

# 14. Törmäykset

## Tehtävät

## Harjoittele

### Tehtävä 14.1.

Väittämät a), b), d) ja e) ovat oikein.

Korjaukset väittämiin:

- c) Heittotilannetta voidaan mallintaa liikemäärän säilymisen avulla. Koska liikemäärä on ennen pallon heittoa nolla, pitää pallon ja heittäjän liikemäärävektorien olla vastakkaissuuntaiset, jotta kokonaisliikemäärä pysyy nollana heiton jälkeenkin.
- f) Jos kappaleen lämpötila nousee törmäyksen takia, osa kappaleen alkuperäisestä liike-energiasta on muuntunut lämmöksi, joka ei palaudu kappaleen liike-energiaksi törmäyksen jälkeen. Kappaleen liike-energia siis pienenee törmäyksessä, ja siksi törmäys ei ole täysin kimmoisa.

## Tehtävä 14.2.

Kuntopallon massa  $m_1 = 3,0 \text{ kg}$

Kuntopallon nopeus  $v_1 = 6,1 \text{ m/s}$

Opiskelijan massa  $m_2 = 71 \text{ kg}$

Newtonin III lain eli voiman ja vastavoiman lain mukaan kahden kappaleen vuorovaikutustilanteessa kappaleet vaikuttavat toisiinsa yhtä suurilla, mutta vastakkaissuuntaisilla voimilla. Vuorovaikutustilanteessa voiman ja vastavoiman kappaleisiin aiheuttamat impulssit ovat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset. Opiskelija lähtee liikkeelle vastakkaiseen suuntaan kuin kuntopallo.

Impulssiperiaatteen mukaan impulssi yhtä suuri kuin kappaleen liikemäärän muutos.

$$I_1 - I_2 = 0$$

$$I_1 = I_2$$

$$\Delta p_1 = \Delta p_2$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Opiskelijan nopeus on

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{3,0 \text{ kg} \cdot 6,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{71 \text{ kg}} = 0,2577 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Opiskelija liikkuu vastakkaiseen suuntaan kuin kuntopallo nopeudella  $0,26 \text{ m/s}$ .

### Tehtävä 14.3.

Soutajan massa  $m_1 = 85 \text{ kg}$

Soutajan nopeus  $v_1 = 4,0 \text{ m/s}$

Veneen massa  $m_2 = 115 \text{ kg}$

Soutajan ja veneen nopeus lopuksi  $u$

Mallinnetaan tilannetta kimmottomana törmäyksenä. Oletetaan, että ulkoisten voimien vaikutus on mitätön. Liikemäärän säilymislain mukaan  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopuksa}}$ .

Valitaan soutajan ja veneen etenemissuunta positiiviseksi suunnaksi.

Alkutilanteessa veneen liikemäärä on nolla, ja ainoastaan soutajalla on liikemäärä,  $p_{\text{alussa}} = m_1 v_1$ .

Törmäyksen jälkeen vene ja soutaja liikkuvat yhdessä, ja niillä on yhteinen liikemäärä,  $p_{\text{lopuksa}} = (m_1 + m_2)u$ .

Liikemäärä säilyy ja sen perusteella saadaan veneen nopeus

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$$

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{85 \text{ kg} \cdot 4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{85 \text{ kg} + 115 \text{ kg}} = 1,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Soutaja ja vene etenevät lopuksi nopeudella  $1,7 \text{ m/s}$ .

## Tehtävä 14.4.

Kanahaukan nopeus alussa  $v = 14 \text{ m/s}$

Kanahaukan ja peltopyyn nopeus törmäyksen jälkeen  
 $u = 9,3 \text{ m/s}$

Peltopyyn massa  $m_2 = 490 \text{ g}$

Kanahaukan massa  $m_1$

Tarkastellaan tilannetta kimmottomana törmäyksenä. Oletetaan, että ulkoisten voimien vaikutus on mitätön. Törmäyksessä liikemäärä säilyy,  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$ . Alussa liikemäärää on vain haukalla, iskun jälkeen linnut jatkavat liikettä yhdessä. Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi suunnaksi.

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u$$

$$m_1 v = m_1 u + m_2 u$$

$$m_1 v - m_1 u = m_2 u$$

$$m_1 (v - u) = m_2 u$$

Kanahaukan massa on

$$m_1 = \frac{m_2 u}{v - u} = \frac{0,49 \text{ kg} \cdot 9,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{14 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,96957 \text{ kg} \approx 970 \text{ g}.$$

## Tehtävä 14.5.

Maalivahdin massa  $m_1 = 77 \text{ kg}$

Jalkapallon massa  $m_2 = 430 \text{ g} = 0,43 \text{ kg}$

Jalkapallon nopeus  $v_2 = 19 \text{ m/s}$

Maalivahdin nopeus  $v_1$

Maalivahti ja jalkapallo pysähtyvät, kun maalivahdin ja pallon nopeus lopuksi on  $u = 0$ .

Oletetaan, että jalkapallon ja maalivahdin muodostavaan systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia. Mallinnetaan tilannetta kimmottomana törmäyksenä, jossa liikemäärä säilyy.

Alkutilanteessa jalkapallo ja maalivahti liikkuvat vastakkaisiin suuntiin liikemäärällä

$$\bar{p}_{\text{alussa}} = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2.$$

Rajatapauksessa törmäyksessä jalkapallo ja maalivahti pysähtyvät,  $\bar{p}_{\text{lopussa}} = \bar{0}$ .

Liikemäärän säilymislain mukaan  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$ .

Kun maalivahdin etenemissuunta valitaan positiiviseksi suunnaksi, saadaan maalivahdin nopeudeksi liikemäärän säilymislain mukaan

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1} = \frac{0,43 \text{ kg} \cdot 19 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{77 \text{ kg}} = 0,106104 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,11 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Maalivahti ei liiku pallon osumasta taaksepäin, kun maalivahti hyppää vähintään nopeudella 0,11 m/s eteenpäin.

## Tehtävä 14.6.

Ulkoiluttajan massa  $m_1 = 75 \text{ kg}$

Ulkoiluttajan nopeus  $v_1 = 1,4 \text{ m/s}$

Koiran massa  $m_2 = 25 \text{ kg}$

Koiran nopeus  $v_2 = 5,7 \text{ m/s}$

Koiran ulkoiluttajan ja koiran nopeus lopuksi  $u$

Oletetaan, että ulkoiluttajan ja koiran muodostamaan systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia, jolloin tilannetta voidaan mallintaa kimmottomana törmäyksenä, jossa liikemäärä säilyy.

Liikemäärän säilymislain mukaan  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$ .

Valitaan koiran ja ulkoiluttajan etenemissuunta positiiviseksi suunnaksi.

Aluksi liikemäärä on  $p_{\text{alussa}} = m_1 v_1 + m_2 v_2$ .

Lopuksi ulkoiluttajalla ja koiralla on yhteinen liikemäärä  $p_{\text{lopussa}} = (m_1 + m_2)u$ .

Liikemäärän säilymislaista saadaan

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Koira ja ulkoiluttaja liikkuvat nopeudella

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{75 \text{ kg} \cdot 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 25 \text{ kg} \cdot 5,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{75 \text{ kg} + 25 \text{ kg}} = 2,475 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Koira ja ulkoiluttaja liikkuvat talutushihnan kiristymisen jälkeen eteenpäin nopeudella 2,5 m/s.

## Tehtävä 14.7.

- a) Kun kaksi saman massaista kuulaa törmää toisiinsa kimmoisasti, kuulien nopeudet muuttuvat. Kuulien liikesuunnat ja niiden nopeuksien suuruudet vaihtuvat.
- b) Kun kevyempi kuula törmää kimmoisasti paikallaan olevaan painavampaan kuulaan, painavampi kuula lähtee liikkeelle kevyemmän kuulan alkunopeutta pienemmällä nopeudella. Kevyempi kuula kimpoaa takaisin päin alkuperäiseen nopeuteen verrattuna pienemmällä nopeudella.
- c) Kuulat pysähtyvät törmäyksessä, jos niillä on yhtä suuri mutta vastakkaisuuntainen nopeus ja törmäyksessä säilyy 0 % liike-energiasta.
- d) Jos törmäys on kimmoisa, eli liike-energia säilyy törmäyksessä, alkutilanteessa liikkunut ensimmäinen kuula pysähtyy ja toinen kuula alkaa liikkua ensimmäisen kuulan alkunopeudella. Jos liike-energia ei säily törmäyksessä, paikallaan ollut kuula lähtee ensimmäisen kuulan nopeutta pienemmällä nopeudella liikkeelle. Ensimmäisen kuulan nopeus pienenee, mutta kuula ei pysähdy.

