11. Mekaaninen energia

Tehtävät

Harjoittele

Tehtävä 11.1.

Väittämät a), c), d) ja f) ovat oikein.

Korjaukset väittämiin:

b) Kappaleen liike-energia on verrannollinen kappaleen nopeuden neliöön.

e) Kappaleen liike-energia ei voi olla negatiivinen, koska nopeuden neliö ja kappaleen massa eivät voi olla negatiivisia.

g) Tuulivoimalassa liikkuvan ilman liike-energiaa muuntuu turbiinin lapojen pyörimisen liike-energiaksi.

Tehtävä 11.2.

Muuttohaukan massa m = 980 g = 0,980 kg

Muuttohaukan nopeus v = 30 m/s

Lentokorkeus h = 1 500 m

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Muuttohaukan liike-energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}980\,\mathrm{kg}\cdot(30\,\mathrm{m/s})^2 = 441\,\mathrm{J} \approx 440\,\mathrm{J}.$$

b) Muuttohaukan potentiaalienergia on

$$\begin{aligned} E_\mathrm{p} &= mgh = 0{,}980\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 1500\,\mathrm{m} \\ &= 14\,420{,}7\,\mathrm{J} \approx 14\,400\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Tehtävä 11.3

Lapsen massa $m_1 = 25$ kg

Aikuisen massa $m_2 = 75$ kg

Tornin korkeus h = 72 m

Putouskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

a) Potentiaalienergiat ovat

$$E_{\mathrm{p1}} = m_1 gh = 25\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 72\,\mathrm{m} = 17658\ \mathrm{J} \approx 18\,\mathrm{kJ}$$

$$E_{\mathrm{p2}} = m_2 gh = 75\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 72\,\mathrm{m} = 52974\ \mathrm{J} \approx 53\,\mathrm{kJ}.$$

Lapsen potentiaalienergia on kasvanut 18 kJ ja aikuisen 53 kJ.

b) Koska potentiaalienergia E_p riippuu suoraan verrannollisesti kappaleen massasta, kappaleiden potentiaalienergioiden suhde on sama kuin kappaleiden massojen suhde

$$\frac{E_\mathrm{p2}}{E_\mathrm{p1}} = \frac{m_2 gh}{m_1 gh} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{75\,\mathrm{kg}}{25\,\mathrm{kg}} = 3.$$

Aikuisen potentiaalienergia on kolme kertaa suurempi kuin lapsen potentiaalienergia, kun he saapuvat tornin huipulle.

Tehtävä 11.4

Hyppääjän massa m = 70 kg

Hyppytornin korkeus h = 10 m

Putoamiskiihtyvyys maanpinnan läheisyydessä
g = 9,81 m/s^2

a) Hyppääjän potentiaalienergia E_p riippuu putoamiskiihtyvyydestä ja hyppääjän massasta sekä korkeudesta

$$\begin{aligned} E_\mathrm{p} &= mgh = 70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\,\mathrm{m} \\ &= 6867\,\mathrm{J} \approx 6900\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Hyppääjän potentiaalienergia on 6 900 J.

b) Hyppääjän alkunopeus v_a = 0 m/s

Hyppääjän potentiaalienergia muuntuu liike-energiaksi, jolloin

$$E_\mathrm{p} = \Delta E_\mathrm{k} = E_\mathrm{kl} - E_\mathrm{ka}.$$

Koska hyppääjän nopeus alussa oli nolla, myös liike-energia oli nolla, joten

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{kl}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2$$

$$v_\mathrm{l} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\,\mathrm{m}} = 14{,}00714\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Hyppääjä osuu veteen nopeudella 14 m/s.

Tehtävä 11.5

Merkitään voimistelijan alkunopeutta v_a = 5,0 m/s.

Työperiaatteen mukaan voimistelijaan vaikuttavien voimien tekemä työ W on yhtä suuri kuin voimistelijan liike-energian muutos: $W = \Delta E_\mathrm{k}$. Koska voimistelijan nopeus on hypyn korkeimmassa kohdassa nolla, myös liike-energia E_kl on nolla.

