima on

$$N_{1x} = N_1 \cos\alpha = 250\,\text{N} \cdot \cos 68^\circ = 93{,}6516\,\text{N}.$$

b) Tarkastellaan voimia y-suunnassa, jossa ei ole kiihtyvyyttä, jolloin $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Pinnan hiihtäjään kohdistava tukivoima työntöhetkellä on

$$N_2 + N_{1y} - G = 0$$

$$N_2 = mg - N_1 \sin\alpha$$

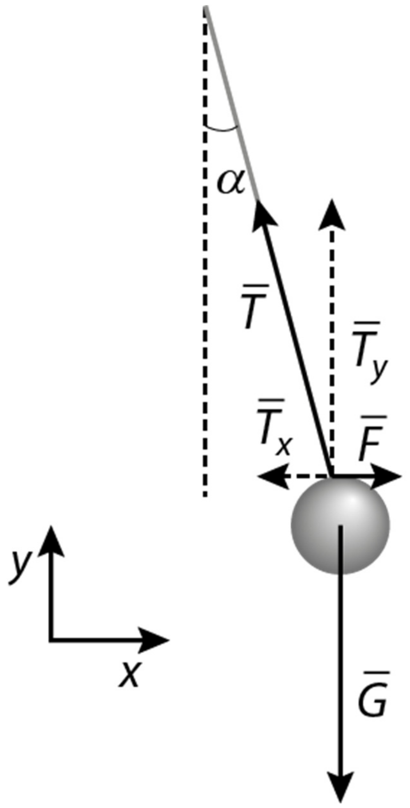
$$N_2 = 68\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 250\,\text{N} \cdot \sin 68^\circ = 435{,}28\,\text{N} \approx 440\,\text{N}.$$

Tehtävä 8.9.

Moukarikuulan massa m = 7,26 kg

Vaijerin ja pystysuoran muodostama kulma α = 15°

a)



$\overline{G} =$ moukarikuulan paino

$\overline{F} =$ narun jännitysvoima

$\overline{T} =$ vaijerin jännitysvoima

b) Tarkastellaan paikallaan olevaan kuulaan

x- ja y-suunnassa vaikuttavia voimia. Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli

x-suunnassa: $F - T_x = 0$

y-suunnassa: $T_y - G = 0$.

Esitetään vaijerin jännitysvoiman komponentit kulman avulla, jolloin yhtälöistä saadaan

x-suunnassa: $F = T\sin\alpha$

y-suunnassa: $T\cos\alpha = mg$.

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$ ja se sijoitetaan ylempään yhtälöön

$$F = T\sin\alpha = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha} = mg\tan\alpha$$
$$= 7{,}26\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \tan 15^\circ = 19{,}08\,\text{N} \approx 19\,\text{N}.$$

c) b-kohdan mukaan vaijerin jännitysvoima

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{7{,}26\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{\cos 15^\circ} = 73{,}73\,\text{N} \approx 73\,\text{N}.$$

d) Jos moukaria vedetään kauemmaksi, kasvaa kulma α. Aiempien kohtien mukaan vaijerissa vaikuttava voima on $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$. Jos kulma α kasvaa, niin $\cos\alpha$ pienenee ja tällöin kulman kasvaessa jännitysvoima kasvaa.

Tehtävä 8.10.

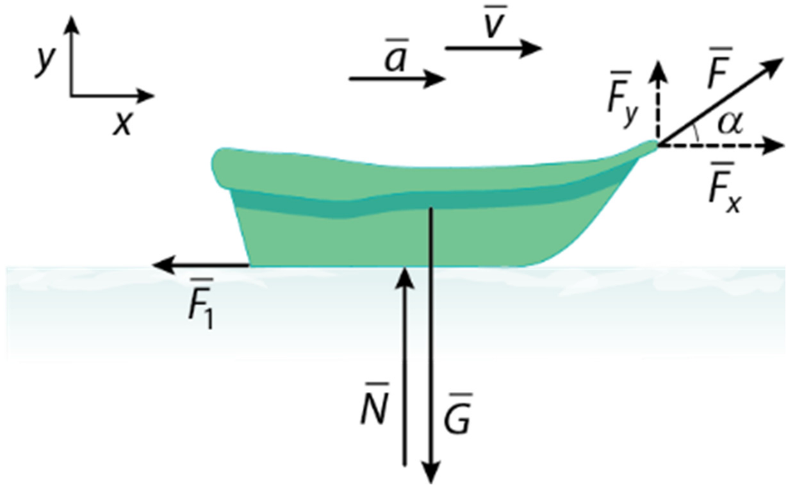
Pulkan massa m = 1,8 kg

Narun ja vaakasuoran muodostama kulma α = 35°

Narun jännitysvoima F = 8,8 N

Liikettä vastustavat voimat F_1 = 6,3 N

a)



$\overline{G}$ = pulkan paino

$\overline{F}$ = narun jännitysvoima

$\overline{F}_1$ = pulkan liikettä vastustavat voimat

$\overline{N}$ = pinnan pulkkaan kohdistama tukivoima

b) Tarkastellaan pulkkaan kohdistuvia voimia y-suunnassa. Pystysuunnassa Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli

$F_y + N - G = 0.$

Esitetään jännitysvoima kulman avulla.

Tällöin

$N = mg - F\sin\alpha = 1{,}8\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 8{,}8\,\text{N} \cdot \sin 35^\circ = 12{,}611\,\text{N} \approx 13\,\text{N}.$

c) Vaakasuunnassa pulkka on kiihtyvässä liikkeessä ja Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Pulkan kiihtyvyys on silloin

$F_x - F_1 = ma$

$$a = \frac{F\cos\alpha - F_1}{m} = \frac{8{,}8\,\text{N} \cdot \cos 35^\circ - 6{,}3\,\text{N}}{1{,}8\,\text{kg}} = 0{,}5047\,\text{m/s}^2 \approx 0{,}50\,\text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on kuvassa oikealle.

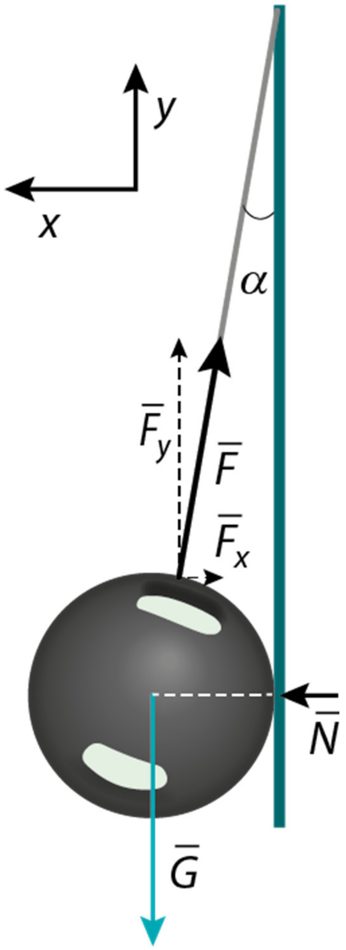
Tehtävä 8.11.

Kuntopallon massa m = 8,0 kg

Narun pituus l =0,72 m

Kuntopallon säde r = 0,15 m

a)



$\overline{G} =$kuntopallon paino

$\overline{N} =$seinän kuntopalloon kohdistama voima

$\overline{F} =$narun jännitysvoima

b) Kuntopallon on paikoillaan, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja

x-suunnassa: $N - F_x = 0$

y-suunnassa: $F_y - G = 0$.

Esitetään narun jännitysvoima kulman avulla

x-suunnassa: $N = F\sin\alpha$

y-suunnassa: $mg = F\cos\alpha$.

