12. Mekaniikan energiaperiaate

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 12.1.

Väittämät a), b) ja c) ovat oikein.

Korjaukset väittämiin:

d) Mekaaninen energia pienenee, kun kitka aiheuttaa kappaleiden lämpenemistä.

f) Ajonopeuden puolittuessa liike-energia pienenee neljäsosaan, jolloin jarrutusmatkakin lyhenee likipitäen neljäsosaan alkuperäisestä.

Tehtävä 12.2.

Valitaan punnus tarkasteltavaksi systeemiksi, jonka mekaaninen energia säilyy. Heilurin langan ja muiden ulkoisten voimien yhteisvaikutus punnukseen on pieni, kun punnus päästetään heilumaan. Heilumista voidaan siis mallintaa mekaanisen energian säilymislain avulla

$E_{pa} + E_{ka} = E_{pl} + E_{kl}$,

jossa $E_{ka} = 0$ ja $E_{pl} = 0$, koska punnuksella ei ole liike-energia alussa eikä potentiaalienergiaa lopussa.

Saadaan yhtälö, josta lähtökorkeus voidaan ratkaista.

$$E_{pa} = E_{kl}$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Heilurilla on eniten energiaa heilahduksen korkeimmassa kohdassa. Jotta loppunopeus olisi v = 2,0 m/s, on lähtökorkeuden oltava

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(2{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}20387\,\mathrm{m} \approx 20\,\mathrm{cm}$$

Punnuksen nopeus on enintään 2,0 m/s, jos se lähetetään 20 cm:n korkeudelta.

Tehtävä 12.3.

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Vaunujen nostokorkeus h = 24 m

a) Kun vaunuja vedetään vaijerin avulla radan lakipisteeseen, työtä tekevät vaijerin jännitysvoima, painovoima, kitka ja ilmanvastus.

b) Vaunujen teoreettinen maksiminopeus voidaan laskea mekaanisen energian säilymislain avulla, jonka mukaan vaunun potentiaalienergia muuntuu kokonaan vaunun liike-energiaksi. Alkutilanteessa vaunu on paikallaan, joten E_{k1} = 0 ja lopputilanteessa vaunu on sovitulla nollatasolla eli maan pinnan tasolla, joten E_{p2} = 0. Ratkaistaan yhtälöstä loppunopeus v_2.

$$\cancel{E}_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + \cancel{E}_{p2}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 24\,\mathrm{m}} = 21{,}70\,\mathrm{m/s} \approx 22\,\mathrm{m/s}.$$

c) Vastusvoimien eli kitkan ja ilmanvastuksen tekemä työ muuntaa osan vaunun potentiaalienergiasta ilman, vaunun ja kiskojen sisäenergiaksi. Tämän vuoksi vaunun liike-energia on pienempi kuin liike-energian teoreettinen maksimi. Näin ollen myös vaunun nopeus on pienempi.

Tehtävä 12.4.

Muuttohaukan massa m = 980 g

Muuttohaukan nopeus alussa v_1 = 25 m/s

Muuttohaukan nopeus lopussa v_2 = 350 km/h

Lentokorkeus h_1 = 1 500 m

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Koska vastusvoimat jätetään huomiotta, muuttohaukan mekaaninen energia säilyy syöksyn aikana. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi korkeus, jolla muuttohaukka saavuttaa huippunopeuden 350 km/h. Näin ollen E_{p2} = 0. Mekaanisen energian säilymislain mukaan haukan alkutilanteen mekaaninen energia muuntuu kokonaan haukan liike-energiaksi.

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} = E_{\text{k2}} + \cancel{E}_{\text{p2}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2$$

$$\frac{1}{2}v_1^2 + gh = \frac{1}{2}v_2^2.$$

Ratkaistaan yhtälöstä sovitun nollatason ja lähtökorkeuden etäisyys *h*.

$$h = \frac{\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)}{g}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{350}{3{,}6}\text{m/s}\right)^2 - (25\text{m/s})^2\right)}{9{,}81\text{m/s}^2} = 449{,}9\text{m}.$$

Nopeus saavutetaan korkeudella

$h_2 = h_1 - h$ = 1 500 m – 449,9 m = 1 050 m ≈ 1100 m

b) Tilanteessa vaikuttava vastusvoima on ilmanvastus. Jos ilmanvastuksen vaikutus otetaan huomioon, syöksymatkan pituus kasvaa, sillä ilmanvastuksen tekemä työ muuntaa osan muuttohaukan alkutilanteen mekaanisesta energiasta ilman ja muuttohaukan sisäenergiaksi.

Tehtävä 12.5.

Rullaluistelijan alkunopeus v_1 = 0,35 m/s

Rullaluistelijan nopeus mäen alaosassa v_2 = 6,2 m/s

Mäen korkeus h = 3,1 m

Rullaluistelijan massa m = 72 kg

Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella. Sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi mäen alaosa. Tällöin

$$E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}} - W = E_{\mathrm{k2}} + \cancel{E_{\mathrm{p2}}}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - W = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ on

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 72\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}35\,\mathrm{m/s})^2 + 72\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 3{,}1\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}\cdot 72\,\mathrm{kg}\cdot(6{,}2\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 810{,}162\,\mathrm{J} \approx 810\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Tehtävä 12.6.

Kun lautasen etäisyys lattiasta pienenee ja lautasen vauhti kasvaa, lautasen potentiaalienergiaa muuntuu lautasen liike-energiaksi, Ilmanvastus tekee työtä ja muuntaa pienen osan lautasen mekaanisesta energiasta ilman molekyylien ja lautasen pinnan sisäenergiaksi. Kun lautanen osuu lattiaan, lattian tukivoima tekee työtä ja muuntaa osan mekaanisesta liike-energiasta lautasen sisäenergiaksi. Atomien välisiä sidoksia katkeaa ja lautanen menee rikki. Osa lattian tukivoiman tekemästä työstä muuntuu lautasen palasten mekaaniseksi liike-energiaksi.

Tehtävä 12.7.

Kirpun massa m_k = 0,65 mg = 0,65 · 10^{-3} g = 0,65 · 10^{-6} kg
Hypyn korkeus h = 0,15 m
Ihmisen massa m_i = 95 kg.

a) Kirpun potentiaalienergia

$$\begin{aligned} E_p &= m_k g h \\ &= 0{,}65 \cdot 10^{-6}\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}15\,\text{m} \\ &= 0{,}9565\,\mu\text{J} \approx 0{,}96\,\mu\text{J} \end{aligned}$$

b) Oletetaan, että hypyn alussa liike-energia on yhtä suuri kuin potentiaalienergia hypyn lakipisteessä. Mekaanisen energian säilymislain mukaan kirpun liike-energia muuntuu kirpun potentiaalienergiaksi

$$\begin{aligned} E_k &= E_p \\ \frac{1}{2}\cancel{m_k}v^2 &= \cancel{m_k}gh \\ \frac{1}{2}v^2 &= gh. \end{aligned}$$

Kirppu irtosi maasta nopeudella

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\text{m/s}^2 \cdot 0{,}15\text{m}} = 1{,}71552\text{m/s} \approx 1{,}7\text{m/s}.$$

c) Kirpun energiantuotto kilogrammaa kohden on

$$\frac{E}{m_k} = \frac{\cancel{m_k} gh}{\cancel{m_k}} = gh = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m} = 1{,}4715\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}.$$

Jos ihmisellä olisi sama energiantuotto kilogrammaa kohden kuin kirpulla, ihmisen energiantuotto kilogrammaa kohden olisi

$$E_i = \frac{E}{m_k} m_i.$$

Koko ihmisen tuottama energia muuntuu potentiaalienergiaksi. Ratkaistaan yhtälöstä hypyn korkeus *h*.

$$E_i = E_p$$

$$\frac{E}{m_k} \cancel{m_i} = \cancel{m_i} gh$$

$$h = \frac{E}{m_k g} = \frac{\cancel{g} h}{\cancel{g}} = h = 0{,}15\,\mathrm{m}.$$

Sovella

Tehtävä 12.8.