Toisin sanoen $W = -E_\mathrm{ka}$. Painovoiman tekemä työ on negatiivinen, koska painovoiman suunta on alaspäin ja hypyn suunta on ylöspäin. Kun ilmanvastus oletetaan nollaksi, painovoima on ainoa vastusvoima. Tällöin $W = Gs = mgh$. Niinpä

$$mgh = \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2$$

$$h = \frac{v_\mathrm{a}^2}{2g} = \frac{\left(5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}274\,\mathrm{m} \approx 1{,}3\,\mathrm{m}.$$

Hypyn korkeus on 1,3 m.

Tehtävä 11.6

Pudotuskorkeus h = 180 m

Vettä virtaa sekunnissa $m = 116 \cdot 10^6$ kg

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2

Veden potentiaalienergian muutos sekunnissa on

$$\begin{aligned}\Delta E_\mathrm{p} &= \Delta mgh \\ &= 116 \cdot 10^6\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 180\ \mathrm{m} \\ &= 204{,}8328 \cdot 10^9\ \mathrm{J} \approx 205\ \mathrm{GJ}.\end{aligned}$$

Veden potentiaalienergian muutos on 205 GJ sekunnissa. Potentiaalienergia pienenee veden pudotessa voimalaitoksen läpi.

Tehtävä 11.7.

Kelkkailijan massa m_1 = 65 kg

Potkukelkan massa m_2 = 10 kg

Potkukelkan nopeus alussa v_1 = 22 km/h

Potkukelkan nopeus lopussa v_2 = 0 km/h

a) Liikettä vastustavat voimat, esimerkiksi kitka ja ilmanvastus, pysäyttävät potkukelkan liikkeen.

b) Työperiaatteen mukaisesti vastusvoimien tekemä työ muuttaa kelkan liike-energiaa. Kelkka on lopussa paikallaan, joten liike-energia lopussa on nolla.

$$
\begin{aligned}
W &= \Delta E_\mathrm{k} = \cancel{E_\mathrm{kl}} - E_\mathrm{ka} = -E_\mathrm{ka} \\
&= -\frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 = -\frac{1}{2}(65\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{kg})\left(\frac{22}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \\
&= -1400{,}4629\,\mathrm{J} \approx -1{,}4\,\mathrm{kJ}.
\end{aligned}
$$

c) Kokonaisvoima on kitkan ja ilmanvastuksen summa, koska tilanteessa ei vaikuta muita voimia. Kitka ja ilmanvastus pysäyttävät kelkan liikkeen. Samalla liike-energia muuntuu alustan, potkukelkan jalasten ja ilman sisäenergiaksi. Tästä saadaan ratkaistua kokonaisvoiman suuruus.

$$W = \Delta E_k$$

$$W = \cancel{E}_{kl} - E_{ka}$$

$$-Fs = -E_{ka}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}mv_a^2}{s} = \frac{\frac{1}{2}(65\,\text{kg} + 10\,\text{kg})\left(\frac{22}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{27\,\text{m}} = 51{,}869\,\text{N} \approx 52\,\text{N}.$$

Liu'un aikana kelkkaan vaikuttaa keskimäärin 53 N:n suuruinen voima liikkeelle vastakkaiseen suuntaan.

Tehtävä 11.8.

a) Tuulivoimalan tehoa mallinnetaan yhtälöllä

$P = \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3$, jossa

η on voimalan hyötysuhde,

ρ on ilman tiheys,

r on tuuliturbiinin lavan pituus ja

v on tuulen nopeus.

Teho siis riippuu tuulen nopeuden kolmannesta potenssista, $P \sim v^3$.

b) Tuulivoimalan hyötysuhde η = 0,50

Ilman tiheys ρ = 1,225 kg/m^3

Lavan pituus r = 60 m

Tuulen nopeus v = 15 m/s

Lasketaan tuulivoimalan teho

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3 \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0{,}50\cdot 1{,}225\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot \pi \cdot (60\,\text{m})^2 \cdot \left(15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3 \\
&= 11689669{,}914\,\text{W} \approx 12\,\text{MW}.
\end{aligned}
$$

Tuulivoimalan teho on 12 megawattia.

Sovella

Tehtävä 11.9.