Narun ja pystysuunnan välinen kulma on

$$\sin\alpha = \frac{r}{l+r} = \frac{0{,}15\,\mathrm{m}}{0{,}72\,\mathrm{m} + 0{,}15\,\mathrm{m}}$$
$$\alpha = 9{,}928^\circ.$$

Ratkaistaan y-suunnan yhtälöstä narun jännitysvoima $F = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, ja sijoitetaan se x-suunnan yhtälöön.

Seinän tukivoimaksi saadaan

$$N = F\sin\alpha = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = mg\tan\alpha$$
$$= 8{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \tan 9{,}928^\circ$$
$$= 13{,}7365\,\mathrm{N} \approx 14\ \mathrm{N}.$$

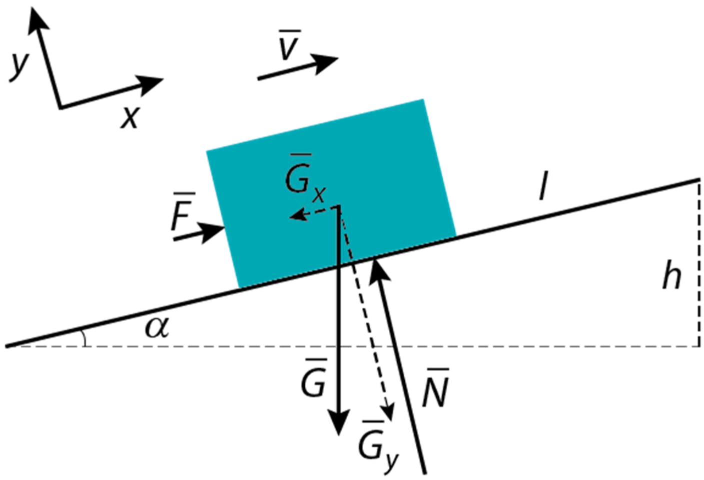
Tehtävä 8.12.

Rampin pituus l = 2,5 m

Rampin korkeus h = 0,15 m

Vaunun massa m = 130 kg

a)



$\overline{G}$ = vaunun paino

$\overline{N}$ = rampin vaunuun kohdistama tukivoima

$\overline{F}$ = vaunun työtämiseen tarvittava voima

b) Vaunu liikkuu vakionopeudella, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Vaunuun kohdistuvat voimat tason suunnassa ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa ovat

$$F - G_x = 0$$
$$N - G_y = 0.$$

Tason kaltevuuskulma

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{0{,}15\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\mathrm{m}}$$
$$\alpha = 3{,}4398^\circ.$$

Esitetään painon komponentit tason kaltevuuskulman avulla ja lasketaan vaunun työntämiseen tarvittava voima

$$F = mg\sin\alpha = mg\frac{h}{l}$$
$$= 130\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \frac{0{,}15\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\mathrm{m}} = 76{,}518\,\mathrm{N} \approx 77\,\mathrm{N}.$$

c) Pinnan tukivoima b-kohdan mukaan

$$N = mg\cos\alpha$$
$$= 130\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 3{,}4398^\circ = 1273{,}0\,\text{N} \approx 1300\,\text{N}.$$

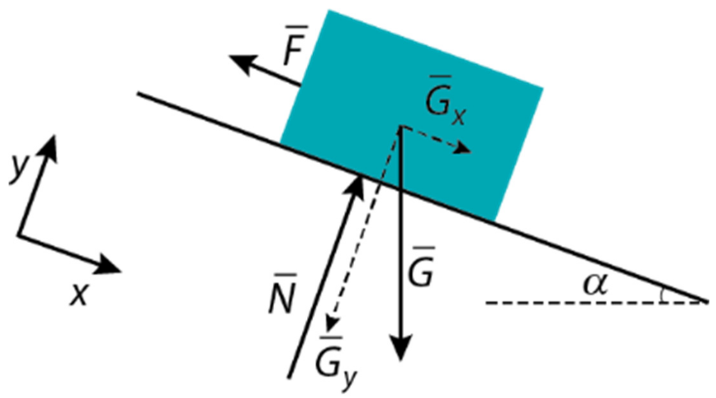
d) Työntämiseen tarvittava voima b-kohdan mukaan on

$$F = mg\sin\alpha = mg\frac{h}{l}.$$

Rampin pituuden kasvattaminen pienentää työntämiseen tarvittavaa voimaa.

Tehtävä 8.13.

Tehdään tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G} =$ kappaleen paino

$\overline{F} =$ voima-anturin tukivoima

$\overline{N} =$ pinnan tukivoima

Kun kappale on paikallaan, on Newtonin II lain mukaan

$\sum \overline{F} = \overline{0}.$

Tarkastellaan kappaleeseen tilanteessa vaikuttavia tason suuntaisia voimia.

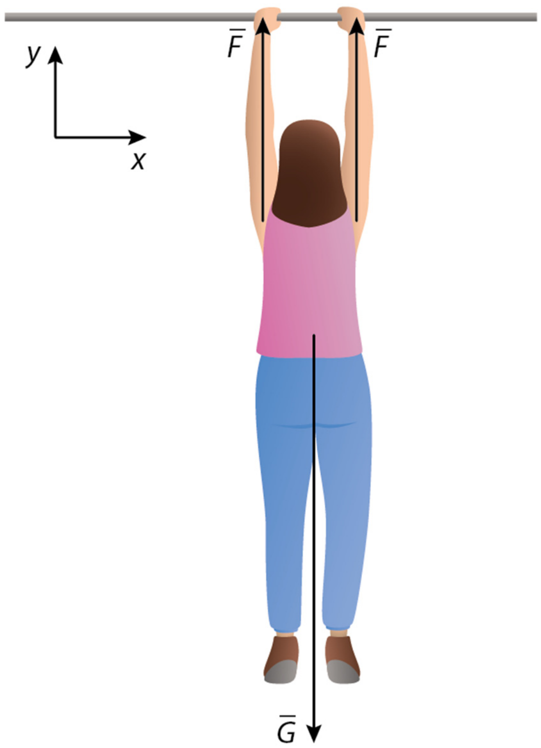
$$
\begin{aligned}
F - G_x &= 0 \\
F &= G_x \\
F &= G\sin\alpha.
\end{aligned}
$$

Mitä suurempi on kaltevan tason kulma α, sitä suurempi on termi $G\sin\alpha$ ja sitä suurempi on voima-anturin lukema. Kaltevuuskulman α kasvattaminen kasvattaa myös voiman F suuruutta.

Tehtävä 8.14.

Kuntoilijan massa m = 63 kg

a)