Kuulan massa *m* = 50,0 g

Kuulan nopeus lopussa *v* = 5,2 m/s

Kuulan lähtökorkeus *h* = 0,45 m

a) Valitaan vedenpinnan taso potentiaalienergian nollatasoksi. Mekaanisen energian säilymislain mukaan kuulan alkutilanteen liike-energia ja potentiaalienergia muuntuvat kokonaan kuulan lopputilanteen liike-energiaksi.

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + \cancel{E_{p2}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2$$

$$v_1^2 - 2gh = v_2^2.$$

Kuulan lähtönopeus oli

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 - 2gh} = \sqrt{(5{,}2\,\mathrm{m/s})^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}45\,\mathrm{m}}$$

$$v_1 = 4{,}2674\,\mathrm{m/s} \approx 4{,}3\,\mathrm{m/s}.$$

b) Kuulan maksimikorkeus voidaan laskea mekaanisen energian säilymislain avulla, kun oletetaan, että kuulalla lakipisteessä oleva potentiaalienergia muuntuu kokonaan kuulan liike-energiaksi.

$$\cancel{m}gh=\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^{\,2}$$

Kuulan lakipisteen korkeus oli

$$h=\frac{\frac{1}{2}v_2^2}{g}=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{(5{,}2\,\mathrm{m/s})^2}{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}=1{,}378\,\mathrm{m}\approx 1{,}4\,\mathrm{m}.$$

Tehtävä 12.9.

Hiihtäjän massa m = 65 kg.

Hiihtäjän nopeus alussa v_1 = 6,0 m/s

Ladulla olevien havujen pituus s = 0,48 m.

Suksen ja havujen välinen kitkakerroin μ = 0,37

Mäen korkeus h = 3,2 m

a) Hiihtäjään vaikuttavat voimat havupatjan päällä.

Havujen ja suksien välisen kitkan tekemä työ on

$W = Fs = F_\mu s.$

Hiihtäjä liukuu tasaisella pinnalla, jolloin $N = G$ ja $F_\mu = \mu N$.

Kitkan tekemä työ on

$$\begin{aligned} W &= \mu N s = \mu G s = \mu m g s \\ &= 0{,}37 \cdot 65\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}48\,\mathrm{m} \\ &= 113{,}2466\,\mathrm{J} \approx 110\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

b) Työperiaatteen mukaan kitkan tekemä työ pienentää hiihtäjän liike-energiaa.

$$W = \Delta E_\mathrm{k}$$

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - W.$$

Hiihtäjän nopeus havupatjan jälkeen on

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{W}{\frac{1}{2}m}} = \sqrt{v_1^2 - \frac{2W}{m}} = \sqrt{v_1^2 - \frac{2\mu \cancel{m} gs}{\cancel{m}}}$$

$$= \sqrt{v_1^2 - 2\mu gs}$$

$$= \sqrt{(6{,}0\,\mathrm{m/s})^2 - 2\cdot 0{,}37\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0{,}48\,\mathrm{m}}$$

$$= 5{,}7022\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 5{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c) Hiihtäjä liukuu jäistä alamäkeä, jolloin voidaan olettaa, että hiihtäjän potentiaalienergia muuntuu kokonaan hiihtäjän liike-energiaksi.

Valitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi, jolloin mekaanisen energian säilymislain mukaan

$$
\begin{aligned}
E_{k1} + E_{p1} &= E_{k2} + \cancel{E_{p2}} \\
\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gh &= \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 \\
v_2^2 &= v_1^2 + 2gh \\
v_2 &= \sqrt{v_1^2 + 2gh} \\
&= \sqrt{(5{,}7022\,\text{m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\text{m/s}^2 \cdot 3{,}2\,\text{m}} \\
&= 9{,}76213\,\text{m/s} \approx 9{,}8\,\text{m/s}.
\end{aligned}
$$

Tehtävä 12.10.

a) Kun ensimmäinen kivi on saavuttanut lakipisteensä, se alkaa pudota. Koska mekaaninen energia säilyy, putoavalla kivellä on heittokohdassa yhtä suuri nopeus alaspäin kuin sen alkunopeus oli ylöspäin. Näin ollen molemmilla kivillä on heittokohdassa sama nopeus. Siten kivillä on myös yhtä paljon mekaanista energiaa. Jos potentiaalienergian nollatasoksi valitaan veden pinta, niin kivien mekaaninen energia muuntuu lopulta kokonaan liike-energiaksi. Kivillä on siten yhtä suuri nopeus, kun ne osuvat veden pintaan.

b) Ylöspäin heitetyllä kivellä osa energiasta muuntuu ilmanvastuksen tekemän työn takia muuksi kuin potentiaalienergiaksi, kun kivi liikkuu ylöspäin. Kun kivi tulee lakipisteestä alaspäin, ilmanvastus tekee työtä kiven liikettä vastaan ja pienentää kiven liike-energiaa. Kun kivi on heittäjän kohdalla menossa alaspäin, on kiven liike-energia pienempi kuin alaspäin heitetyn kiven liike-energia. Ilmanvastuksen tekemä työ on muuntanut osan kiven liike-energiasta esimerkiksi ilman molekyylien liike-energiaksi. Tällöin alaspäin heitetty kivi osuu suuremmalla nopeudella vedenpintaan kuin ylöspäin heitetty kivi.

Jos jyrkänne on riittävän korkea, niin molemmat kivet saavuttavat rajanopeuden ennen osumistaan vedenpintaan. Silloin kivien nopeudet ovat yhtä suuret.

Tehtävä 12.11.