Rullalaudan ja lehtipuhaltimen massa m = 7,2 kg

Rullalaudan nopeus alussa v_1 = 0,65 m/s

Rullalaudan nopeus kiihdytyksen jälkeen v_2 = 1,8 m/s

a) Lehtipuhaltimen tekemä työ muuttaa rullalaudan liike-energiaa. Lehtipuhaltimen tekemä työ on

$$\begin{aligned}W &= \Delta E_k = E_{kl} - E_{ka} \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 7{,}2\,\text{kg}\cdot((1{,}8\,\text{m/s})^2 - (0{,}65\,\text{m/s})^2) \\ &= 10{,}143\,\text{J} \approx 10\,\text{J}.\end{aligned}$$

b) Lehtipuhaltimen keskimääräinen voima saadaan lehtipuhaltimen tekemän työn avulla. Voiman tekemä työ muuttaa rullalaudan liike-energiaa

$$W = \Delta E_k$$

$$Fs = E_{kl} - E_{ka}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}{s} = \frac{\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)}{s}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 7{,}2\,\text{kg} \cdot ((1{,}8\,\text{m/s})^2 - (0{,}65\,\text{m/s})^2)}{5{,}4\,\text{m}}$$

$$= 1{,}878\,\text{N} \approx 1{,}9\,\text{N}.$$

Voima on liikkeen suuntaan.

Tehtävä 11.10.

Moottoripyörän ja -pyöräilijän massa m = 550 kg

Moottoripyörän nopeus alussa v_1 = 60 km/h

Moottoripyörän nopeus lopussa v_2 = 80 km/h

a) Verrataan lopputilanteen liike-energiaa alkutilanteeseen.

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}}=\frac{\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2}{\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2}=\frac{v_2^2}{v_1^2}=\frac{\left(\frac{80}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\left(\frac{60}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}=1,778.$$

Liike-energia kasvaa 78 %.

b) Merkitään, että lopputilanteen liike-energia on yhtä suuri kuin alkutilanteen liike-energia kolminkertaisena ja ratkaistaan yhtälöstä loppunopeus v_2.

$$\begin{aligned}
E_{kl} &= 3E_{ka} \\
\frac{1}{2}mv_2^2 &= 3\cdot\frac{1}{2}mv_1^2 \\
v_2^2 &= 3\cdot v_1^2 \\
v_2 &= \sqrt{3}\cdot v_1 \\
&= \sqrt{3}\cdot 60\,\text{km/h} \\
&= 103{,}92\,\text{km/h} \approx 104\,\text{km/h}.
\end{aligned}$$

Liike-energia on alkutilanteeseen verrattuna kolminkertainen, kun nopeus on 104 km/h.

Tehtävä 11.11.

a) Kuulan potentiaalienergian muutos nostossa on

$\Delta E_\mathrm{p} = mg\Delta h$.

Kuulat nostetaan yhtä korkealle, joten Δh on molemmilla sama. Myös putoamiskiihtyvyys g on sama kuulille.

Kuulan potentiaalienergian muutos on suoraan verrannollinen kappaleen massaan. Koska kuulan 1 massa on puolet kuulan 2 massasta, myös kuulan 1 potentiaalienergia on puolet kuulan 2 potentiaalienergiasta.

b) Oletetaan, että ilmanvastuksen vaikutus on merkityksetön. Tällöin kuulan potentiaalienergia muuntuu kokonaan kuulan liike-energiaksi.

$$E_\mathrm{p} = E_k$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Koska massat supistuvat yhtälöistä pois, voidaan päätellä, että kuulan massa ei vaikuta nopeuteen, jolla kuula osuu lattiaan. Vain pudotuskorkeus vaikuttaa.

Tehtävä 11.12.

Pudotuskorkeus h = 30 m

Virtausnopeus kuutiometreinä $\frac{\Delta V}{\Delta t} = 750\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$

Veden tiheys ρ = 1 000 kg/m^3,

a) Kun vesi putoaa voimalaitoksen kohdalla, painovoima tekee putoamisessa työtä. Työ kasvattaa veden liike-energiaa, eli veden nopeus kasvaa samalla kun vesi virtaa kohti alhaalla sijaitsevaa voimalan turbiinia. Toisin sanoen veden potentiaalienergiaa muuntuu veden liike-energiaksi. Kun vesi kulkee edelleen turbiinin läpi, veden liike-energiaa muuntuu turbiinin liike-energiaksi.

b) Veden virtausnopeus kilogrammoina saadaan ratkaistua, kun veden tiheys tunnetaan