## Tehtävä 14.8.

Kalastajan massa  $m_1 = 67$  kg

Veneen massa  $m_2 = 820$  kg

Kalastajan nopeus hypyn jälkeen  $u_1 = 1,8$  m/s

Veneen ja kalastajan nopeus alussa  $v = 0,36$  m/s

Veneen nopeus lopussa  $u_2$

Oletetaan, että veneen ja kalastajan liiketilaa ei tilanteessa muuta mikään muu voima kuin kalastajan hyppyyn liittyvät voimat. Silloin liikemäärä säilyy, kun kalastaja hyppää veneestä pois,  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$ .

Valitaan veneen ja kalastajan etenemissuunta positiiviseksi suunnaksi.

Alkutilanteessa veneellä ja kalastajalla on yhteinen liikemäärä  $p_{\text{alussa}} = (m_1 + m_2)v$ .

Hypyn jälkeen kalastajan ja veneen liikemäärä on  $p_{\text{lopussa}} = m_1u_1 + m_2u_2$ .

Kirjoitetaan liikemäärän säilymislain mukainen yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä veneen nopeus hypyn jälkeen.

$$(m_1 + m_2)v = m_1u_1 + m_2u_2$$

$$u_2 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1u_1}{m_2}$$

$$= \frac{(67 \text{ kg} + 820 \text{ kg}) \cdot 0,36 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 67 \text{ kg} \cdot 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{820 \text{ kg}} = 0,2423 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vene liikkuu hypyn jälkeen nopeudella  $u_2 = 0,24 \text{ m/s}$  alkuperäiseen suuntaan.

# Sovella

## Tehtävä 14.9.

### Törmäys 1

Vaunujen massat ovat yhtä suuret. Kun liikkuva vaunu törmää saman massaiseen paikalla olevaan vaunuun ja ne jatkavat yhdessä törmäyksen jälkeen, vaunujen nopeus törmäyksen jälkeen on pienempi kuin ennen törmäystä.

### Törmäys 2

Tilanne on sama kuin törmäyksessä 1, mutta vaunun 2 massa on suurempi. Tällöin vaunut liikkuvat törmäyksen jälkeen vielä pienemmällä nopeudella kuin törmäyksen 1 jälkeen.

### Törmäys 3

Tilanteessa vaunut jatkavat erillään törmäyksen jälkeen. Jos saman massainen vaunu törmää paikalla olevaan saman massaiseen vaunuun, aluksi liikkuva vaunu jää paikoilleen ja aluksi paikallaan oleva vaunu lähtee samalla nopeudella kuin siihen törmännyt vaunu.

## Törmäys 4

Kun saman massaiset vaunut törmäävät toisiinsa eri nopeuksilla, törmäyksen jälkeen vaunujen nopeudet ovat toistensa nopeuden suuruiset. Vaunut lähtevät törmäyksen jälkeen vastakkaiseen suuntaan, mistä ne tulivat ennen törmäystä.

## Törmäys 5

Kun pienempi massainen vaunu törmää paikallaan olevaan suurempi massaiseen vaunuun, suurempi massainen vaunu lähtee alkuperäisen vaunun suuntaan pienemmällä nopeudella kuin siihen törmännyt vaunu. Alun perin liikkeessä olevan vaunun nopeuden suunta muuttuu päinvastaiseksi ja nopeus pienenee.

## Törmäys 6

Kun suurempi massainen vaunu törmää paikallaan olevaan pienempi massaiseen vaunuun, molemmat vaunut liikkuvat samaan suuntaan kuin aluksi liikkuva suurempi massainen vaunu. Pienempi massaisen vaunun nopeus törmäyksen jälkeen on suurempi ja suurempi massaisen vaunun pienempi, kuin ennen törmäystä liikkuvan suurempi massaisen vaunun nopeus.

## Tehtävä 14.10.

Mustekalan massa  $m_1 = 7,2 \text{ kg}$

Veden massa  $m_2 = 1,45 \text{ kg}$

a) Veden nopeus  $v_2 = 2,5 \text{ m/s}$

Tarkastellaan mustekalaa ja sen suihkuttamaa vettä, ja oletetaan, että ulkoiset voimat eivät vaikuta tilanteeseen. Kun mustekala suihkuttaa vettä, on liikemäärän säilymislain mukaan,  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopus}}.$

Alussa liikemäärä on nolla, ja lopussa liikemäärä on summa mustekalan ja suihkutetun veden liikemääristä, jotka ovat vastakkaisiin suuntiin.

Suunnat huomioituna

$$0 = p_1 - p_2$$

$$0 = (m_1 - m_2)v_1 - m_2v_2.$$

Mustekalan nopeus suihkutuksen jälkeen

$$v_1 = \frac{m_2v_2}{m_1 - m_2} = \frac{1,45 \text{ kg} \cdot 2,5 \text{ m/s}}{7,2 \text{ kg} - 1,45 \text{ kg}} = 0,6304 \text{ m/s} \approx 0,63 \text{ m/s}.$$

b) Mustekalan liike-energia suihkutuksen jälkeen a-kohdan tuloksen mukaan

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (7,2 \text{ kg} - 1,45 \text{ kg}) \cdot (0,6304 \text{ m/s})^2 = 1,1426 \text{ J} \approx 1,1 \text{ J}.$$

c) Veden suihkutusaika  $\Delta t = 0,130 \text{ s}$

Impulssiperiaatteen mukaan voiman aiheuttama impulssi on yhtä suuri kuin mustekalan liikemäärän muutos. Koska mustekala on aluksi paikoillaan, on

$$I = \Delta p$$

$$F\Delta t = \Delta mv$$

$$F\Delta t = mv.$$

Keskimääräinen voima suihkutuksen aikana on a-kohdan nopeuden avulla

$$F = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{(7,2 \text{ kg} - 1,45 \text{ kg}) \cdot 0,6304 \text{ m/s}}{0,130 \text{ s}} = 27,88 \text{ N} \approx 28 \text{ N}.$$

## Tehtävä 14.11.

Punaisen auton nopeus alussa  $v_1 = 2,1$  m/s

Sinisen auton nopeus alussa  $v_2 = 1,1$  m/s

Punaisen auton nopeus lopussa  $u_1 = 0,21$  m/s

Punaisen auton massa  $m_1 = 1640$  kg

Sinisen auton massa  $m_2 = 1320$  kg

- a) Joustopuskurit lisäävät törmäysaikaa. Törmäyksessä voiman impulssi  $I = F\Delta t$ . Kun törmäysaika pitenee  $\Delta t$ , joustopuskurit pienentävät törmäyksessä vaikuttavaa voimaa  $F$ .

b) Oletetaan, että ulkoisten voimien vaikutus on törmäyksessä olematon, jolloin törmäyksessä liikemäärä säilyy,  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$ . Valitaan punaisen auton alkunopeus positiiviseksi suunnaksi

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Sinisen auton nopeus törmäyksen jälkeen

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2 - m_1 u_1}{m_2} \\ &= \frac{1640 \text{ kg} \cdot 2,1 \text{ m/s} - 1320 \text{ kg} \cdot 1,1 \text{ m/s} - 1640 \text{ kg} \cdot 0,21 \text{ m/s}}{1320 \text{ kg}} \\ &= 1,2481 \text{ m/s} \approx 1,2 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Koska nopeus on positiivinen, sininen auto liikkuu törmäyksen jälkeen punaisen auton suuntaan.