Pyöräilijän nopeus mäen päällä $v_1 = 18\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{18}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Mäen korkeus h = 12 m

Pyöräilijän nopeus mäen alla $v_2 = 28{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{28{,}4}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Pyöräilijän massa m = 81 kg

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Mäen pituus s = 78 m

a) Valitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} - W = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - W = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 81\,\text{kg}\cdot\left(\frac{18}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 81\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 12\,\text{m} - \frac{1}{2}\cdot 81\,\text{kg}\cdot\left(\frac{28{,}4}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= 8027{,}32\,\text{J} \approx 8{,}0\,\text{kJ}. \end{aligned}$$

b) Vastusvoimien suuruus saadaan työn avulla ja a-kohdan tuloksen mukaan

$$W = Fs$$

$$F = \frac{W}{s} = \frac{8027{,}32\ \text{J}}{78\ \text{m}} = 102{,}91\ \text{N} \approx 100\ \text{N}.$$

c) Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella ja määritetään pyöräilijän loppunopeus

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} - W = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - W$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh - \frac{2Fs}{m}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh - \frac{2Fs}{m}}.$$

Loppunopeuteen siis vaikuttaa alkunopeus, mäen korkeus, mäen pituus ja vastusvoimien suuruus. Mitä jyrkempi mäki aluksi on, sitä suuremman nopeuden pyöräilijä saa mäen alkuosassa. Vastusvoimista ilmanvastus muuttuu, kun mäen jyrkkyys muuttuu. Mitä suurempi pyöräilijän nopeus on, sitä suurempi on ilmanvastus. Mitä jyrkempi on mäki, sitä suurempi on koko matkan aikana vaikuttava ilmanvastus ja ilmanvastuksen tekemä työ. Loppunopeus on siis pienempi, jos mäki on aluksi jyrkempi.

Tehtävä 12.13

a) Mekaanisen energian säilymislain mukaan
$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$ eli

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$
$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

Yhtälöistä punnuksen massa supistuu pois eikä massa näin ollen vaikuta nopeuteen, kun tilannetta tarkastellaan mekaanisen energian säilymislain avulla

b) Alussa punnus on paikallaan, joten $E_{k1} = 0$. Ala-asennossa punnuksella ei ole potentiaalienergiaa, jos nollatasoksi on sovittu punnuksen radan alin kohta. Tällöin $E_{p2} = 0$. Nyt $E_{p1} = E_{k2}$

$$gh_1 = \frac{1}{2}v_2^2$$
$$v_2 = \sqrt{2gh_1}.$$

Punnuksen nopeus ala-asennossa on siis suoraan verrannollinen punnuksen alkukorkeuden neliöjuureen.

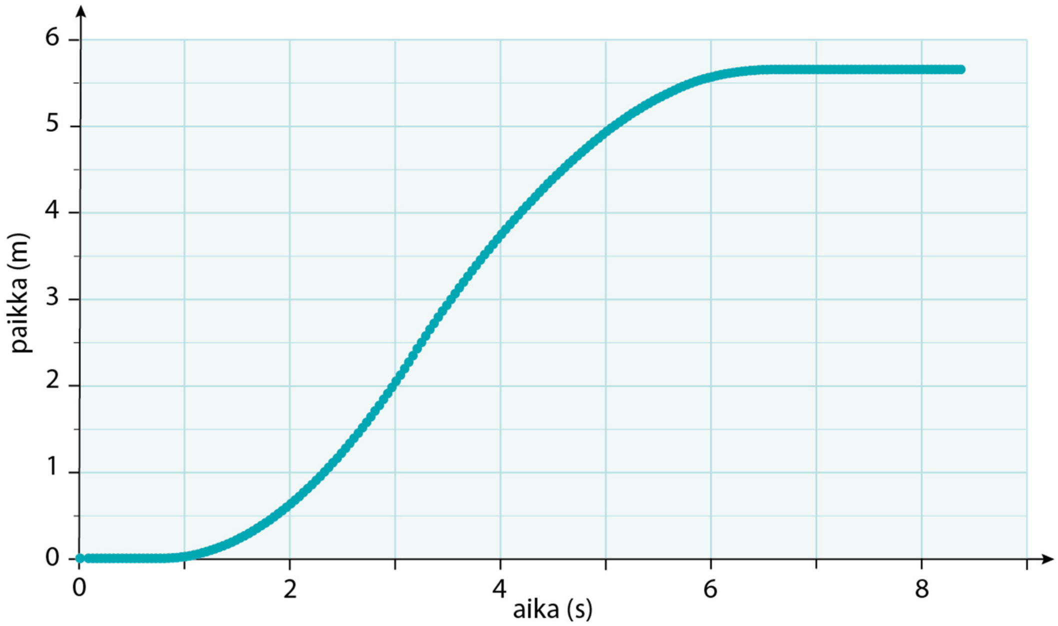
Tehtävä 12.14.

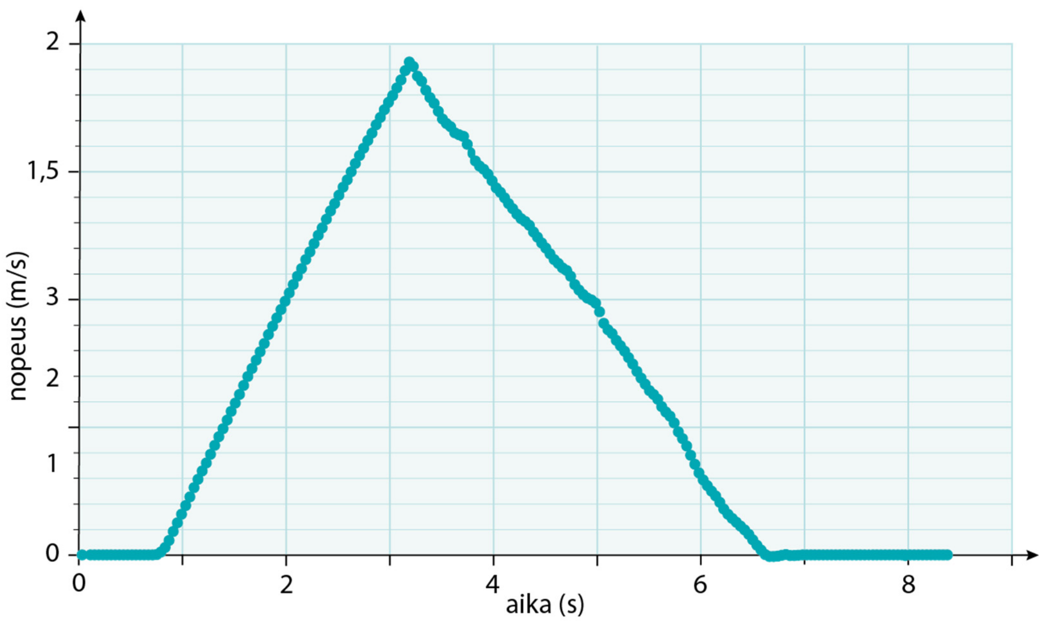
a) Metallikappale liukuu alumiinikiskoa pitkin. Tilanteessa kitka, ilmanvastus ja painovoima tekevät työtä.

b) Metallikappale saa sitä suuremman nopeuden, mitä jyrkempi liukumiskulma on. Mitä loivempi kalteva taso on, sitä pidemmällä matkalla kitka vaikuttaa. Metallikappale hankaa myös alumiinikiskon seinämiin. Kitkan tekemä työ muuntaa kappaleen liike-energiaa pintojen sisäenergiaksi sitä enemmän, mitä pidemmän matkan kappale liukuu. Tällöin nopeuden mitattu arvo on sitä pienempi, mitä loivempi taso on.