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = 750\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 750\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}.$$

Vuorokaudessa vettä kulkee voimalaitoksessa

$$\Delta m = 750\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot 3600\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}} \cdot 24\ \mathrm{h} = 6{,}48 \cdot 10^{10}\ \mathrm{kg}.$$

c) Veden potentiaalienergian muutos vuorokaudessa on

$$E_\mathrm{p} = mgh = 6{,}48 \cdot 10^{10}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 30\ \mathrm{m}$$
$$= 1{,}907064 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J} \approx 19\ \mathrm{TJ}.$$

Yhden vuorokauden aikana koskessa virtaavalla vedellä voisi tuottaa energiaa 19 TJ, jos vesivoimalan hyötysuhde olisi 100 %.

Tehtävä 11.13.

Pudotuskorkeus h = 6,1 m

Virtausaika t = 7,5 h

Virranneen veden tilavuus $V = 9{,}7 \cdot 10^6\ \text{m}^3$

Veden tiheys $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$

a) Veden potentiaalienergian muutos 7,5 tunnin aikana on

$$
\begin{aligned}
E_\text{p} &= mgh = \rho V g h \\
&= 1{,}0 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}7 \cdot 10^6\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6{,}1\ \text{m} \\
&= 580{,}4577 \cdot 10^9\ \text{J} \approx 580\ \text{GJ}.
\end{aligned}
$$

b) Voimalaitoksen hyötysuhde $\eta = 0{,}42$

Voimalaitos ottaa energiaa veden potentiaalienergiasta ja siirtää energiaa sähköverkkoon. Hyötysuhteen avulla.

$$\eta = \frac{E_{\text{anto}}}{E_{\text{otto}}} = \frac{E_{\text{a}}}{E_{\text{o}}} = \frac{P_{\text{a}}}{P_{\text{o}}}.$$

Antotehoksi saadaan

$$P_{\text{a}} = \eta P_{\text{o}}.$$

Tehon ja energian välillä on yhtälö $E = Pt$. Vesivoimalaitoksen antoteho on

$$\begin{aligned} P_{\text{a}} &= \eta \frac{E_{\text{o}}}{t} = \eta \frac{\rho V g h}{t} \\ &= 0{,}42 \cdot \frac{1{,}0 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}7 \cdot 10^6\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 6{,}1\,\text{m}}{7{,}5 \cdot 3600\,\text{s}} \\ &= 9{,}029 \cdot 10^6\ \text{W} \approx 9{,}0\,\text{MW}. \end{aligned}$$

c) Omakotitalon energian tarve E_t = 18 000 kWh

Voimalaitoksen tuottama energia on yhtä suuri kuin omakotitalon vastaanottama energia

$$E_\mathrm{a} = E_\mathrm{t}$$
$$P_\mathrm{a} t = E_\mathrm{t}.$$

Aika, joka tarvitaan omakotitalon energian tuottoon b-kohdan tehon tuloksen mukaan

$$t = \frac{E_\mathrm{t}}{P_\mathrm{a}} = \frac{18\,000\,000\,\mathrm{Wh}}{9{,}029 \cdot 10^6\ \mathrm{W}} = 1{,}9935\,\mathrm{h} \approx 2{,}0\ \mathrm{h}.$$

Tehtävä 11.14.

Liukumismatkan pitäisi kasvaa lähtökorkeuden kasvaessa. Jos vastusvoimat ovat liukumisen aikana merkityksettömät, on liukumismatka suoraan verrannollinen kirjan lähtökorkeuteen, $s \sim h$.

Perustelu:

Kaltevalla tasolla liukuessa kirjan potentiaalienergian muutos on $\Delta E_p = mgh$.

Potentiaalienergia muuntuu liu'un aikana liike-energiaksi, mutta samalla vastusvoimien tekemä työ pienentää liike-energiaa niin, että liu'un lopuksi kirja pysähtyy ja sen liike-energia on nolla.