$\overline{F} =$ kuntoilijan käteen vaikuttava voima

$\overline{G} =$ kuntoilijan paino

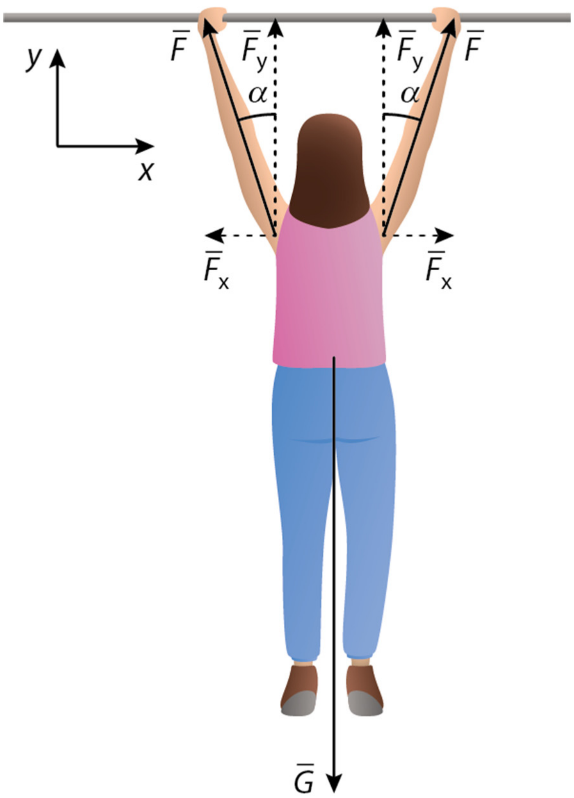
Kun kuntoilija roikkuu paikoillaan, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Voimien suunnat huomioituna

$$F + F - G = 0.$$

Kuntoilijan käteen vaikuttava voima

$$F = \frac{mg}{2} = \frac{63\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{2} = 309{,}015\,\text{N} \approx 310\,\text{N}.$$

b) Pystysuunnan ja käsien välinen kulma $\alpha = 18^\circ$



$\overline{F} =$ kuntoilijan käteen vaikuttava voima

$\overline{G} =$ kuntoilijan paino

Kun kuntoilija roikkuu paikoillaan, on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja pystysuunnassa

$$F_y + F_y - G = 0$$
$$2F\cos\alpha = mg.$$

Käsiin vaikuttava voima on

$$F = \frac{mg}{2\cos\alpha} = \frac{63\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{2\cos 18^\circ} = 324{,}917599\,\mathrm{N} \approx 320\,\mathrm{N}.$$

c) Jos käsiä vedetään kauemmaksi, kasvaa kulma α. Käsiin vaikuttava voima b-kohdan mukaan on

$$F = \frac{mg}{2\cos\alpha}.$$

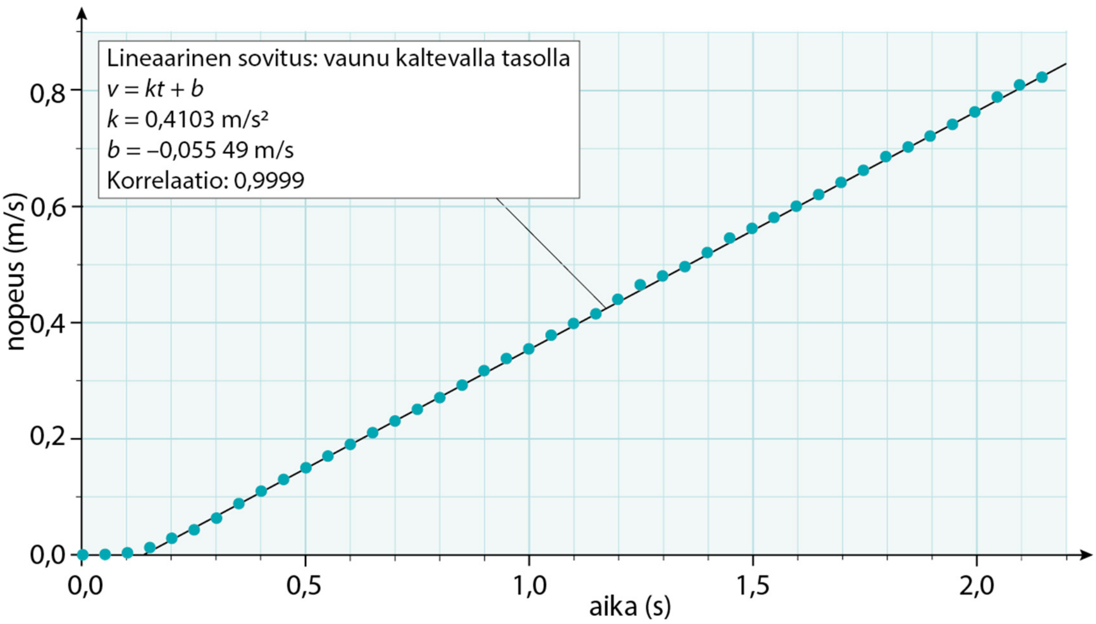
Jos kulma α kasvaa, niin $\cos\alpha$ pienenee ja tällöin kulman kasvaessa käsiin vaikuttava voima kasvaa.

Tehtävä 8.15.

Kitkattoman radan kaltevuuskulma vaakatasoon nähden α

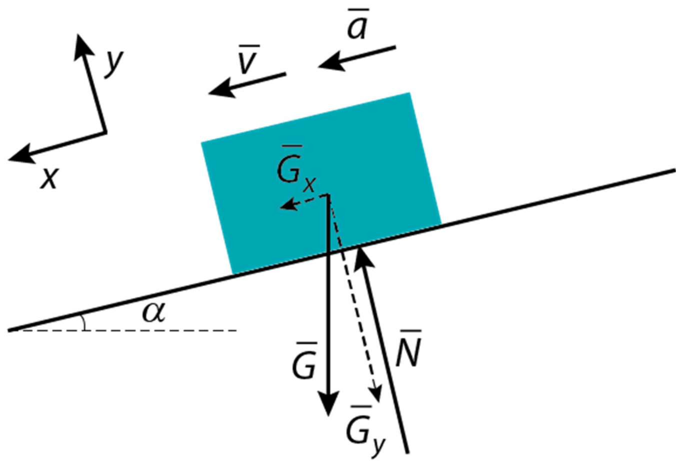
Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Vaunun kiihtyvyys on (t, v)-koordinaatistoon laaditun kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin.



Vaunun kiihtyvyys on a = 0,4103 m/s$^2 \approx$ 0,41 m/s^2.

b)



$\bar{G} =$ vaunun paino

$\bar{N} =$ radan vaunuun kohdistama tukivoima

Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}$.

Suunnat huomioiden tason suunnassa

$$\begin{aligned} G_x &= ma \\ \cancel{m}g\sin\alpha &= \cancel{m}a \\ g\sin\alpha &= a. \end{aligned}$$

Radan ja vaakasuoran välinen kulma on

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{g} = \frac{0{,}410\,\text{m/s}^2}{9{,}81\,\text{m/s}^2} \\ \alpha &= 2{,}395^\circ \approx 2{,}4^\circ. \end{aligned}$$

c) Edellisen kohdan mukaan vaunun kiihtyvyys on $a = g\sin\alpha$. Mitä suurempi on kulma α, sitä suurempi on $\sin\alpha$ ja sitä suurempi on kiihtyvyys. Kun kiihtyvyys kasvaa on, kasvaa kuvaajan jyrkkyys.

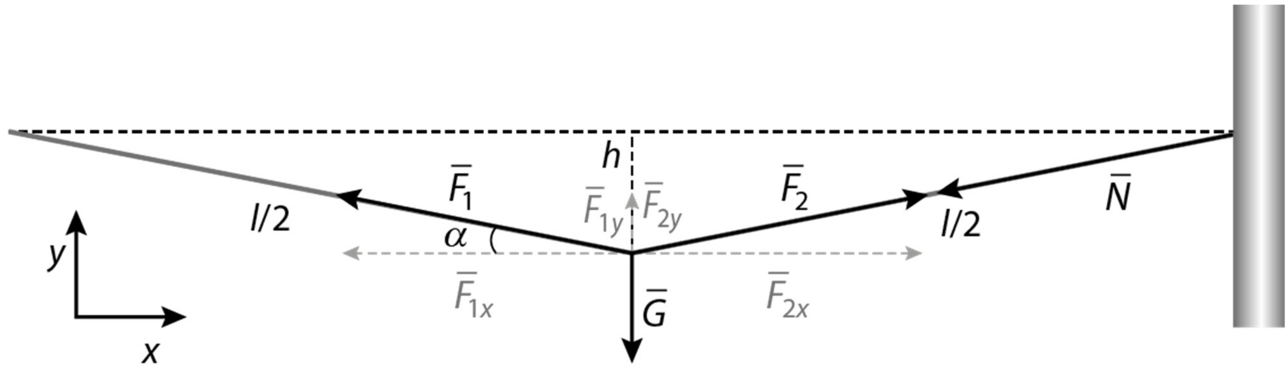
Tehtävä 8.16.