Tehtävä 12.15.

a)





Vaunu lähtee liikkeelle ajanhetkellä 0,75 s. Vaunun nopeus kasvoi ajanhetkelle 3,2 s asti, jonka jälkeen nopeus alkoi pienentyä. Vaunu pysähtyy 6,6 s kohdalla.

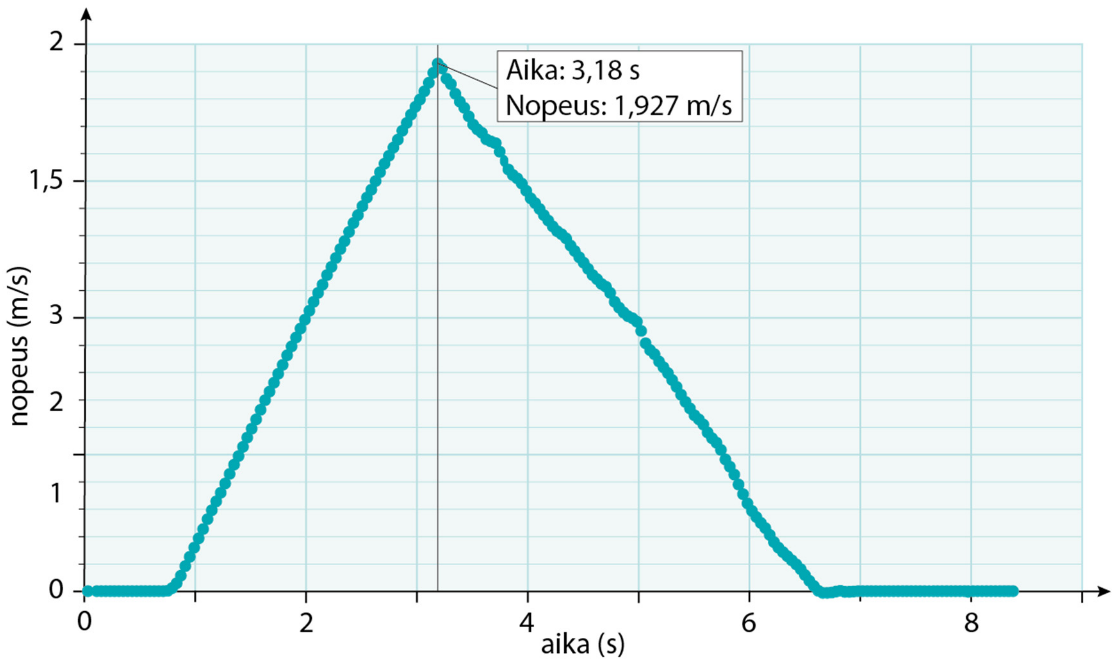
Painovoiman kaltevan tason suuntainen komponentti aiheutti vaunulle kiihtyvyyden, joten vaunun nopeus kasvoi siihen asti, kun vaunu oli kaltevalla tasolla. Tämän jälkeen vaunuun vaikutti liikkeen suunnassa vain liikkeelle vastakkaisia voimia, jotka pienensivät vaunun nopeutta. Siten vaunu saapuu lattialle ajanhetkellä 3,2 s.

b) Vaunun massa m = 1,315 kg

Kaltevan tason korkeus h = 20,4 cm = 0,204 m

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s2

Määritetään vaunun nopeus kaltevan tason lopussa.



Nopeus tason lopussa on v_2 = 1,927 m/s.

Valitaan mäen alaosa potentiaalienergian nollatasoksi. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$E_{k1} + E_{p1} - W = E_{k2} + E_{p2}$$

$$mgh - W = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Vastusvoimien tekemä työ

$$W = mgh - \frac{1}{2}mv_2^2$$
$$= 1{,}315\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}204\,\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}315\,\text{kg} \cdot \left(1{,}927\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$
$$= 0{,}1901\,\text{J} \approx 190\,\text{mJ}.$$

c) Mekaniikan energiaperiaatteella, kun vaunu liikkuu vaakasuoraan, vaunun potentiaalienergia ei muutu. Lopuksi vaunu pysähtyy paikoilleen

$$E_{\text{k1}} + E_{\text{p1}} - W = E_{\text{k2}} + E_{\text{p2}}$$
$$\frac{1}{2}mv^2 - W = 0.$$

Vaunu liikkui lattialla aikavälillä 3,2 s – 6,6 s kuvaajan perusteella matkan s = 3,298 m.

Vastusvoimien suuruus

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$
$$F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{1{,}315\,\text{kg} \cdot (1{,}927\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 3{,}298\,\text{m}}$$
$$= 0{,}74030\,\text{N} \approx 740\,\text{mN}.$$

Tehtävä 12.16.

Alussa punnuksella on potentiaalienergiaa, joka muuntuu heilahduksessa ensin liike-energiaksi ja sitten takaisin potentiaalienergiaksi. Vaikka vastusvoimat ovat tilanteessa pieniä, osa alkutilanteen potentiaalienergiasta muuntuu vastusvoimien tekemäksi työksi. Punnus ei saavuta tämän vuoksi lähtökorkeuttaan, joten opettaja on turvassa.

Tehtävä 12.17.

Puupalikan massa m_1 = 0,350 kg

Punnuksen massa m_2 = 0,410 kg

Punnuksen ja palikan liikkuma matka s = 0,62 cm

Putoamiskiihtyvyys $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

Puupalikan ja pinnan välinen kitkakerroin μ = 0,22

Puupalikan potentiaalienergia ei muutu. Määritetään punnuksen potentiaalienergian nollatasoksi lattian taso, missä punnus on lopussa. Puupalikka ja punnus lähtevät paikoltaan, jolloin niiden nopeudet alussa ovat nollat.

Tarkastellaan tilannetta mekaniikan energiaperiaatteella

$$E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}} - W = E_{\mathrm{k2}} + E_{\mathrm{p2}}$$

$$m_2 gh - W = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Kitkan tekemä työ on W = $F_\mu s$ ja koska kappaleet ovat kytkettyinä toisiinsa, on kappaleilla sama loppunopeus v. Saadaan mekaniikan energiaperiaatteeksi

$$m_2 gh - F_\mu s = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2.$$

Puupalikka liikkuu vaakasuoralla pinnalla, jolloin
$N = G = mg$ ja kitkalle $F_\mu = \mu N$.

$$m_2gs - \mu m_1gs = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$$
$$2m_2gs - 2\mu m_1gs = (m_1 + m_2)v^2$$
$$v^2 = \frac{2m_2gs - 2\mu m_1gs}{m_1 + m_2}$$
$$v^2 = \frac{2gs(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}$$

Punnus osuu lattiaan nopeudella

$$v = \sqrt{\frac{2gs(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}62\,\mathrm{m} \cdot (0{,}410\,\mathrm{kg} - 0{,}22 \cdot 0{,}35\,\mathrm{kg})}{0{,}410\,\mathrm{kg} + 0{,}35\,\mathrm{kg}}}$$
$$= 2{,}30866\,\mathrm{m/s} \approx 2{,}3\,\mathrm{m/s}.$$

Syvennä

Tehtävä 12.18.