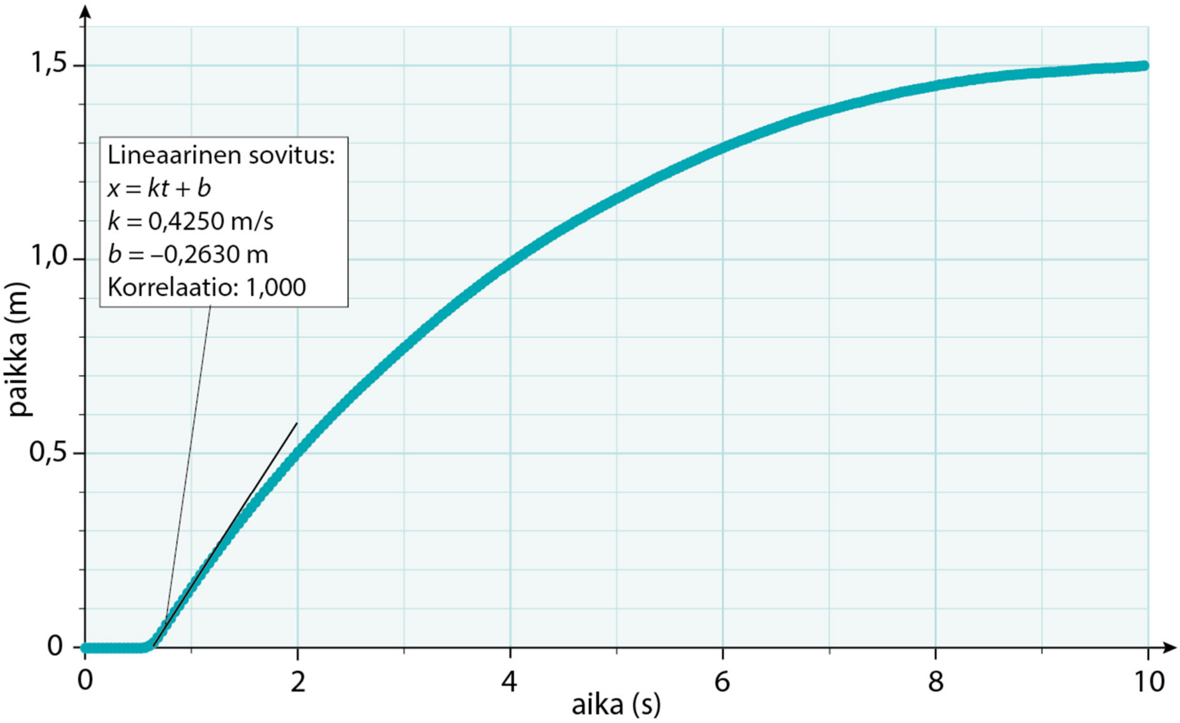
Työperiaatteen mukaan $W = \Delta E_k$ eli $-Fs = \Delta E_k$. Nyt kaikki liike-energia oli peräisin potentiaalienergiasta, joten

$$-Fs = -mgh$$

$$s = \frac{mg}{F}h$$ eli $s \sim h$.

Tehtävä 11.15.

a)



Vaunun nopeus saadaan (t, x)-koordinaatistoon piirretyn tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta. Nopeus alussa oli v_1 = 0,4250 m/s ≈ 0,43 m/s.

Mittauksen lopussa paikan kuvaaja on vaakasuora, joten vaunun nopeus on nolla, v_2 = 0 m/s.

b) Vaunun liike-energian muutos on

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{kl}} - E_{\mathrm{ka}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{l}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^2 = \frac{1}{2}m(v_{\mathrm{l}}^2 - v_{\mathrm{a}}^2).$$

Sijoitetaan a-kohdassa saadut tulokset nopeuksille. Saadaan liike-energian muutokseksi

$$\begin{aligned}\Delta E_{\mathrm{k}} &= \frac{1}{2}m(v_{\mathrm{l}}^2 - v_{\mathrm{a}}^2)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1{,}29\,\mathrm{kg}\cdot((0\,\mathrm{m/s})^2 - (0{,}4250\,\mathrm{m/s})^2)\\ &= -0{,}1165\,\mathrm{J} \approx -0{,}12\,\mathrm{J}.\end{aligned}$$

c) Vastusvoimien tekemä työ muuttaa vaunun liike-energiaa. Työperiaatteen mukaan $W = \Delta E_k$.