Vaijerin muutos vaakasuuntaan nähden h = 0,112 m

Vaijerin pituus l = 9,4 m

Trapetsitaiteilijan massa m = 52 kg

a) Piirretään tilanteesta voimakuvio.



$\overline{G} =$ trapetsitaiteilijan paino eli voima, jolla vaijeria painetaan alaspäin

$\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2 =$ vaijerissa vaikuttavat jännitysvoimat

$\overline{N} =$ voima, jolla vaijeri vetää tolppaa

Trapetsitaiteilija on paikallaan, jolloin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Voimat

x-suunnassa: $-F_{1x} + F_{2x} = 0$

y-suunnassa: $F_{1y} + F_{2y} - G = 0$.

Esitetään voimien komponentit kulman avulla

x-suunnassa: $F_1 \cos\alpha = F_2 \cos\alpha$

y-suunnassa: $F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha = mg$.

Ylemmän *x*-suunnan yhtälön perusteella vaijerissa vaikuttavat voimat ovat yhtä suuret, joten merkitään $F_1 = F_2 = F$.

Kulmasta vaakatasoon nähden saadaan $\sin\alpha = \dfrac{h}{\frac{l}{2}} = \dfrac{2h}{l}$.

Ratkaistaan alemman *y*-suunnan yhtälön avulla vaijerissa vaikuttava voima.

Vaijerissa vaikuttava voima on

$$\begin{aligned}
F\sin\alpha + F\sin\alpha &= mg \\
2F\sin\alpha &= mg \\
F &= \frac{mg}{2\sin\alpha} = \frac{mg}{2\cdot\frac{2h}{l}} = \frac{mgl}{4h} \\
&= \frac{52\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 9{,}4\,\text{m}}{4\cdot 0{,}112\,\text{m}} \\
&= 10703{,}4107\,\text{N} \approx 11\,\text{kN}.
\end{aligned}$$

b) Newtonin III lain mukaan palkki vaikuttaa vaijeriin yhtä suurella voimalla kuin vaijeri palkkiin. Palkkiin vaikuttava voima on yhtä suuri kuin vaijerissa vaikuttava voima, mutta vastakkaissuuntainen. Voiman suuruus on
$N = F = 11$ kN.

Tehtävä 8.17.

Kuulista nopeiten kulki kuula, joka oli alaspäin kaarevalla radalla.

Tarkastellaan tilannetta kaltevana tasona. Kuulaan vaikuttaa sen paino, sekä pinnan tukivoima. Lisäksi kuulan saa vierimään pieni, liikkeen suuntaan nähden vastakkaissuuntainen lepokitka. Kuula kiihtyy, koska painovoiman pinnan suuntainen komponentti antaa kuulalle kiihtyvyyden.

Jätetään kitkan vaikutus vähäisenä huomioimatta. Newtonin II lain mukaan tason suunnassa

$$G_x = ma$$
$$G \sin \alpha = ma.$$

Kiihtyvyys on suoraan verrannollinen kaltevuuskulmasta riippuvaan $\sin\alpha$:n arvoon. Mitä suurempi kulma on, sitä suurempi on $\sin\alpha$:n arvo ja sitä suurempi on kuulan kiihtyvyys.

Mitä suurempi on kuulan kiihtyvyys, sitä nopeammin kuulan nopeus kasvaa ja sitä pidemmän matkan kuula kulkee suuremmalla nopeudella ja sitä nopeammin kuula on alhaalla radalla.

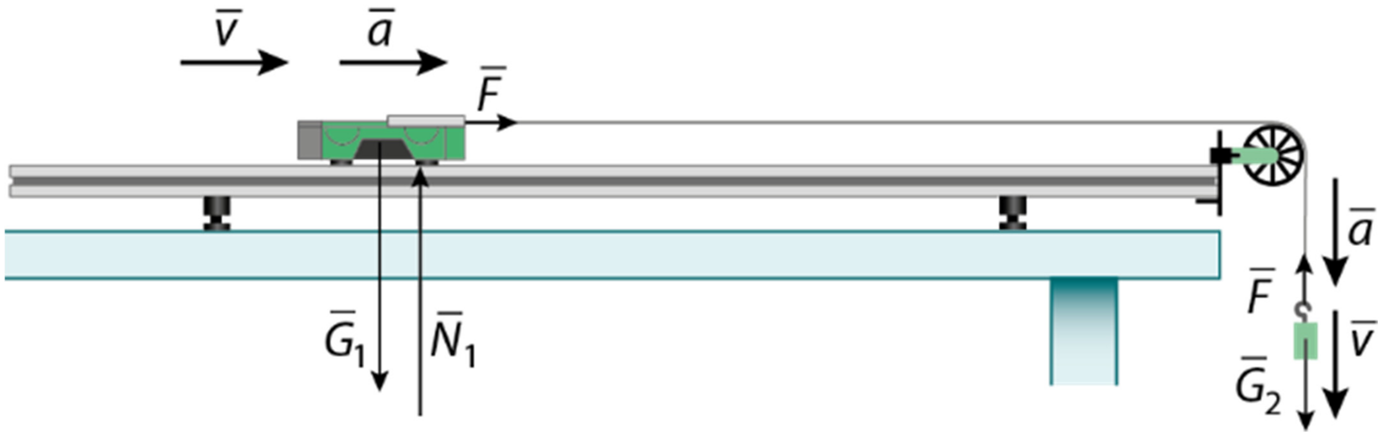
Kaikilla kuulilla on kuitenkin sama loppunopeus, mikä perustellaan luvussa 12.

Tehtävä 8.18.

Vaunun massa $m_1 = 0{,}455$ kg

Punnuksen massa $m_2 = 0{,}0042$ kg

a)



$\overline{G}_1 =$ vaunun paino

$\overline{N}_1 =$ radan vaunuun kohdistama tukivoima

$\overline{G}_2 =$ punnuksen paino

$\overline{F} =$ langan jännitysvoima

b) Tarkastellaan vaunuun ja punnukseen vaikuttavia voimia ja kirjoitetaan vaunulle ja punnukselle Newtonin II lain mukaiset liikeyhtälöt suunnat huomioiden. Koska vaunu ja punnus on kytketty langalla toisiinsa, niillä on sama kiihtyvyys.