### c) Liike-energian muutos

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= \Sigma E_{k,l} - \Sigma E_{k,a} \\ &= \frac{1}{2}m_2u_2^2 + \frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_2u_2^2 + m_1u_1^2 - m_2v_2^2 - m_1v_1^2) \\ &= \frac{1}{2}(1320 \text{ kg} \cdot \left(1,2481 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 1640 \text{ kg} \cdot \left(0,21 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ &\quad - 1320 \text{ kg} \cdot \left(1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 1640 \text{ kg} \cdot \left(2,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2) \\ &= -3350,5 \text{ J} \approx -3,4 \text{ kJ}.\end{aligned}$$

Liike-energia pieneni 3,4 kJ.

## Tehtävä 14.12.

- a) Luodin nopeus määritetään ballistisella heilurilla ampumalla luoti paljon luotia painavampaan kappaleeseen, esimerkiksi puupalikkaan. Painava kappale roikkuu paikallaan. Törmäyksessä luoti tarttuu kappaleeseen ja liikemäärä säilyy. Kappaleen ja luodin heilahduskorkeus kertoo systeemin mekaanisen energian suuruuden. Mekaanisen energian suuruudesta voidaan laskea kappaleen nopeus törmäyksen jälkeen. Törmäyksen jälkeisestä nopeudesta voidaan edelleen laskea liikemäärän säilymislain avulla luodin alkunopeus.

- b) Luodin massa  $m = 2,65 \text{ g} = 0,00265 \text{ kg}$   
Esimerkiksi palikan massalla  $M = 0,50 \text{ kg}$   
heilahduskorkeus on  $h = 0,15 \text{ m}$ .

Palikan ja luodin yhteinen potentiaalienergia on heilahduksen ääriasennossa yhtä suuri kuin systeemin liike-energia heti törmäyksen jälkeen.

$$(M + m)gh = \frac{1}{2}(M + m)u^2$$

Yhtälöstä voidaan ratkaista törmäyksen jälkeinen nopeus

$$u = \sqrt{\frac{2(M + m)gh}{M + m}} = \sqrt{2gh}.$$

Palikka on aluksi paikallaan, joten liikemäärän säilyminen voidaan esittää yhtälöllä

$$mv = (M + m)u,$$

joten luodin nopeus ennen törmäystä oli

$$\begin{aligned} v &= \frac{(M + m)u}{m} = \frac{(M + m)\sqrt{2gh}}{m} \\ &= \frac{(0,50 \text{ kg} + 0,00265 \text{ kg})\sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,15 \text{ m}}}{0,00265 \text{ kg}} \\ &= 325,39805 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

## Tehtävä 14.13.

Opiskelijan nopeus  $v_1 = 6,3 \text{ m/s}$

Opiskelijan massa  $m_1 = 58 \text{ kg}$

Pikkusisaren ja kelkan yhteismassa

$$m_2 = 32 \text{ kg} + 8,5 \text{ kg} = 40,5 \text{ kg}$$

Kelkan ja tien välinen liukukitkakerroin  $\mu = 0,14$

- a) Opiskelijan hyppyä kelkan kyytiin voidaan tarkastella kimmottomana törmäyksenä, jossa ulkoisten voimien vaikutus on hyvin vähäinen.

Törmäyksessä liikemäärä säilyy,  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopusssa}}$ . Kelkan nopeus aluksi on nolla, jolloin myös liikemäärä on nolla. Valitaan opiskelijan alkunopeuden suunta positiiviseksi

$$p_1 + p_2 = p_3$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v.$$

Kelkan ja henkilöiden nopeus hypyn jälkeen on

$$v = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{58 \text{ kg} \cdot 6,3 \text{ m/s}}{58 \text{ kg} + 40,5 \text{ kg}} = 3,7096 \text{ m/s} \approx 3,7 \text{ m/s}.$$

b) Kelkan liike-energia liikkeelle lähdön jälkeen ja a)-kohdan mukaan

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2v_1^2}{m_1 + m_2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(58\text{ kg})^2(6,3\text{ m/s})^2}{(58\text{ kg} + 40,5\text{ kg})} = 677,75\text{ J} \approx 680\text{ J}.$$

c) Kun kelkkailija liikuu vaakasuoralla tiellä ja pysähtyy loppunopeuden ollessa nolla, on työperiaatteen mukaan liike-energian muutos yhtä suuri kuin kitkan tekemä työ

$$W = \Delta E_k = E_{k,a}$$

$$F_\mu s = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kun kelkka liikuu vaakasuoralla alustalla, on  $N = G = mg$  ja kitkalle on voimassa  $F_\mu = \mu N$ . Liukumismatka on

$$s = \frac{mv^2}{2F_\mu} = \frac{mv^2}{2\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{(3,7096 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0,14 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 5,00998 \text{ m} \approx 5,0 \text{ m}.$$

TAI

$$W = \Delta E_k = E_{ka}$$

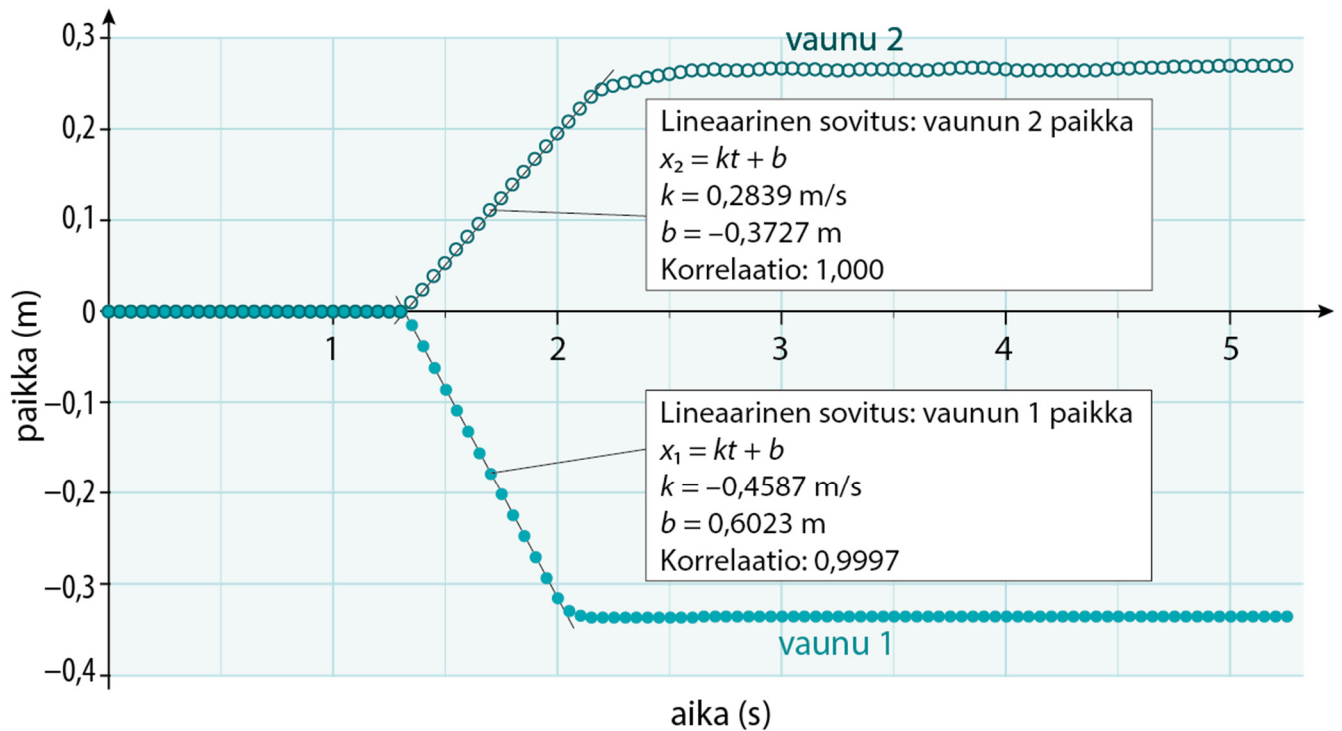
$$F_\mu s = E_{ka}$$

a- ja b-kohdan mukaan ja kun kelkka liikuu vaakasuoralla alustalla, on  $N = G = mg$  ja kitkalle on voimassa  $F_\mu = \mu N$ . Liukumismatka on

$$s = \frac{E_k}{\mu mg}$$

## Tehtävä 14.15.

a)



Vaunun 1 nopeus on  $v_1 = -0,4587 \text{ m/s} \approx -0,46 \text{ m/s}$ .