Rullalautailijan massa m = 67 kg

Etenemistä vastustava voima F = 20 N

Rampin kaltevuuskulma α = 35°

Rampin kaarevuussäde r = 2,0 m

Hypyn korkeus h = 3,0 m

Lisäksi merkitään

- Hyppyrin nokkaan liittyviin kirjaintunnuksiin alaindeksi A.
- Rampin alimpaan kohtaan liittyviin kirjaintunnuksiin alaindeksi B.
- Lähtöpisteen liittyviin kirjaintunnuksiin alaindeksi C.

a) Ilmalennon aikana rullalautailijan liike-energia muuntuu potentiaalienergiaksi. Hypyn korkeimmassa kohdassa lautailijan liike-energia on nolla.

Kun valitaan potentiaalienergian nollataso hyppyrin nokalle, saadaan mekaanisen energian säilymislain mukaisesti

$$E_{\mathrm{kA}} = E_{\mathrm{p}}$$
$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_{\mathrm{A}}^2 = \cancel{m}gh.$$

Ratkaistaan tästä nopeus hyppyrin nokalla

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}0\,\mathrm{m}} = 7{,}6720\,\mathrm{m/s} \approx 7{,}7\,\mathrm{m/s}$$

b) Valitaan nyt potentiaalienergian nollataso rampin alimpaan kohtaan B.

Hyppyrin nokka A on rampin kaarevuussäteen verran ylempänä kuin rampin alin kohta B, joten nyt $h_{\mathrm{A}} = r$.

Edellä saatiin nopeus hyppyrin nokalla $v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2gh}$.

Laakerivian vuoksi vastusvoimien tekemä työ pienentää rullalautailijan mekaanista energiaa matkalla rampin alimmasta kohdasta B hyppyrin nokalle A.

Matka kohdasta B hyppyrin nokalle kohtaan A on neljännesympyrän mittainen, joten $s_{\mathrm{BA}} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{1}{2}\pi r.$

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{kB}} + \cancel{E_{\mathrm{pB}}} + W &= E_{\mathrm{kA}} + E_{\mathrm{pA}} \\
\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 - Fs &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + mgh_{\mathrm{A}} \\
\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + mgh_{\mathrm{A}} + Fs_{\mathrm{BA}} \\
\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + mgr + F \cdot \frac{1}{2}\pi r \\
mv_{\mathrm{B}}^2 &= mv_{\mathrm{A}}^2 + 2mgr + F\pi r \\
v_{\mathrm{B}}^2 &= \frac{mv_{\mathrm{A}}^2 + 2mgr + F\pi r}{m} \\
v_{\mathrm{B}}^2 &= v_{\mathrm{A}}^2 + 2gr + \frac{F\pi r}{m} \\
v_{\mathrm{B}}^2 &= 2gh + 2gr + \frac{F\pi r}{m}.
\end{aligned}
$$

Rullalautailijan nopeus rampin alimmassa kohdassa

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{B}} &= \sqrt{2gh + 2gr + \frac{F\pi r}{m}} \\
&= \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}0\,\mathrm{m} + 2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} + \frac{20\,\mathrm{N} \cdot \pi \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}}{67\,\mathrm{kg}}} \\
&= 9{,}998878\,\mathrm{m/s} \approx 10\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

c) Merkitään rampin korkeutta alimpaan kohtaan nähden h_C. Rampin alussa lautailija on paikallaan ja lautailijan liike-energia on nolla. Valitaan potentiaalienergian nollataso rampin alimpaan kohtaan B.

Edellä saatiin nopeudelle rampin alimmassa kohdassa

$$v_B^2 = 2gh + 2gr + \frac{F\pi r}{m}$$

Laakerivian vuoksi vastusvoimien tekemä työ pienentää rullalautailijan mekaanista energiaa matkalla rampin ylimmästä kohdasta C alimpaan kohtaan B. Merkitään tätä matkaa s_{CB}.

Rampin korkeuden ja pituuden välillä on yhteys, $\sin\alpha = \frac{h_C}{s}$.

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaisesti

$$\cancel{E}_{kC} + E_{pC} + W = E_{kB} + \cancel{E}_{pB}$$

$$mgh_C - Fs = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$mgh_C - F\frac{h_C}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}m\left(2gh + 2gr + \frac{F\pi r}{m}\right)$$

$$h_C\left(mg - \frac{F}{\sin\alpha}\right) = gmh + gmr + \frac{F\pi r}{2}.$$

Rampin korkeus on

$$h_{\mathrm{c}} = \frac{gmh + gmr + \frac{F\pi r}{2}}{\left(mg - \frac{F}{\sin\alpha}\right)}$$

$$= \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 67\,\mathrm{kg} \cdot 3{,}0\,\mathrm{m} + 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 67\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} + \frac{20\,\mathrm{N} \cdot \pi \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}}{2}}{\left(67\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} - \frac{20\,\mathrm{N}}{\sin 35^\circ}\right)}$$

$$= 5{,}381\,\mathrm{m} \approx 5{,}4\,\mathrm{m}.$$

Tehtävä 12.19.

Auton nopeus v = 80 km/h

Kitkakerroin (min) μ_{min} = 0,25

Kitkakerroin (max) μ_{max} = 0,29

a) Auton pysähtymismatka muodostuu reaktiomatkasta ja jarrutusmatkasta. Reaktiomatka on kuljettajan reaktioaikana edetty matka. Yleisesti reaktioaikana käytetään arvoa t = 1,0 s. Reaktioaikaan vaikuttaa lisäksi kuljettajan vireystila sekä mahdolliset häiriötekijät. Jarrutusmatkaan vaikuttaa kitkakerroin, joka riippuu renkaiden kunnosta ja ajokelistä. Talvikelillä vaikuttaa myös, onko tienpinta jäinen ja onko autossa kitka- vai nastarenkaat.

b) Selvitetään, kuinka kitkakerroin vaikuttaa kiihtyvyyteen.

Jarrutuksen aikana liike on tasaisesti hidastuvaa.

Newtonin II lain mukaan

$$\begin{aligned}\sum F &= ma\\ -F_\mu &= ma\\ -\mu N &= ma\\ -\mu G &= ma\\ -\mu \cancel{m}g &= \cancel{m}a\\ a &= -\mu g\end{aligned}$$

Jarrutuksen aloituksen jälkeen auton kulkema matka on $x_\mathrm{j} = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ja loppunopeus on $v = v_0 + at$.

Jarrutusmatkan jälkeen auto on paikallaan, joten auton nopeus $v = 0$. Auton jarrutukseen kulunut aika saadaan loppunopeuden lausekkeesta $t = -\frac{v_0}{a}$.

Sijoitetaan tämä jarrutusmatkan yhtälöön.

$$\begin{aligned}x_\mathrm{j} &= v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2\\ &= -\frac{v_0^{\,2}}{a} + \frac{1}{2}\frac{v_0^{\,2}}{a} = -\frac{1}{2}\frac{v_0^{\,2}}{a} = -\frac{v_0^{\,2}}{2a}.\end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöön aiemmin ratkaistu kiihtyvyys

$a = -\mu g$

$$x_{\mathrm{j}} = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2(-\mu g)} = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

Renkaiden ja tien välinen kitkakerroin on esimerkiksi kuivalla asfaltilla 0,8 ja märällä jäällä 0,1.