Valitaan vaunun kohdalla positiiviset suunnat ylös ja oikealle. Vaunun liikeyhtälöt vaaka- ja pysty suunnassa

$$\begin{aligned} F &= m_1 a \\ N_1 - G_1 &= 0. \end{aligned}$$

Punnuksen kohdalla valitaan positiivinen suunta alaspäin. Punnuksen liikeyhtälö on silloin

$$G_2 - F = m_2 a.$$

Sijoitetaan vaunuun vaikuttavan voiman F lauseke punnuksen liikeyhtälöön,

$$m_2 g - m_1 a = m_2 a$$

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}0042\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}455\,\mathrm{kg} + 0{,}0042\,\mathrm{kg}} = 0{,}0897\,\mathrm{m/s^2} \approx 0{,}090\,\mathrm{m/s^2}.$$

c) Langan jännitysvoima b-kohdan mukaan

$$F = m_1 a = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}455\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}0042\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}455\,\mathrm{kg} + 0{,}0042\,\mathrm{kg}} = 0{,}040825\,\mathrm{N} \approx 41\,\mathrm{mN}.$$

d) Punnuksen putoamismatka s = 0,58 m

Punnus ja vaunu ovat tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin kuljetulle matkalle ja loppunopeudelle on voimassa

$$s=\frac{1}{2}at^2$$
$$v=at.$$

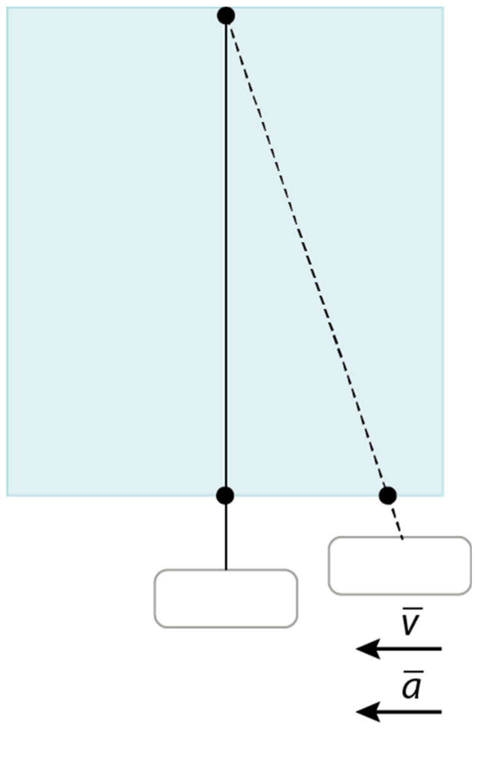
Ratkaistaan matkan yhtälöstä aika ja saadaan loppunopeudeksi

$$v=a\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{2sa}=\sqrt{\frac{2sm_2g}{m_1+m_2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}58\,\mathrm{m}\cdot 0{,}0042\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}455\,\mathrm{kg}+0{,}0042\,\mathrm{kg}}}=0{,}3226\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 0{,}32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Tehtävä 8.19.

Esimerkiksi:

a) Rakennetaan langasta ja pyyhekumista heiluri, joka kiinnitetään auton kattoon tai pystysuoraan asetettuun pahviin. Pahvin yläosaan tehdään pieni kolo, johon voidaan kiinnittää langan toinen pää. Laitetaan narun varassa oleva pyyhekumi roikkumaan vapaasti kolosta. Asetetaan pahvi autossa vaakasuoralle pinnalle. Merkitään pahviin langan kiinnityskohta sekä langan sijainti, kun auto on paikallaan. Kun autolla kiihdytetään, merkitään langan uusi paikka pahvin alareunaan. Piirretään merkittyjen pisteiden välille kolmio ja lasketaan, kuinka suuri on langan heilahduskulma.

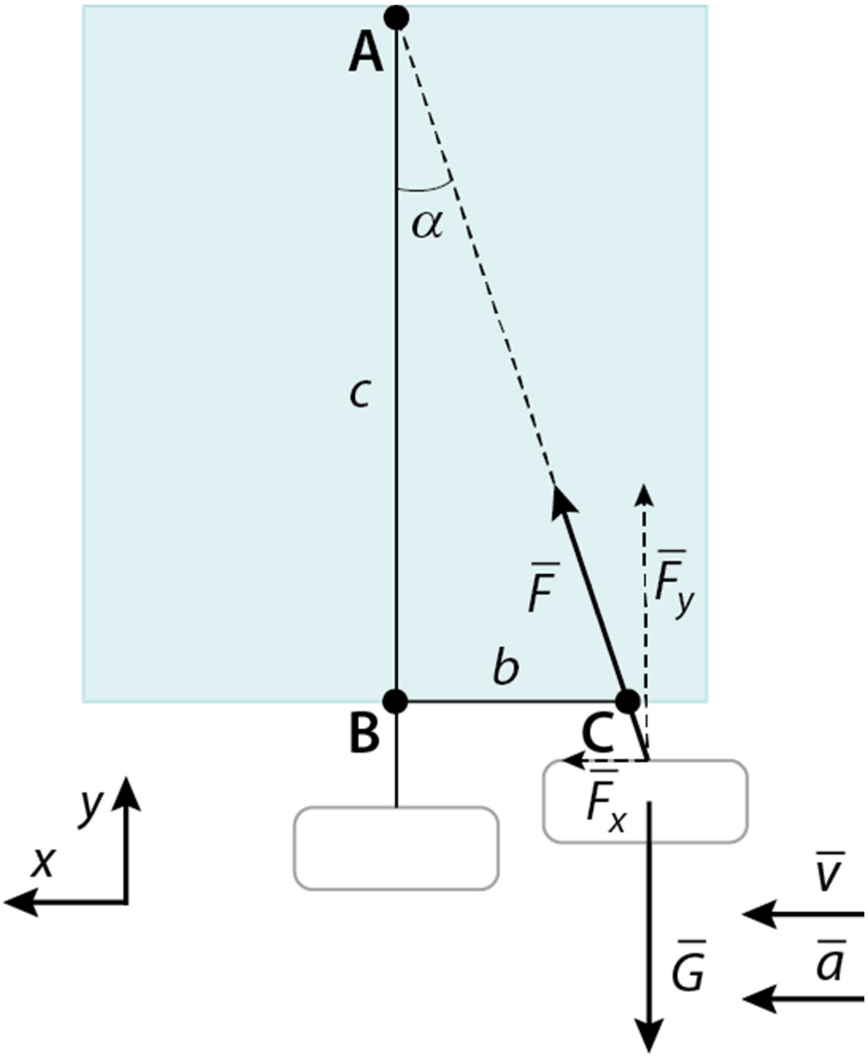


b) Koska heiluri oli kiinni autossa, heilurin ja auton kiihtyvyydet ovat samat. Tällöin Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$.

Vaakasuunnassa: $F_x = ma$

Pystysuunnassa: $F_y - G = 0$

Jaetaan vino voima komponentteihin.



$\overline{G}$ = kappaleen paino

$\overline{F}$ = langan jännitysvoima

$F_x = F \sin \alpha$

$F_y = F \cos \alpha$.

Voimien yhtälöiksi saadaan

$F\sin\alpha = ma$

$F\cos\alpha = mg.$

Jaetaan yhtälöt puolittain, jolloin

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{g}$ ja kiihtyvyydeksi saadaan

$a = g\tan\alpha.$

Kulma $\tan\alpha = \frac{b}{c}$ ja kulkuneuvon kiihtyvyys on

$a = g\frac{b}{c}.$

c) Kiihtyvyyden mittaamisen suuruus riippuu suureista

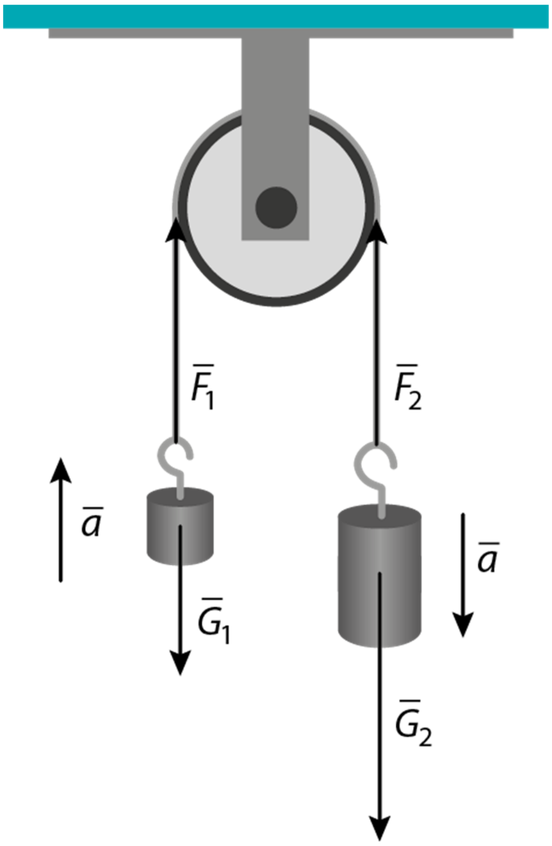
$a = g\frac{b}{c}$. Koska putoamiskiihtyvyys g on vakio, se ei vaikuta mittauksen virheeseen. Mittausvirheeseen vaikuttaa suureiden b ja c määrittäminen. Mitä pidempiä käytössä olevat pahvi ja lanka ovat, sitä pienempiä ovat suureiden b ja c määrittämisessä tehdyt virheet. Virhettä syntyy myös siinä, jos pahvi ei ole vaakasuorassa kulkuneuvon etenemissuuntaan nähden, jolloin pahviin muodostuva kolmio ei ole suorakulmainen.