Vaunun 2 nopeus on  $v_2 = 0,2839 \text{ m/s} \approx 0,28 \text{ m/s}$ .

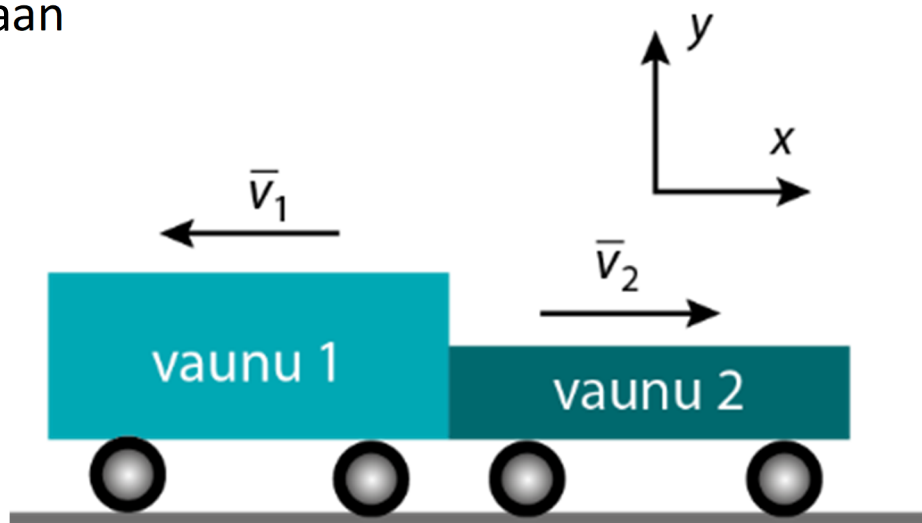
Vaunut liikkuvat vastakkaisiin suuntiin, mikä näkyy nopeuden etumerkeissä.

b) Vaunun 1 massa  $m_1 = 567 \text{ g}$

Vaunuradalla ulkoiset voimat ovat häviävän pienet.

Tilanteessa liikemäärä säilyy,  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopus}}.$  Alussa vaunut olivat paikoillaan, jolloin vaunujen liikemäärien summa on nolla. Lopussa vaunut kulkevat eri suuntiin.

Liikemäärien summa on edelleen nolla. Sovitaan vaunun 2 nopeus positiiviseksi. Liikemäärän säilymislain mukaan



$$0 = -p_1 + p_2$$

$$0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Vaunujen nopeudet saadaan a)-kohdan mukaan.

Käytetään arvoja ilman suuntia ilmaisevia etumerkkejä, sillä suunnat on huomioitu jo liikemäärissä. Vaunun 2 massa on

$$m_2 = \frac{m_1 v_1}{v_2} = \frac{567 \text{ g} \cdot 0,4587 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,2839 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 916,107 \text{ g} \approx 916 \text{ g}.$$

c) Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella. Valitaan potentiaalienergian nolatasoksi vaunun taso. Näin ollen potentiaalienergia ei tilanteessa muutu lainkaan.

$$E_{ka1} + E_{ka2} + W = E_{kl1} + E_{kl2}.$$

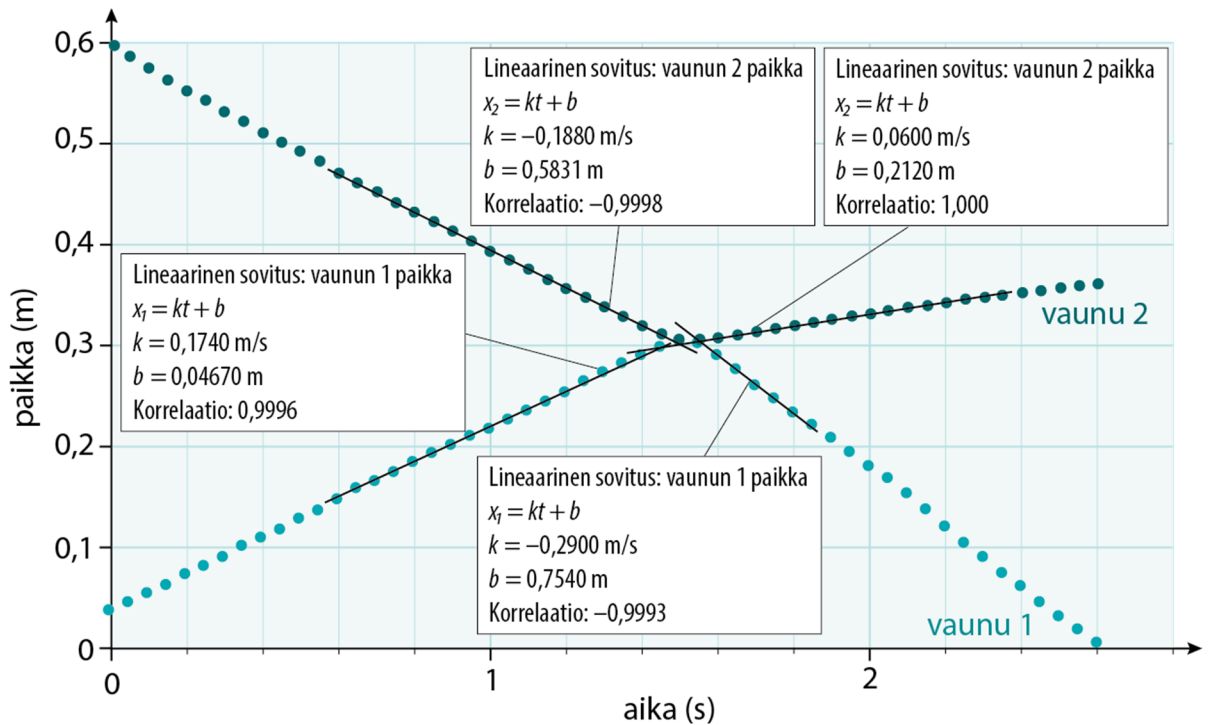
Koska vaunut ovat alussa paikoillaan,  $E_{ka1} = 0$  ja  $E_{ka2} = 0$ .

Jousen aiheuttaman voiman tekemäksi työksi saadaan

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (0,567 \text{ kg} \cdot \left(0,4587 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 0,916107 \text{ kg} \cdot \left(0,2839 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2) \\ &= 0,09656876 \text{ J} \approx 96,6 \text{ mJ}. \end{aligned}$$

## Tehtävä 14.16.

a) Nopeus saadaan  $(t, x)$ -koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta. Määritetään vaunujen nopeudet ennen ja jälkeen törmäyksen.



Vaunun 1 nopeus ennen törmäystä  $v_1 = 0,174$  m/s

Vaunun 2 nopeus ennen törmäystä  $v_2 = -0,188$  m/s

Vaunun 1 nopeus törmäyksen jälkeen  $u_1 = -0,290$  m/s

Vaunun 2 nopeus törmäyksen jälkeen  $u_2 = 0,060$  m/s

b) Vaunun 1 massa  $m_1 = 0,606 \text{ kg}$

Vaunun 2 massa  $m_2 = 1,126 \text{ kg}$

Kimmoisassa törmäyksessä liikemäärä ja liike-energia säilyvät. Siten ennusteen mukaan vaunujen kokonaisliikemäärä ja kokonaisliike-energia ovat samat ennen ja jälkeen törmäyksen.