Oletetaan reaktioajaksi t_{r} =1,0 s

Reaktiomatka on tällöin

$$x_r = v_0 t_r = \frac{80}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}0\,\mathrm{s} = 22{,}222\,\mathrm{m}.$$

Pysähtymismatka on

$$x = x_{\mathrm{r}} + x_{\mathrm{j}} = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2\mu_{\mathrm{min}} g}.$$

Lasketaan jarrutusmatka kuivalla asfaltilla ja märällä jäällä

$$x_{\mathrm{asfaltti}} = x_r + \frac{v_0^2}{2\mu_{\mathrm{min}} g} = 22{,}222\,\mathrm{m} + \frac{\left(\frac{80}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}8 \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = 53{,}684\,\mathrm{m} \approx 50\,\mathrm{m}$$

$$x_{\mathrm{jää}} = x_r + \frac{v_0^2}{2\mu_{\mathrm{max}} g} = 22{,}222\,\mathrm{m} + \frac{\left(\frac{80}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} = 273{,}918\,\mathrm{m} \approx 300\,\mathrm{m}$$

Tehtävä 12.20.

Auton kiihdytyksen teho P = 80 kW

Auton massa m = 1450 kg

Kiihdytysmatka s = 100 m

a) Auton kiihtyvyys on vakio. Määritetään loppunopeuden lauseke tasaisesti kiihtyvän liikkeen lausekkeesta. Auton loppunopeus on $v = at$, joten kiihtyvyys on $a = \frac{v}{t}$.

Auto etenee kiihdytyksen aikana matkan $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Alussa s_0 = 0 m ja auto on paikallaan eli v_0 = 0 m/s, joten yhtälö saadaan muotoon $s = \frac{1}{2}at^2$.

Sijoitetaan nopeuden lausekkeesta kiihtyvyys, jolloin saadaan

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\cancel{t}}\right)t^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}vt.$$

Ratkaistaan yhtälöstä nopeus, jolloin saadaan $v = \frac{2s}{t}$.

Kiihdytyksen keskimääräinen teho on autolle tehdyn työn ja siihen käytetyn ajan suhde. Työperiaatteen mukaan autolle tehty työ muuntaa energiaa auton liike-energiaksi, joten työn suuruus saadaan selville, kun tiedetään auton liike-energia juuri ennen törmäystä. Sijoitetaan auton liike-energian lauseke tehon yhtälöön.

$$P=\frac{W}{t}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{t}=\frac{\frac{1}{2}m\left(\frac{2s}{t}\right)^2}{t}$$

$$P=\frac{m\left(\frac{4s^2}{t^2}\right)}{2t}=\frac{m\cdot 4s^2}{2t^3}=\frac{2ms^2}{t^3}$$

Ratkaistaan yhtälöstä kiihdyttämiseen tarvittava aika.

$$t^3=\frac{2ms^2}{P}$$

$$t=\sqrt[3]{\frac{2ms^2}{P}}=\sqrt[3]{\frac{2\cdot 1450\,\text{kg}\cdot(100\,\text{m})^2}{80\,\text{kW}}}$$

$$=7{,}1302\,\text{s}\approx 7{,}1\,\text{s}$$

b) Lasketaan auton loppunopeus a-kohdan tietojen perusteella.

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 100\,\mathrm{m}}{7{,}13021\,\mathrm{s}} = 28{,}049\,\mathrm{m/s} \approx 101\,\mathrm{km/h}$$

c) Lasketaan auton liike-energia juuri ennen törmäystä b-kohdan tietojen perusteella.

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1450\,\mathrm{kg} \cdot \left(28{,}04964\,\mathrm{m/s}\right)^2 = 570\,417{,}25\,\mathrm{J} \approx 570\,\mathrm{kJ}.$$

Tehtävä 12.21.

a) Kolaritilanteessa törmäykseen liittyvä energia ohjataan auton rakenteeseen. Auton korissa on kohtia, jotka antavat törmäyksessä periksi ja vaimentavat siten ohjaamoon kohdistuvaa iskua.

b) Kitkaa on pyritty parantamaan esimerkiksi renkaiden kuviointia kehittämällä. Renkaiden pintamateriaali tai talviolosuhteissa käytettävät nastat parantavat renkaiden pitoa. Teiden suunnittelussa ja kunnossapidossa huomioidaan liikenneturvallisuus. Esimerkiksi tienpinnoille satanut tai sulanut vesi valuu kaltevalta tien pinnalta ojaan, jolloin tie kuivuu nopeammin. Talviolosuhteissa teitä hiekoitetaan kitkan parantamiseksi tai suolataan, jolloin saadaan tien pinnassa olevaa jääkerrosta sulatettua.

c) Turvavyöt estävät äkkipysähdyksessä matkustajan sinkoutumisen kohti auton kojelautaa tai tuulilasia kohti. Matkustajaan kohdistuvia iskuja vaimentavat useat autoon asennetut turvatyynyt. Myös energiaa sitova kori pienentää matkustajaan kohdistuvia iskuja.

   Autossa käytetään useita havaintolaitteita. Esimerkiksi tutkia käytetään autoa lähellä olevien kohteiden kuten muiden autojen tai jalankulkijoiden havainnointiin. Tutkat hyödyntävät sähkömagneettisen säteilyn eri aallonpituusalueita. RADAR eli radio detection and ranging hyödyntää radiosignaaleja ja LIDAR eli light detection and ranging hyödyntää näkyvää valoa. Lisäksi autoissa on erilaisia kameroita ja ultraääneen perustuvia tutkia. Niitä voidaan hyödyntää esimerkiksi autojen pysäköinnissä.

   Ajoneuvon hallinnassa kuljettajaa auttavat esimerkiksi lukkiutumattomat jarrut (ABS) ja luistonestojärjestelmä (ESC). Lisäksi uusissa autoissa on muun muassa kuljettajan vireystilan valvontajärjestelmä, hätäjarrutusjärjestelmä ja nopeudenseurantajärjestelmä.

Tehtävä 12.22.

Auton nopeus v = 97,2 km/h

Hirven etäisyys s = 83 m

Reaktioaika t = 1,0 s

Kitkakerroin kuiva asfaltti μ_1 = 0,8

Kitkakerroin märkä asfaltti μ_2 = 0,6

a) Auto kulkee reaktioaikana vakionopeudella v = 97,2 km/h. Auton kulkema matka

$$x = \cancel{x_0} + v_0 t + \frac{1}{2}\cancel{a}t^2$$

$$x = v_0 t = \left(\frac{97{,}2}{3{,}6}\text{m/s}\right)\cdot 1{,}0\text{s} = 27{,}0\text{m} \approx 27\text{m}$$

b) Kyseessä on tasaisesti hidastuva liike. Newtonin II lain mukaisesti:

$$\sum F = ma$$
$$-F_\mu = ma$$
$$-\mu_1 N = ma$$
$$-\mu_1 G = ma$$
$$-\mu_1 \cancel{m}g = \cancel{m}a$$
$$a = -\mu_1 g$$

Oletetaan auton nopeuden hidastuminen tasaisesti kiihtyväksi liikkeeksi. Auton jarrutusmatkaksi saadaan:

$$x = \cancel{x_0} + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\left(\frac{\cancel{v} - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{\cancel{v} - v_0}{a}\right)^2$$

$$= \frac{-v_0^2}{a} + \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{v_0^2}{a^{\cancel{2}}} = -\frac{v_0^2}{2a}$$

Sijoitetaan kiihtyvyyden lauseke yhtälöön

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2(-\mu_1 g)} = \frac{v_0^2}{2\mu_1 g}$$

Lasketaan jarrutusmatka

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_1 g} = \frac{\left(\frac{97{,}2}{3{,}6}\mathrm{m/s}\right)^2}{2\cdot 0{,}8\cdot 9{,}81\mathrm{m/s^2}} = 46{,}445\mathrm{m} \approx 46{,}4\mathrm{m}$$

Pysähtymismatka 27 m + 46,445 m = 73,4 m.