Jos b:n ja c:n välinen kulma on suurempi kuin 90°, saatu kiihtyvyyden arvo on liian pieni, sillä b on pidempi kuin vaakasuoran tilanteen tapauksessa ja päinvastoin.

Narun ja pahvin välinen kitka pienentää maksimikiihtyvyyden arvoa, kun lanka heilahtaa kiihdytyksessä. Myös maksimikiihtyvyyden määrittämisessä eli pisteen C tarkassa piirtämisessä syntyy virhettä, joka vaikuttaa kiihtyvyyden suuruuteen.

Tehtävä 8.20.

a)



$\overline{F}_1 =$narun jännitysvoima

$\overline{F}_2 =$narun jännitysvoima

$\overline{G}_1 =$punnuksen 1 paino

$\overline{G}_2 =$punnuksen 2 paino

b) Tarkastellaan punnusten 1 ja 2 voimia Newtonin II lain mukaan pystysuunnassa. Valitaan punnuksen 1 positiiviseksi suunnaksi voiman F_1 suunta ja punnuksen 2 positiiviseksi suunnaksi G_2 suunta.

$$F_1 - G_1 = m_1 a_1$$
$$G_2 - F_2 = m_2 a_2.$$

Koska punnukset ovat kytkettynä toisiinsa, on punnuksilla sama kiihtyvyys ja sama nopeuden suuruus koko ajan. Molempiin punnuksiin kohdistuva narun jännitysvoima on yhtä suuri, $F_1 = F_2 = F$. Tällöin $a_1 = a_2 = a$ ja saadaan

$$F - m_1 g = m_1 a$$
$$m_2 g - F = m_2 a.$$

Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä F ja sijoitetaan se ylempään yhtälöön.

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g = m_1 a$$
$$m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a.$$

Punnusten kiihtyvyys on

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)} = \frac{(14{,}1\,\text{kg} - 8{,}4\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{8{,}4\,\text{kg} + 14{,}1\,\text{kg}} = 2{,}4852\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c) Narun jännitysvoima saadaan b-kohdan mukaan voimayhtälöstä

$$F - m_1 g = m_1 a$$

$$\begin{aligned} F &= m_1 a + m_1 g \\ &= m_1 \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)} + m_1 g \\ &= 8{,}4\,\text{kg} \cdot \frac{(14{,}1\,\text{kg} - 8{,}4\,\text{kg}) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{14{,}1\,\text{kg}+8{,}4\,\text{kg}} + 8{,}4\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ &= 103{,}27968\,\text{N} \approx 100\,\text{N} \end{aligned}$$

Tehtävä 8.21.

Merkitään vaunun massaa m_1 ja punnuksen massaa m_2.

Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli voiman aiheuttama kiihtyvyys riippuu kiihdytettävän kappaleen massasta.

Kokeessa A punnuksen painon suuruinen voima aiheuttaa kiihtyvyyden vain vaunulle, jonka massa on m_1, mutta kokeessa B punnuksen paino kiihdyttää molempia kappaleita, eli yhteensä massaa $m_1 + m_2$. Koska massa on suurempi kokeessa B, jää kiihtyvyys siinä pienemmäksi.

Perustellaan tämä vielä kappaleiden liikeyhtälöiden avulla.

Kokeessa vaunun A Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_1\overline{a}_\text{A}$ eli $\overline{F} + \overline{G}_1 + \overline{N}_1 = m_1\overline{a}_\text{A}$.

Kun valitaan positiiviset suunnat oikealle ja ylös, on liikeyhtälö komponenttimuodossa

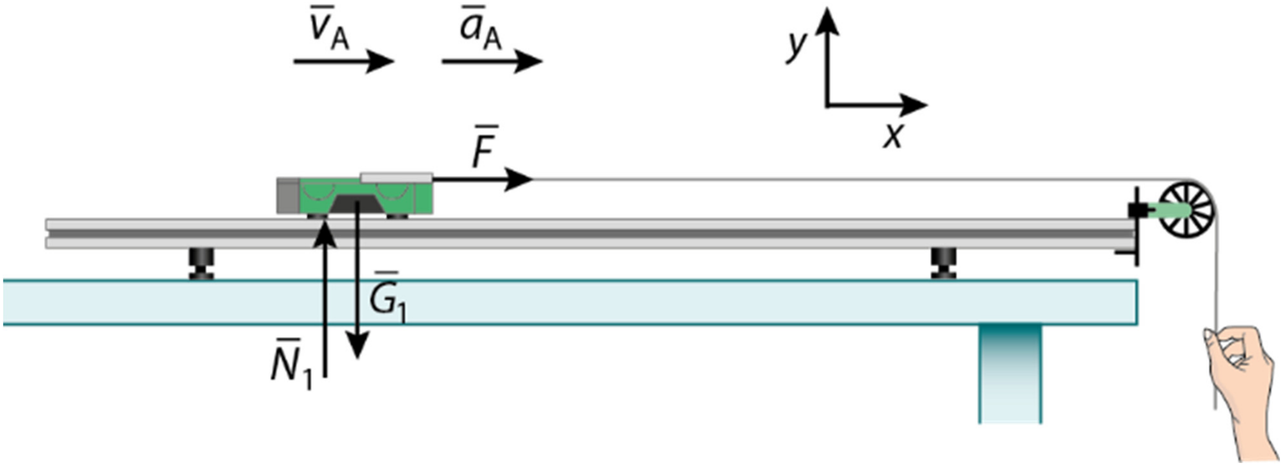
x: $F = m_1 a_\text{A}$

y: $N_1 - G_1 = 0$.

Vaunun kiihtyvyyden aiheuttaa vetävä voima, jonka suuruus on yhtä suuri kuin punnuksen paino eli

$a_\text{A} = \dfrac{F}{m_1} = \dfrac{G_2}{m_1} = \dfrac{m_2 g}{m_1}$.