Määritetään liikemäärien ja liike-energioiden summat ennen ja jälkeen törmäyksen. Liikemäärien summa ennen törmäystä, kun vaunun 1 suunta on positiivinen

$$\begin{aligned}\Sigma p_a &= m_1 v_1 - m_2 v_2 \\ &= 0,606 \text{ kg} \cdot 0,174 \text{ m/s} - 1,126 \text{ kg} \cdot 0,188 \text{ m/s} \\ &= -0,106244 \text{ kgm/s} \approx -0,11 \text{ kgm/s}.\end{aligned}$$

Liikemäärä törmäyksen jälkeen edellinen suunta huomioiden

$$\begin{aligned}\Sigma p_i &= -m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ &= -0,606 \text{ kg} \cdot 0,290 \text{ m/s} - 1,126 \text{ kg} \cdot 0,060 \text{ m/s} \\ &= -0,10818 \text{ kgm/s} \approx -0,11 \text{ kgm/s}.\end{aligned}$$

## Liike-energia ennen törmäystä

$$\begin{aligned}\Delta E_{k,a} &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,606 \text{ kg} \cdot (0,174 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,126 \text{ kg} \cdot (0,180 \text{ m/s})^2 \\ &= 0,0274148 \text{ J} \approx 27,4 \text{ mJ}.\end{aligned}$$

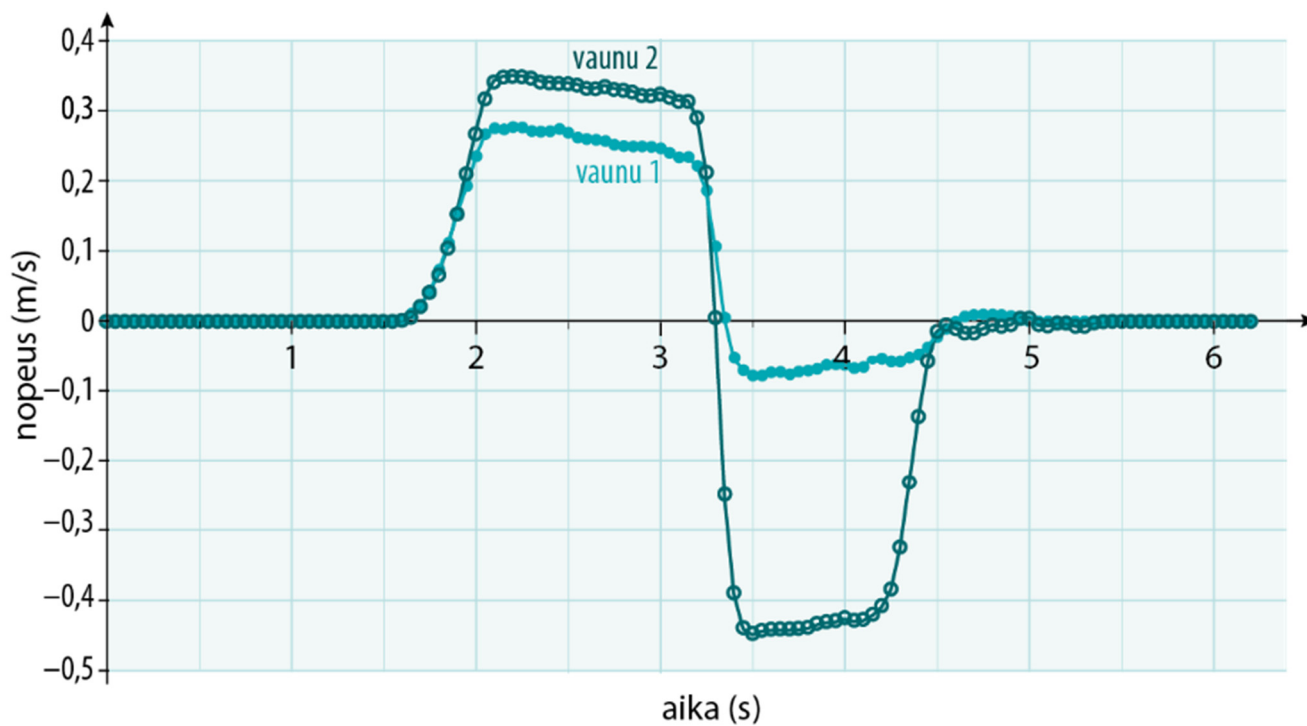
## Liike-energia törmäyksen jälkeen

$$\begin{aligned}\Delta E_{k,l} &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,606 \text{ kg} \cdot (0,290 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,126 \text{ kg} \cdot (0,060 \text{ m/s})^2 \\ &= 0,0275091 \text{ J} \approx 27,5 \text{ mJ}.\end{aligned}$$

Mittaustarkkuuden rajoissa liikemäärät ja liike-energiat ovat ennusteen mukaiset eli vaunujen liikemäärät ja liike-energiat säilyvät törmäyksessä.

## Tehtävä 14.17.

a)



b) Törmäys alkoi ajanhetkellä 3,16 s, koska silloin molempien vaunujen nopeudet alkoivat selvästi muuttua. Törmäys päättyi ajanhetkellä 3,5 s, sillä sen jälkeen nopeus ei juurikaan muuttunut tai muutos oli hyvin pientä. Määritetään vaunujen nopeudet ennen törmäystä kuvaajasta.

$$v_1 = 0,234 \text{ m/s} \approx 0,23 \text{ m/s}$$

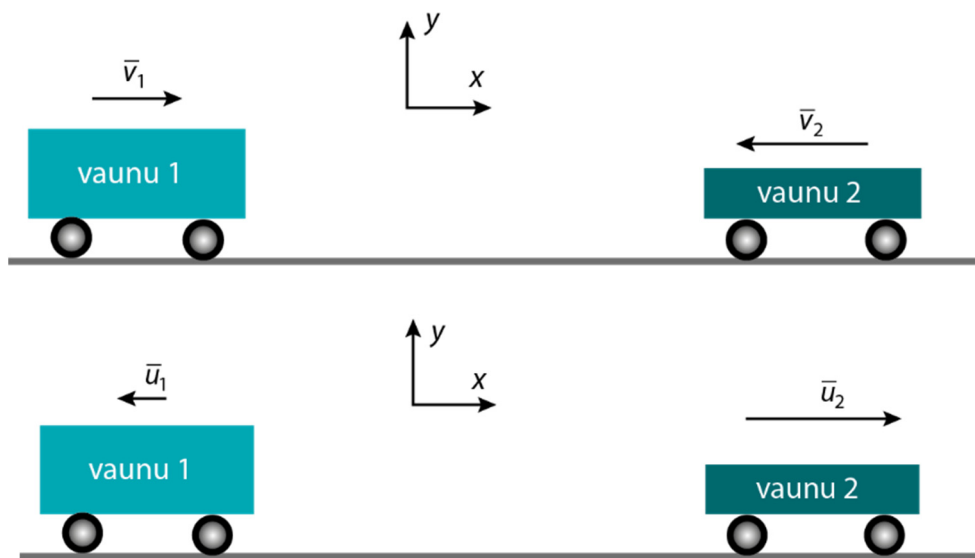
$$v_2 = 0,314 \text{ m/s} \approx 0,31 \text{ m/s}$$

Vaunujen nopeudet törmäyksen jälkeen

$$u_1 = -0,075 \text{ m/s} \approx -0,075 \text{ m/s}$$

$$u_2 = -0,442 \text{ m/s} \approx -0,44 \text{ m/s}$$

c) Sovitaan vaunun 1 alkuperäinen liikesuunta positiiviseksi. Muut nopeudet on esitetty kuvassa.



Kun nopeuksien suunnat huomioidaan, vaunujen liikemäärien summiksi alussa ja lopussa saadaan

$$\begin{aligned}\Sigma p_{\text{alussa}} &= m_1 v_1 - m_2 v_2 \\ &= 0,827 \text{ kg} \cdot 0,234 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,330 \text{ kg} \cdot 0,314 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 0,089898 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} = 0,090 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma p_{\text{lopussa}} &= -m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ &= -0,827 \text{ kg} \cdot 0,075 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,330 \text{ kg} \cdot 0,442 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 0,083835 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} = 0,084 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}.\end{aligned}$$

Koska liikemäärien summa alussa on erisuuri kuin lopussa, liikemäärä ei täysin säily.