Koska auton pysähtymismatka on pienempi kuin auton ja hirven välinen etäisyys, niin auto pysähtyy ennen kohtaamista eikä törmäystä tapahdu.

c) Lasketaan jarrutusmatka märällä asfaltilla.

Lasketaan jarrutusmatka kuten b-kohdassa

$$x=\frac{v_0^2}{2\mu_2 g}=\frac{\left(\frac{97,2}{3,6}\text{m/s}\right)^2}{2\cdot 0,6\cdot 9,81\text{m/s}^2}=61,9266\text{m}\approx 61,9\text{m}$$

Pysähtymismatka x = 27 m + 61,9 m = 88,9 m. Auto törmää kohteeseen, koska pysähtymismatka on pidempi kuin auton etäisyys hirvestä havaintohetkellä. Lasketaan auton nopeus törmäämishetkellä.

Jarrutusmatka ennen kohdetta:

x_2 = 83 m – 27 m = 56 m.

Selvitetään missä ajassa auto etenee hidastuvassa liikkeessä 56 metriä.

$$x_2=\cancel{x_0}+v_0 t+\frac{1}{2}at^2$$

$$x_2=v_0 t+\frac{1}{2}at^2$$

$$\frac{1}{2}at^2+v_0 t-x_2=0$$

Saadaan toisen asteen yhtälö, joka voidaan ratkaista ratkaisukaavalla tai laskimella.

$$t=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^2-4\cdot\frac{1}{2}a\cdot(-x_2)}}{2\cdot\frac{1}{2}a}=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^2+2ax_2}}{a}$$

Sijoitetaan kiihtyvyyden arvo $a=-\mu_2 g$ yhtälöön.

$$t=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^2-2\mu_2 g x_2}}{-\mu_2 g}$$

$$=\frac{-\left(\frac{97{,}2}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{97{,}2}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2-2\cdot 0{,}6\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 56\text{m}}}{-0{,}6\cdot 9{,}81\text{m/s}^2}$$

$t_1=3{,}1681\text{s}$, $t_2=6{,}0062\text{s}$,

Toisen asteen yhtälöstä saadaan kaksi ratkaisua. Ajoista pienempi kuvaa hetkeä, jolloin auto törmää hirveen. (Ajoista suurempi kuvaa tilannetta, jossa auto ajaisi hirven ohi, pysähtyisi ja palaisi takaisin hirven luo yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella nopeudella.)

Lasketaan loppunopeus:

$$v=v_0+at_1=v_0-\mu_2 g t_1$$

$$=27\frac{\text{m}}{\text{s}}-0{,}6\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 3{,}1681\,\text{s}$$

$$=8{,}3527\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 8{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nopeus 8,4 m/s on noin 30 km/h.

Tehtävä 12.23.

a) Energian säilymislain mukaan energia voi muuntua muodosta toiseen, mutta sitä ei koskaan synny tyhjästä tai häviä. Eristetyn systeemin kokonaisenergia säilyy.

b) 1) Tapahtuma on mahdollinen. Tapahtumassa auton liike-energia muuntuu auton pellin ja lyhtypylvään sisäenergioiksi.

2) Tapahtuma ei ole mahdollinen. Biljardipöydällä pallon liike-energiaa ei juurikaan muunnu muiksi energialajeiksi, koska biljardipallot ovat kovia ja kimmoisia. Siksi törmäyksen jälkeen ainakin toisella pallolla on liike-energiaa.

3) Tapahtuma on energian säilymislain näkökulmasta mahdollinen. Johtumisessa energiaa siirtyy aina korkeammasta lämpötilasta matalampaan, joten lämpöopin näkökulmasta tapahtuma ei ole mahdollinen.

c) Massan muutos m = 1,00 g = 1,00 · 10^{-3} kg

Valonnopeus c = 299 792 458 m/s

Energian ja massan yhteyttä kuvaavan yhtälön mukaan

$$E = mc^2 = 1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \left(299792458\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$

$$= 8{,}9875510 \cdot 10^{13}\ \text{J} \approx 8{,}99 \cdot 10^{13}\ \text{J}.$$

d) Kopterin massa m = 249 g = 0,249 kg

Nousukorkeus h = 25 m

Nopeus v = 8,0 m/s

Energian säilymislain mukaan $\Delta E_p + \Delta E_k + \Delta U = 0$. Kuvauskopterin akun sisäenergia U pienenee yhtä paljon, kuin mitä kopterin potentiaali- ja liike-energia kasvavat.

$$\Delta U = \Delta E_p + \Delta E_k = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

Kopterin liike on tasaisesti kiihtyvää, joten liikettä voidaan mallintaa tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhtälöillä, $v = at$ ja $h = \frac{1}{2}at^2$.

Ratkaistaan nousuaika.