Vaunun voimakuvio kokeessa A:



$\overline{G}_1$ = vaunun paino

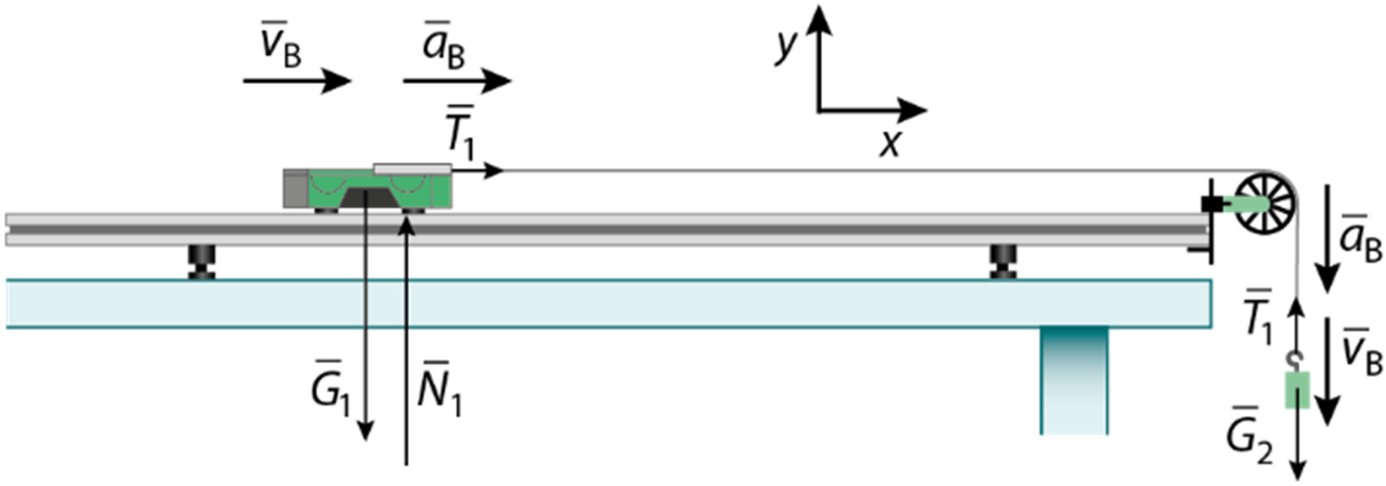
$\overline{N}_1$ = alustan tukivoima

$\overline{F}$ = voima, jolla vaunua vedetään

Kokeessa B on kaksi kappaletta, vaunu ja punnus. Koska vaunu ja punnus on kytketty toisiinsa, ne etenevät samalla nopeudella ja niillä on sama kiihtyvyys.

Tarkastellaan molempia erikseen, kirjoitetaan kappaleille Newtonin II lain mukaiset liikeyhtälöt ja piirretään voimakuviot.

Vaunun voimakuvio kokeessa B:



$\bar{G}_1$ = vaunun paino

$\bar{N}_1$ = alustan tukivoima

$\bar{T}_1$ = voima, jolla punnus vetää vaunua

$\bar{G}_2$ = punnuksen paino

$\bar{T}_2$ = voima, jolla vaunu vetää punnusta

Lanka välittää voimaa, joten voimat $\bar{T}_1$ ja $\bar{T}_2$ ovat yhtä suuria mutta vastakkaissuuntaisia voimia. Merkitään tätä langan välittämän voiman suuruutta T.

Vaunun liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = m_1 \bar{a}_B$ eli $\bar{T}_1 + \bar{G}_1 + \bar{N}_1 = m_1 \bar{a}_B$.

Kun valitaan positiiviset suunnat oikealle ja ylös, on vaunun liikeyhtälö komponenttimuodossa

x: $T = m_1 a_B$

y: $N_1 - G_1 = 0$.

Punnuksen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_2\overline{a}_{\mathrm{B}}$ eli $\overline{T}_2 + \overline{G}_2 = m_2\overline{a}_{\mathrm{B}}$.

Kun valitaan positiivinen suunta ylös, on punnuksen liikeyhtälö $T - G_2 = -m_2a_{\mathrm{B}}$.

Kun vaunun x-suunnan liikeyhtälö sijoitetaan punnuksen liikeyhtälöön, voidaan ratkaista systeemin kiihtyvyys.

$$\begin{cases} T = m_1a_{\mathrm{B}} \\ T - G_2 = -m_2a_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

$$m_1a_{\mathrm{B}} + m_2a_{\mathrm{B}} = m_2g$$

$$(m_1 + m_2)a_{\mathrm{B}} = m_2g$$

$$a_{\mathrm{B}} = \frac{m_2g}{m_1 + m_2}$$

Kiihtyvyyksiä vertailemalla havaitaan, että $\dfrac{m_2g}{m_1} > \dfrac{m_2g}{m_1 + m_2}$,

joten $a_{\mathrm{A}} > a_{\mathrm{B}}$.

Syvennä

Tehtävä 8.22.

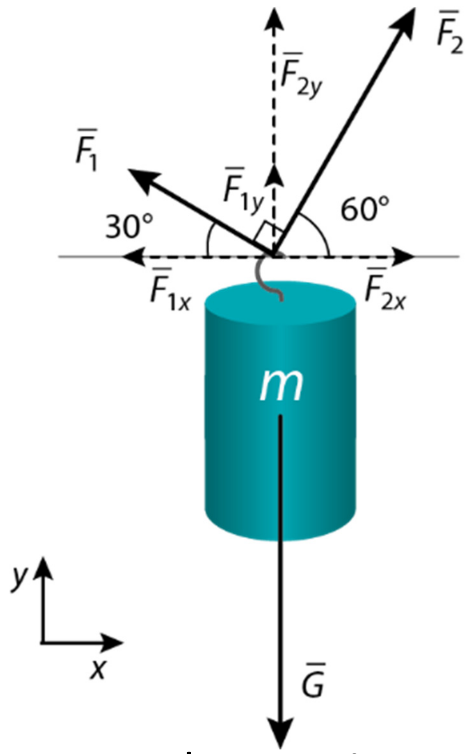
Punnuksen massa m = 500 g = 0,500 kg.

Kulmat α = 30° ja β = 60°.

Punnukseen vaikuttavat sen paino $\overline{G}$ sekä lankojen jännitysvoimat $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$. Jousivaa'at näyttävät lankojen jännitysvoimien suuruudet.

Piirretään punnuksen voimakuvio ja merkitään siihen langan jännitysvoiman *x*- ja *y*-suuntaiset komponentit.

Tehdään suuntasopimus, jossa suunnat oikealle ja ylös valitaan positiivisiksi suunniksi.



Kuvan perusteella voiman komponentit ovat:

$F_{1x} = F_1 \cos\alpha$

$F_{2x} = F_2 \cos\beta$

$F_{1y} = F_1 \sin\alpha$

$F_{2y} = F_2 \sin\beta$

$\overline{G}$ = punnuksen paino

$\overline{F}_1$ = langan jännitysvoima vasemmalle

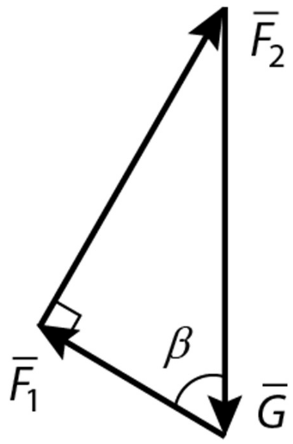
$\overline{F}_2$ = langan jännitysvoima oikealle

Koska punnus on paikallaan, siihen vaikuttava kokonaisvoima on nolla. Punnuksen Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Silloin vaakasuunnassa $F_{1x} = F_{2x}$ ja pystysuunnassa $F_{1y} + F_{2y} = G$

TAPA 1:

Punnukseen vaikuttavien voimien summa on nollavektori:



Voimien muodostamasta kolmiosta saadaan

$\frac{F_1}{G} = \cos\beta$ eli

$$F_1 = G\cos\beta = mg\cos\beta$$
$$= 0{,}500\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 60^\circ = 2{,}4525\,\text{N} \approx 2{,}5\,\text{N}$$

ja

$\frac{F_2}{G} = \sin\beta$ eli

$$F_2 = G\sin\beta = mg\sin\beta$$
$$= 0{,}500\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 60^\circ = 4{,}2479\,\text{N} \approx 4{,}2\,\text{N}.$$

Vasemmanpuoleisen jousivaa'an lukema on 2,5 N ja oikeanpuoleisen 4,2 N.