## Tehtävä 14.18.

Korkeuden muutos  $h = 0,136 \text{ m}$

Luodin massa  $m_1 = 0,91 \text{ g}$

Luodin massa  $m_2 = 105,2 \text{ g}$

a) Luodin ja puupalikan potentiaalienergian muutos

$$\begin{aligned} E_p &= (m_1 + m_2)gh \\ &= (0,91 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 105,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}) \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,136 \text{ m} \\ &= 0,1415677 \text{ J} \approx 140 \text{ mJ}. \end{aligned}$$

b) Mekaanisen energian säilymislain mukaan, kun lähtökorkeus asetetaan potentiaalienergian nollassa ja korkeimmassa kohdassa liike-energia on nolla

$$\begin{aligned} E_k &= E_p \\ \frac{1}{2}mv^2 &= mgh \\ \frac{1}{2}v^2 &= gh. \end{aligned}$$

Palikan nopeus heti osuman jälkeen

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,136 \text{ m}} = 1,6334 \text{ m/s} \approx 1,6 \text{ m/s}.$$

c) Tarkastellaan luodin törmäystä palikkaan liikemäärän säilymislaililla. Aluksi palikka on paikoillaan. Luodin sekä palikan ja luodin nopeudet ennen ja jälkeen törmäyksen ovat samat. Liikemäärä säilyy

$$p_{\text{luoti}} = p_{\text{luoti ja palikka}}$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2.$$

Luodin nopeus ennen törmäystä b-kohdan tuloksen mukaan

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 + m_2) v_2}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2) \sqrt{2gh}}{m_1} \\ &= \frac{(0,91 \text{ g} + 105,2 \text{ g})}{0,91 \text{ g}} \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,136 \text{ m}} = 190,47 \text{ m/s} \approx 190 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

## Tehtävä 14.19.

a) Pallot putoavat päällekkäin koko ajan samalla nopeudella. Pallojen nopeus kasvaa koko putoamisen ajan. Koripallo törmää pöydälle. Törmäyksen jälkeen koripallo lähtee ylöspäin pienemmällä nopeudella kuin sen nopeus oli ennen kuin se osui pöytään. Tennispallon nopeus oli huomattavasti suurempi kuin koripallon nopeus, kun tennispallon oli törmännyt koripalloon. Koripallon nopeus selvästi pienenee, kun se nousee kohti lakikorkeutta. Lakikorkeuden jälkeen koripallon lähtee uudelleen alaspäin ja pallon nopeus kasvaa. Tennispallon nopeuden pienenemistä ei havaita.

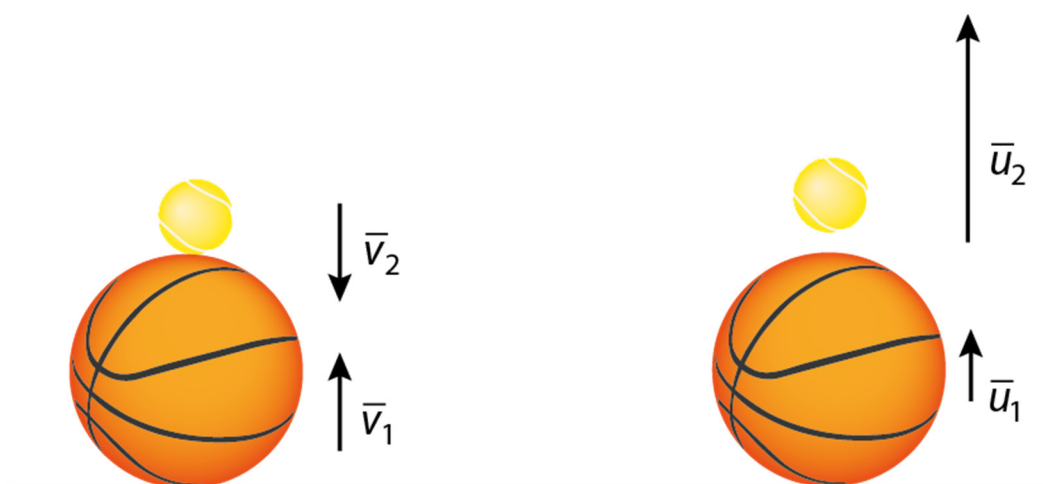
b) Tarkastellaan pallojen nopeuksien kasvua mekaanisen energian säilymisen avulla. Aluksi palloilla on potentiaalienergiaa. Kun pallon liikkuvat kohti pöytää, muuntuu pallojen potentiaalienergia pallojen liikeenergiaksi

$$E_p = E_k$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Sievennetystä yhtälöstä havaitaan, että pallojen nopeuteen pienillä pudotuskorkeuksilla, kun ilmanvastusta ei huomioida vaikuttaa vain pudotuskorkeus.

Kun pallot liikkuvat pöydän pinnasta ylöspäin, muuntuvat pallojen liike-energiat potentiaalienergiaksi ja pallon nopeus pienenee.

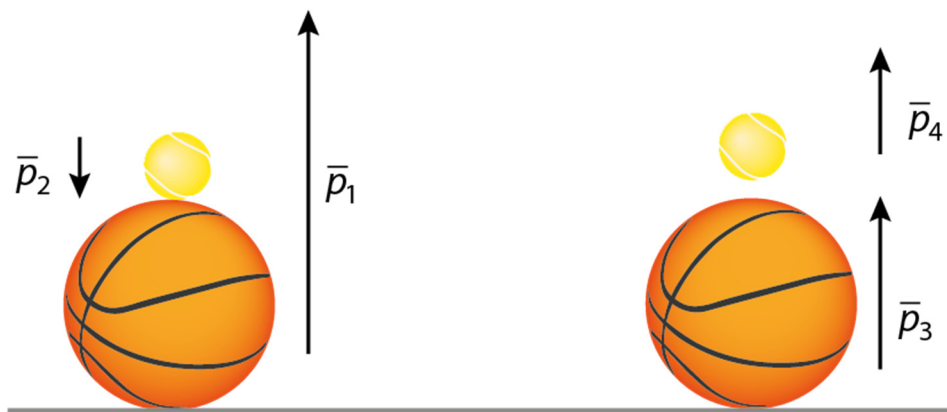
Tarkastellaan tilannetta heti, kun pöydän pinnan tukivoiman aiheuttama impulssi on muuttanut koripallon liikemäärää ja koripallo etenee ylöspäin. Tällöin tennispallo etenee vielä alaspäin.



Liikemäärän säilymislain mukaan, kun koripallon liikkeen suunta sovitaan positiiviseksi

$$p_{a1} - p_{a2} = p_{11} + p_{12}$$
$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Koripallon massiivisempänä törmää kevyeen tennispalloon ja antaa osan liikemäärästään tennispallolle. Koska tennispallon massa on huomattavasti koripallon massaa pienempi, tennispallon nopeuden muutos on huomattavasti suurempi kuin koripallon nopeuden muutos. Pallot jatkavat koripallon liikkeen suuntaan törmäyksen jälkeen, sillä koripallon liikemäärä on huomattavasti tennispallon liikemäärää suurempi.



## Tehtävä 14.20.

Valkoisen pallon alkunopeus  $\bar{v}_1 = \bar{v}$

Punaisen pallon alkunopeus  $\bar{v}_2 = \bar{0}$

Valkoisen pallon massa  $m_1 = m$

Punaisen pallon massa  $m_2 = m$

Pallojen yhteinen liikemäärä alkutilanteessa on

$$\bar{p}_{\text{alussa}} = m_1 \bar{v}_1 = m \bar{v}.$$

Pallojen liike-energia alkutilanteessa on

$$E_{k,\text{alussa}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m v^2.$$

Kimmoisassa törmäyksessä liikemäärä ja liike-energia säilyvät. Tarkastellaan pallojen liikemäärän ja liike-energian säilymistä vaihtoehtojen A – C tilanteissa

## Vaihtoehto A

Tehtävänannon mukaan

Valkoisen pallon loppunopeus  $\bar{u}_1 = -\frac{1}{2}\bar{v}$

Punaisen pallon loppunopeus  $\bar{u}_2 = \frac{1}{2}\bar{v}$

Pallojen yhteinen liikemäärä lopputilanteessa on

$$\bar{p}_{\text{lopussa}} = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 = -\frac{1}{2}m\bar{v} + \frac{1}{2}m\bar{v} = \bar{0}.$$

Pallojen yhteinen liike-energia lopputilanteessa on

$$\begin{aligned} E_{k,\text{lopussa}} &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m\left(-\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}mv^2 + \frac{1}{8}mv^2 = \frac{1}{4}mv^2. \end{aligned}$$

Liikemäärä ja liike-energia eivät säily vaihtoehdossa A, joten skenaario on väärä.