$$h = \frac{1}{2}at^2 \quad ||\text{sij. } a = \frac{v}{t}$$

$$h = \frac{1}{2}\frac{v}{t}t^2$$

$$h = \frac{1}{2}vt$$

$$t = \frac{2h}{v}$$

Kopterin nousuteho

$$P = \frac{\Delta U}{t} = \frac{mgh + \frac{1}{2}mv^2}{\frac{2h}{v}}$$

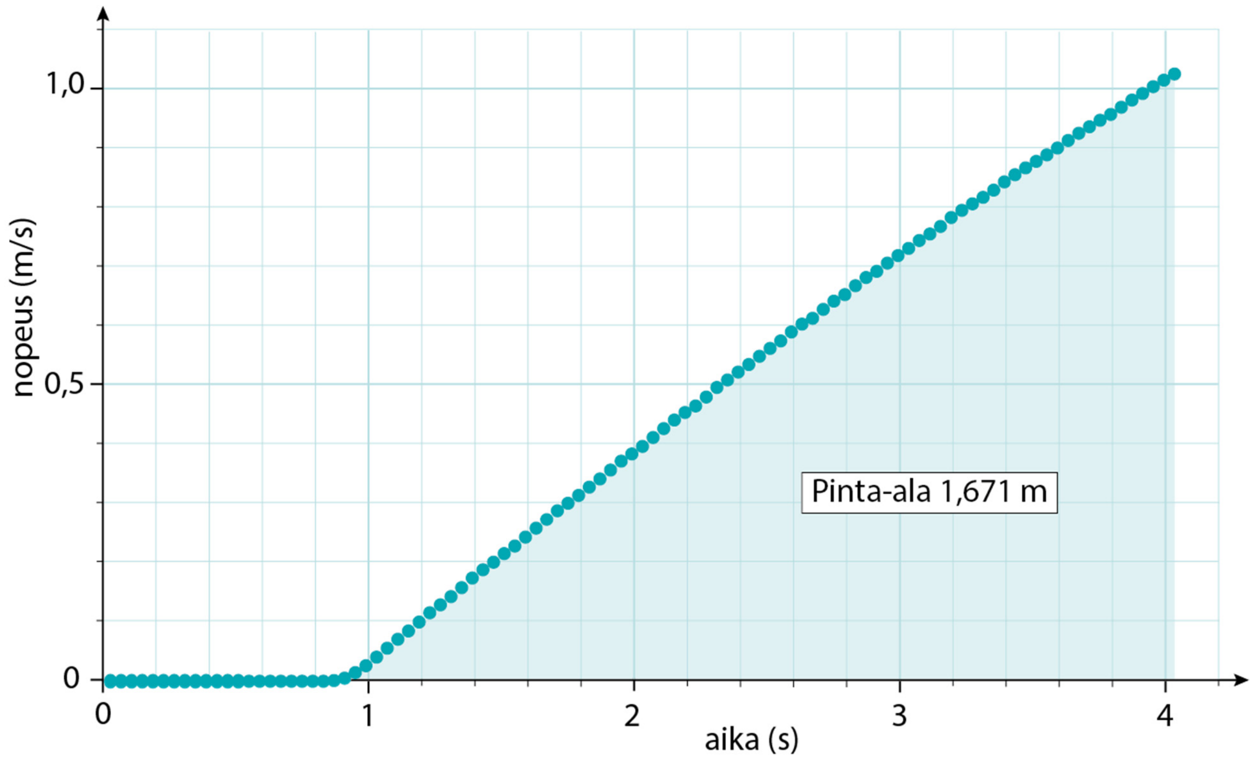
$$= \frac{0{,}249\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 25\,\text{m} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}249\,\text{kg} \cdot \left(8{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\frac{2 \cdot 25\,\text{m}}{8{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

$$= 11{,}04564\,\text{W} \approx 11\,\text{W}$$

Kopterin nousuteho on 11 W. Akun sisäenergia pienenee vähintään samalla teholla.

Tehtävä 12.24.

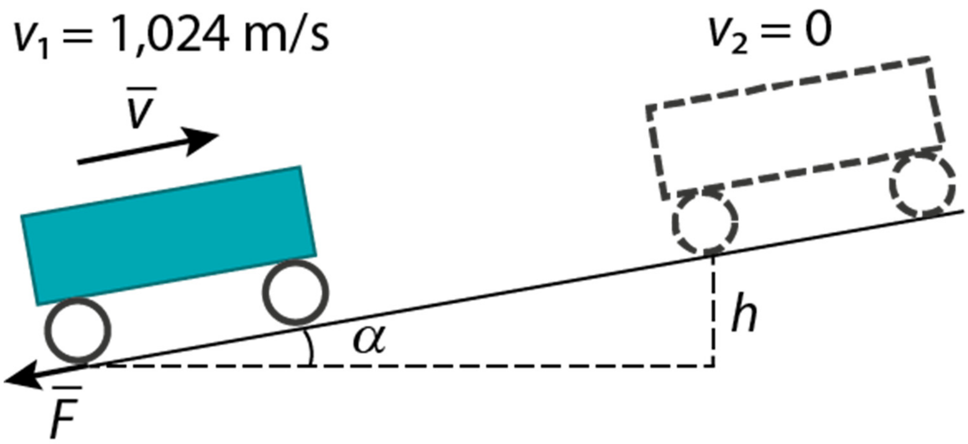
a)



(akselit oikein päin 1 p, mittauspisteet näkyvät kuvaajassa 1 p)

Vaunun kulkema matka saadaan (t, v)-koordinaatiston ja aika-akselinrajoittaman alueen fysikaalisena pinta-alana. (1 p)

Määritetään pinta-ala s = 1,671 m ≈ 1,67 m. (1 p) b)



Vaunun massa m = 1,315 kg

Vaunun lähtökorkeus h = 8,4 cm

Tarkastellaan vaunua mekaniikan energiaperiaatteella. Sovitaan vaunun potentiaalienergian nollatasoksi kaltevan tason alapää. Paikaltaan lähtevän vaunun potentiaalienergia muuntuu vastusvoimien tekemäksi työksi ja vaunun liike-energiaksi

$$\cancel{E_{ka}} + E_{pa} + W = E_{kl} + \cancel{E_{pl}}$$

$$E_{pa} + W = E_{kl} \qquad \text{(2 p)}$$

$$mgh + (-Fs) = \frac{1}{2}mv^2.$$

Vaunun kulkema matka on a-kohdan mukaan s = 1,671 m ja vaunun nopeus tason alaosassa saadaan kuvaajasta, v = 1,024 m/s. (1 p)

Vaunun liikettä vastustavan keskimääräisen voiman suuruus on

$$Fs = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

$$F = \frac{mgh - \frac{1}{2}mv^2}{s}$$

$$= \frac{1{,}315\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}084\,\text{m} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}315\,\text{kg} \cdot \left(1{,}024\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1{,}671\,\text{m}}$$

$$= 0{,}23589\,\text{N} \approx 0{,}24\,\text{N}.$$

(kaava ratkaistussa muodossa 1 p, oikea vastaus oikealla tarkkuudella 1 p)

c) Tason kaltevuuskulma α = 4,5 °

Tarkastellaan vaunua mekaniikan energiaperiaatteella. Vaunun liikettä vastustavan voimien tekemä työ muuttaa vaunun liike-energiaa. Osa liike-energiasta muuntuu myös vaunun potentiaalienergiaksi,

$$E_{ka} + W = E_{\mathrm{pl}}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-Fs) = mgh \qquad (2\ \mathrm{p})$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - Fs = mgh.$$

Vaunun korkeus voidaan esittää vaunun kulkeman matkan avulla $h = s \cdot \sin\alpha$.

Mekaniikan energiaperiaate saadaan nyt muotoon

$$\frac{1}{2}mv^2 - Fs = mgs\sin\alpha. \quad (1\ \mathrm{p})$$

Vaunun liikettä vastustava voima ja nopeus saadaan tehtävien aiemmista kohdista. Vaunun ylämäkeen kulkema matka on

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs\sin\alpha + Fs$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = s(mg\sin\alpha + F)$$

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg\sin\alpha + F} = \frac{mv^2}{2(mg\sin\alpha + F)}$$

$$= \frac{1{,}315\,\mathrm{kg}\cdot(1{,}024\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2(1{,}315\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 4{,}5^\circ + 0{,}23589\,\mathrm{N})}$$

$$= 0{,}552\,\mathrm{m} \approx 55\ \mathrm{cm}.$$

(matkan kaava 2 p, tulos 1 p)