TAPA 2:

Kirjoitetaan liikeyhtälöt *x*- ja *y*-suunnissa

$$F_{2x} - F_{1x} = 0$$
$$F_{2y} + F_{1y} - G = 0$$

Vaaka- eli *x*-suunnassa

$$F_{2x} = F_{1x}$$
$$F_2 \cos\beta = F_1 \cos\alpha$$
$$F_2 = \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta}$$

Pysty- eli *y*-suunnassa

$$F_{2y} + F_{1y} = G$$
$$F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta = G$$

Sijoitetaan pystysuunnan yhtälöön vaakasuunnan yhtälöstä ratkaistu voima F_2, ja sijoitetaan siihen annetut arvot.

$$F_1 \sin\alpha + \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta} \sin\beta = G$$

$$F_1 (\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \sin\beta) = G$$

$$F_1 = \frac{G}{\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta} = \frac{0{,}500\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sin 30^\circ + \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}\sin 60^\circ} = 2{,}4525\,\text{N} \approx 2{,}5\,\text{N}$$

Ratkaistaan voima F_2

$$F_2 = \frac{F_1 \cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{2{,}4525\,\mathrm{N}\cdot\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 4{,}2479\,\mathrm{N} \approx 4{,}2\,\mathrm{N}.$$

Vasemmanpuoleisen jousivaa’an lukema on 2,5 N ja oikeanpuoleisen 4,2 N.

Tehtävä 8.23.

a) Hämähäkin seitti rakentuu fibroosiproteiinista, ja lanka syntyy hämähäkin kehruurauhasissa.

b) Hämähäkin seitti on kestävää ja se kestää hyvin venytystä. Hämähäkin seitin kaltaisesta materiaalista voitaisiin valmistaa esimerkiksi erittäin kestäviä köysiä, luodinkestäviä vaatteita, kilpa-autoja tai keinotekoisia ihmisten jänteitä.

c) Langan myötöjännitysraja σ = 1 GPa
Langan halkaisija $d = 1 \cdot 10^{-6}$ m

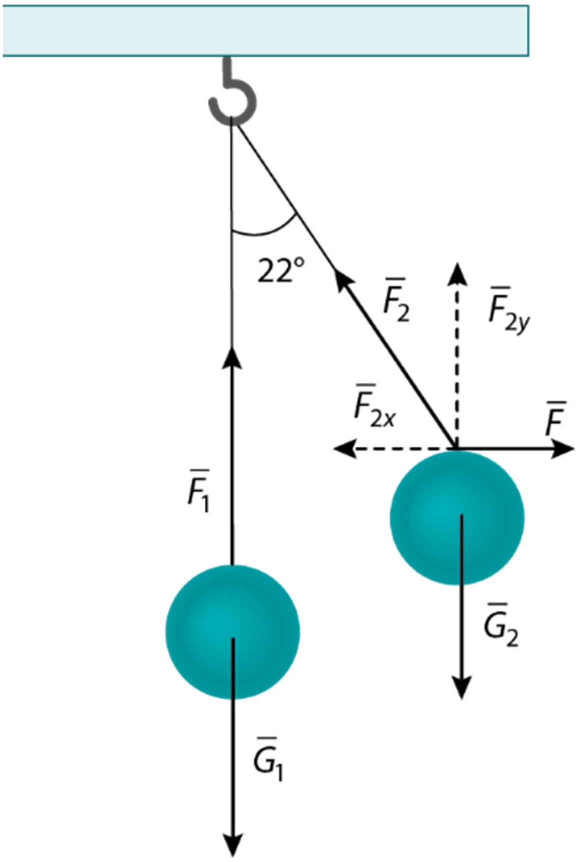
Myötöjännitysraja on suurin venytys, joka lankaan voidaan kohdistaa niin, että lanka palautuu alkuperäiseen muotoonsa. Venytys määritellään voiman ja pinta-alan suhteena

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$F = \sigma A = \sigma \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1 \cdot 10^9\,\text{Pa} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^{-6}\,\text{m}}{2}\right)^2 = 7{,}854 \cdot 10^{-4}\,\text{N} \approx 0{,}8\,\text{mN}.$$

Tehtävä 8.24.

a)



$\overline{F}_1$ = punnukseen 1 kohdistuva langan jännitysvoima

$\overline{F}_2$ = punnukseen 2 kohdistuva langan jännitysvoima

$\overline{F}$ = punnukseen 2 kohdennettu voima

$\overline{G}_1$ = punnuksen 1 paino

$\overline{G}_2$ = punnuksen 2 paino

Pisteet:

- kappaleeseen 1 vaikuttavat voimat ja yhtä pitkinä (1 p)
- kappaleeseen 2 vaikuttavat voimat (3 p)
- pistevähennykset: jos narussa vaikuttavat voimat eri pituiset (–1 p), jos vaakasuuntaiset voimat ovat eri pituiset (–1 p)

b) Tarkastellaan punnusta, joka roikkuu vinon narun varassa. Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$, kun punnus on paikoillaan. Tarkastellaan vaaka- ja pystysuuntaisia voimia ja voimien komponentteja

x: $F - F_{2x} = 0$

y: $F_{2y} - G_2 = 0$ (1 p)

Tarkastellaan vinojen voimien komponentteja kulmien avulla

$$F_{2x} = F_2 \sin\alpha$$
$$F_{2y} = F_2 \cos\alpha.$$
(1 p)

Sijoitetaan komponentit yhtälöihin

$$F = F_2 \sin\alpha$$
$$m_2 g = F_2 \cos\alpha.$$
(1 p)

Jaetaan yhtälöt puolittain ja saadaan

$$\frac{F}{m_2 g}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

Tällöin voiman F suuruus on

$$F=m_2 g\tan\alpha=1{,}2\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\tan 22^\circ=4{,}7562\,\text{N}\approx 4{,}8\,\text{N}.\ (2\text{ p})$$

(TAI ratkaistaan alemmasta yhtälöstä F_2 ja sijoitetaan ylempään, jolloin

$$F=\frac{m_2 g\sin\alpha}{\cos\alpha}=m_2 g\tan\alpha.)$$

c) Kun punnus m_1 on paikoillaan, on Newtonin II mukaan $G_1 = F_1$.

Narussa vaikuttavat voimat F_1 ja F_2 ovat yhtä suuret voiman ja vastavoiman lain mukaan. (1 p)

Sijoitetaan b)-kohdan voiman F_2 saatu lauseke $F_2=\frac{m_2 g}{\cos\alpha}$, jolloin saadaan

$$G_1=F_1=F_2=\frac{m_2 g}{\cos\alpha}$$

$$m_1\cancel{g}=\frac{m_2\cancel{g}}{\cos\alpha}\quad (1\,\text{p.})$$

$$m_1=\frac{m_2}{\cos\alpha}=\frac{1{,}2\,\text{kg}}{\cos 22^\circ}=1{,}294\,\text{kg}\approx 1{,}3\,\text{kg}.\ (1\,\text{p.})$$

d) Massa m_2 ja voima F pysyvät vakiona. Jos pystysuorassa narussa roikkuvaan punnukseen lisätään punnus, kasvaa massa m_1 voiman yhtälöissä. b- ja c-kohdan mukaan saadaan voimayhtälö

$m_1 g = \dfrac{m_2 g}{\cos\alpha}$. (1 p)

(Massa m_1 on kääntäen verrannollinen termiin $\cos\alpha$, $m_1 \sim \dfrac{1}{\cos\alpha}$.)

Kun m_1 kasvaa, termi $\cos\alpha$ pienenee. (1 p) Tällöin myös kulma α pienenee (ja punnus m_1 siirtyy vähän alaspäin ja punnus m_2 ylöspäin.) (1 p)