## Vaihtoehto B

Tehtävänannon mukaan

Valkoisen pallon loppunopeus  $\bar{u}_1 = \frac{1}{2}\bar{v}$

Punaisen pallon loppunopeus  $\bar{u}_2 = \frac{1}{2}\bar{v}$

Pallojen yhteinen liikemäärä lopputilanteessa on

$$\bar{p}_{\text{lopus}} = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 = \frac{1}{2}m\bar{v} + \frac{1}{2}m\bar{v} = m\bar{v}.$$

Pallojen yhteinen liike-energia lopputilanteessa on

$$\begin{aligned} E_{k,\text{lopus}} &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}mv^2 + \frac{1}{8}mv^2 = \frac{1}{4}mv^2. \end{aligned}$$

Liikemäärä säilyy, mutta liike-energia ei säily vaihtoehdossa B, joten skenaario on väärä.

## Vaihtoehto C

Tehtävänannon mukaan

Valkoisen pallon loppunopeus  $\bar{u}_1 = 0$

Punaisen pallon loppunopeus  $\bar{u}_2 = \bar{v}$

Pallojen yhteinen liikemäärä lopputilanteessa on

$$\bar{p}_{\text{lopussa}} = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2 = m \bar{v}.$$

Pallojen yhteinen liike-energia lopputilanteessa on

$$E_{k,\text{lopussa}} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m v^2.$$

Liikemäärä ja liike-energia säilyvät vaihtoehdossa C, joten skenaario on oikein.

## Tehtävä 14.21.

Rullalautailijan nopeus  $v_1 = 3,9 \text{ m/s}$

Rullalautailijan massa  $m_1 = 58,2 \text{ kg}$

Rullalaudan massa  $m_2 = 7,8 \text{ kg}$

Mäen jyrkkyys  $\alpha = 2,8^\circ$

Matka törmäyksen jälkeen  $s = 8,7 \text{ m}$

- a) Kun rullalautailija hyppää laudan päälle tapahtuu törmäys, jossa liikemäärä säilyy,  $\bar{p}_{\text{alussa}} = \bar{p}_{\text{lopussa}}$ . Rullalaudan nopeus aluksi on nolla, jolloin myös sen liikemäärä on nolla. Lopussa rullalauta ja lautailija liikkuvat yhteisellä nopeudella  $u$ . Valitaan lautailijan alkunopeuden suunta positiiviseksi

$$p_1 + \cancel{p_2} = p_3$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u.$$

Lautailijan ja laudan nopeus hypyn jälkeen on

$$u = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{58,2 \text{ kg} \cdot 3,9 \text{ m/s}}{58,2 \text{ kg} + 7,8 \text{ kg}} = 3,439 \text{ m/s} \approx 3,4 \text{ m/s}.$$

b) Tarkastellaan tilannetta energioiden avulla.

Sovitaan potentiaalienergian nollataso mäen alaosaan. Alussa rullalautailijalla on vain liike-energiaa.

Kun rullalautailija alkaa liikkua ylöspäin kaltevaa tasoa, nousee lautailija alkutilanteeseen nähden korkeudelle  $h = s \sin \alpha$ . Silloin rullalautailijalla on potentiaalienergiaa. Lopuksi rullalautailija pysähtyy, joten liike-energia on nolla.

Kitka tekee työtä koko matkan  $s$  ajan.

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$E_{ka} + \cancel{E_{pa}} - W = \cancel{E_{kl}} + E_{pl}$$

$$\frac{1}{2}mu^2 - Fs = mgh$$

$$\frac{1}{2}mu^2 - Fs = mgssin\alpha.$$

Liikettä keskimäärin vastustava voima on

$$Fs = \frac{1}{2}mu^2 - mgssin\alpha$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}mu^2 - mgssin\alpha}{s}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} \cdot (58,2 \text{ kg} + 7,8 \text{ kg}) \cdot \left(3,439 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - (58,2 \text{ kg} + 7,8 \text{ kg}) \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8,7 \text{ m} \cdot \sin 2,8^\circ}{8,7 \text{ m}}$$
$$= 13,23 \text{ N} \approx 13 \text{ N}.$$

# Syvennä

## Tehtävä 14.22.

- a) Systemin pyörimismäärä säilyy, kun systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia. Planeetat kiertävät Aurinkoa ja pyörivät samaan suuntaan kuin alkuperäinen hiukkaspilvi.

b) Kuutiometrissä olevien vetyatomien lukumäärä  $n = 10^{11}$

Aurinkokunta syntyi kaasupilvestä, jonka massa oli kolminkertainen Auringon massaan verrattuna. Mitä kuumempaa kaasu on, sitä suurempi sen massa on oltava. Rajatilanteessa kaasupilven massa on niin kutsuttu Jeansin massa. Selvitetään kaasupilven lämpötila, jos  $M_J = 3M_A$ .

$$M_J = 3 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T^3}{n}} M_A$$

$$\cancel{3} M_A = \cancel{3} \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T^3}{n}} \cancel{M_A}$$

$$\frac{1}{10^4} = \sqrt{\frac{T^3}{n}}$$

$$\left(\frac{1}{10^4}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{T^3}{n}}\right)^2$$

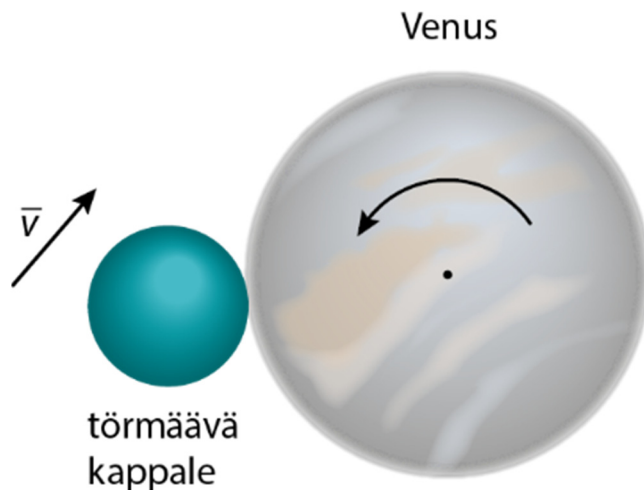
$$\frac{1}{10^8} = \frac{T^3}{n}$$

$$T^3 = \frac{n}{10^8}$$

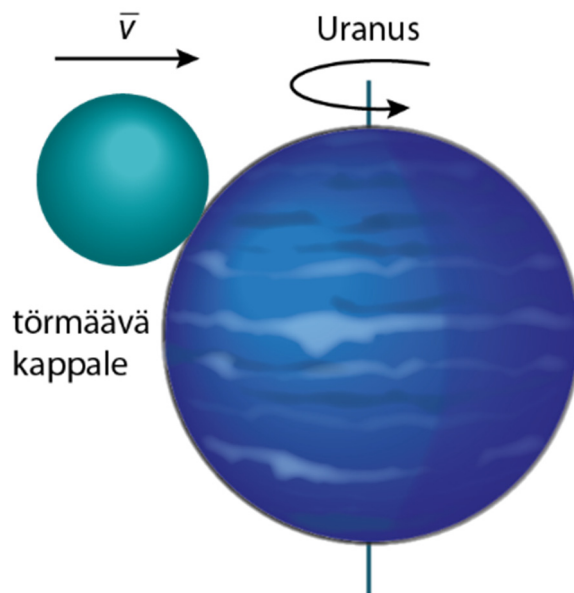
$$T = \sqrt[3]{\frac{n}{10^8}} = \sqrt[3]{\frac{10^{11}}{10^8}} = \sqrt[3]{10^3} = 10$$

Kaasupilven lämpötila olisi voinut olla enintään 10 K.

c) Venuksen pyörimisen olisi voinut pysäyttää toisen kappaleen osuminen Venukseen ulkokehälle pyörimisliikkeeseen verrattuna vastakkaisesta suunnasta.



Uranuksen akselin kallistuman on voinut aiheuttaa akselia vasten toiselle pallon puoliskolle törmäävä kappale.



d) Asteroidin massa  $m_A = 1,9 \cdot 10^{12}$  kg

Asteroidin nopeus maapallon suhteen  $v_A = 35$  km/s

Maan massa  $m_M = 5,974 \cdot 10^{24}$  kg

Merkitään asteroidin ja maan yhteistä nopeutta törmäyksen jälkeen tunnuksella  $u$ .

Asteroidin törmäys Maahan on kimmoton, ja oletusten mukaan liikemäärä säilyy.

$$p_a = p_i$$

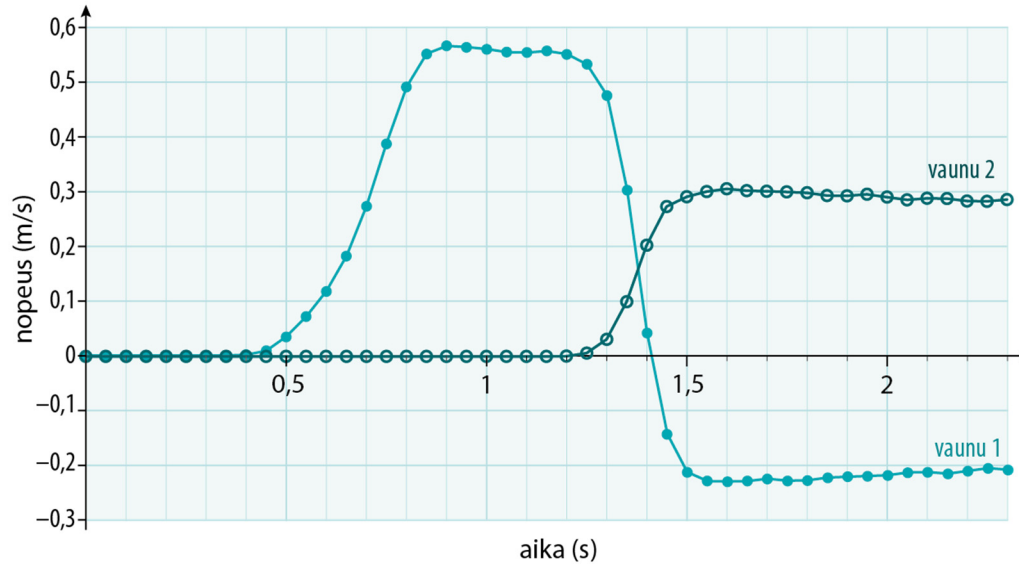
$$m_A v_A = (m_A + m_M) u$$

$$u = \frac{m_A v_A}{m_A + m_M} = \frac{1,9 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot 35000 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,9 \cdot 10^{12} \text{ kg} + 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}} = 1,11353 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1,1 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Maan nopeuden muutos on mitättömän pieni.

## Tehtävä 14.23.

a)



(Akselit oikein päin ja mittauspisteet näkyvät, 2 p)

Törmäys tapahtui aikavälillä 1,2 s – 1,55 s, koska tällä aikavälillä vaunujen nopeudet muuttuivat. (2 p)

b) Vaunun 1 massa  $m_1 = 0,330 \text{ g}$

Määritetään kuvaajan perusteella, mitkä vaunujen nopeuksien suuruudet olivat ennen törmäystä.

Vaunun 1 nopeus ennen törmäystä oli  $v_1 = 0,55 \text{ m/s}$  ja vaunu 2 oli paikallaan eli  $v_2 = 0 \text{ m/s}$ . Törmäyksen jälkeen vaunun 1 nopeuden suuruus oli  $u_1 = 0,23 \text{ m/s}$  ja vaunun 2 nopeuden suuruus  $u_2 = 0,30 \text{ m/s}$ . (2 p)

Tarkastellaan törmäystä liikemäärän säilymislain avulla. Sovitaan vaunun 1 alkuperäinen nopeuden suunta positiiviseksi suunnaksi.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (2 \text{ p})$$

Vaunun 2 nopeus oli alussa nolla. Vaunun 2 massaksi saadaan

$$m_2 = \frac{m_1 v_1 + m_1 u_1}{u_2} = \frac{m_1 (v_1 + u_1)}{u_2} = \frac{0,330 \text{ kg} \cdot (0,55 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0,23 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{0,30 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,858 \text{ kg} = 858 \text{ g}.$$

(2 p)

c) Vaunun 2 massa oli suurempi kuin vaunun 1 massa. Jos raskaampi vaunu olisi törmännyt paikalla olevaan kevyempään vaunuun, olisivat molemmat vaunut liikkuneet törmäyksen jälkeen samaan suuntaan. (1 p)

Tutkitaan tilannetta liikemäärän säilymislain avulla. Merkitään edellisen kohdan mukaan kevyempään vaunuun 1 liittyviä suureita alaindeksillä 1 ja raskaampaan vaunun 2 liittyviä suureita alaindeksillä 2. Tilanteessa liikemäärä säilyy.

$$m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 v_2. (1 \text{ p})$$

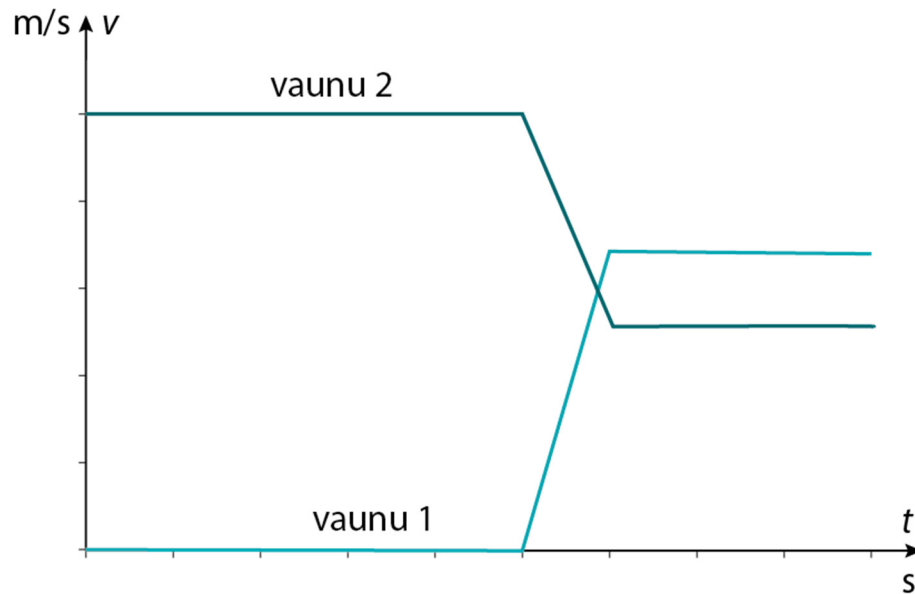
Törmäyksen jälkeen vaunujen liikemäärät ovat samaan suuntaan kuin vaunun 2 liikemäärä alussa. Tällöin vaunun 1 ja vaunun 2 liikemäärät ovat pienempiä kuin vaunun 2 liikemäärä alussa, sillä niiden summa on sama kuin vaunun 2 liikemäärä alussa. (1 p)

Koska vaunun 2 massa on suurempi kuin vaunun 1 massa, on vaunun 2 nopeus  $u_2$  törmäyksen jälkeen pienempi kuin vaunun 1 nopeus  $u_1$ . (1 p)

Vaunu 1 liikkuu pienemmän massansa vuoksi törmäyksen jälkeen nopeammin kuin vaunu 2. (1 p)

Vaunu 2 ei voi liikkua vaunua 1 nopeammin, sillä vaunu 1 kulkee edellä.

Hahmotellaan kuvaaja (tätä ei vaadittu)



(Jos on hahmoteltu kuvaaja, niin esitys korvaa 2 p sanallisesta selityksestä. Esityksessä riittää, että aluksi vaunun 2 kuvaaja on vaunun 1 kuvaajaa ylempänä ja törmäyksen jälkeen vaunun 1 kuvaaja kulkee vaunun 2 kuvaajaa ylempänä. Pystysuuntaiset muutokset voidaan kuvata jyrkemmin.)