Vastusvoimien keskimääräinen suuruus on

$$Fs = \Delta E_k$$
$$F = \frac{\Delta E_k}{s}.$$

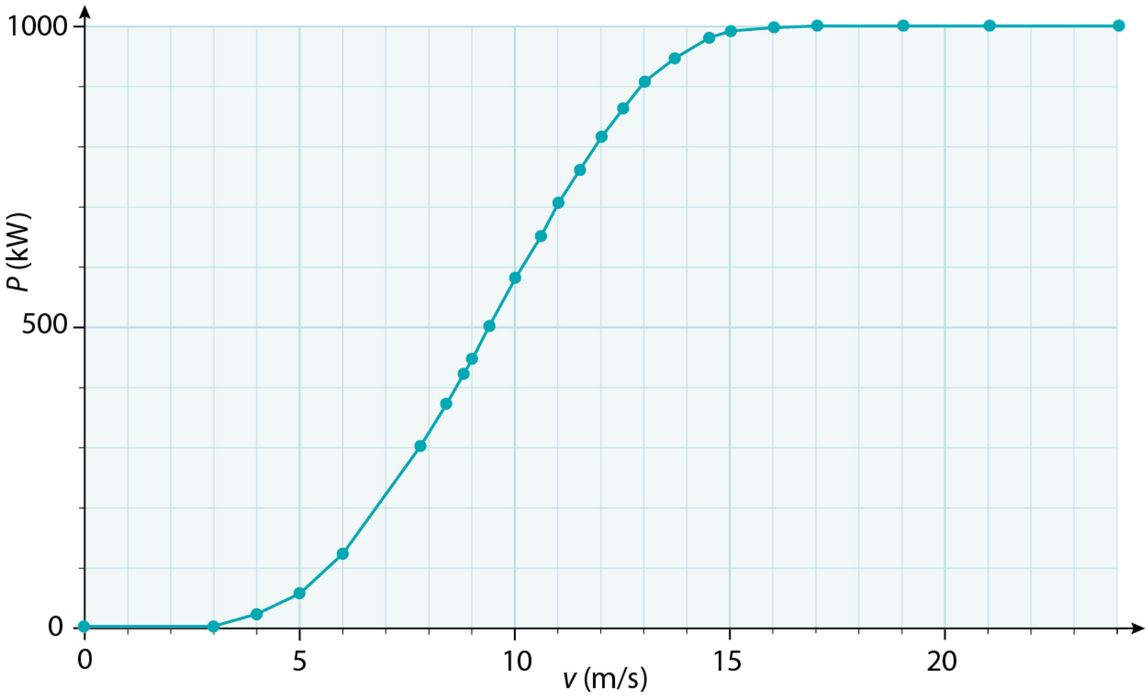
Kuvaajan perusteella vaunu liikkui työnnön jälkeen matka s = (1,50 − 0,03) m. b-kohdan mukaan liike-energian muutos on –0,1165 J. Vastusvoimien keskimääräinen suuruus on

$$F = \frac{\Delta E_k}{s} = \frac{-0{,}1165\,\mathrm{J}}{1{,}47\,\mathrm{m}} = -0{,}07925\,\mathrm{N} \approx -79\,\mathrm{mN}.$$

Miinusmerkki tuloksessa tarkoittaa, että vastusvoimien suunta on vaunun alkuperäistä liikkeen suuntaa vastaan.

Tehtävä 11.16.

a)



b) Ilman tiheys ρ = 1,23 kg/m^3

Tuulivoimalan lapojen pituus on r = 54,2 m

Kuvaajasta interpoloituna tuulivoimalan sähköteho tuulen nopeudella 7,0 m/s on P_1 = 221 kW.

Tuulivoimalan teho

$$P = \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3.$$

Ratkaistaan tuulivoimalan hyötysuhde

$$\eta = \frac{2P}{\rho\pi r^2 v^3}.$$

Hyötysuhde tuulen nopeudella 7,0 m/s on

$$\eta = \frac{2P}{\rho\pi r^2 v^3} = \frac{2\cdot 221000\ \mathrm{W}}{1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\pi\cdot(54{,}2\ \mathrm{m})^2(7{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^3} = 0{,}1135 \approx 11\,\%.$$

c) Tuulipuiston teho P = 14,7 MW

Tuotantoaika t = 13 h.

Tuulipuiston tuottama energia 13 h:n aikana

$E = Pt$

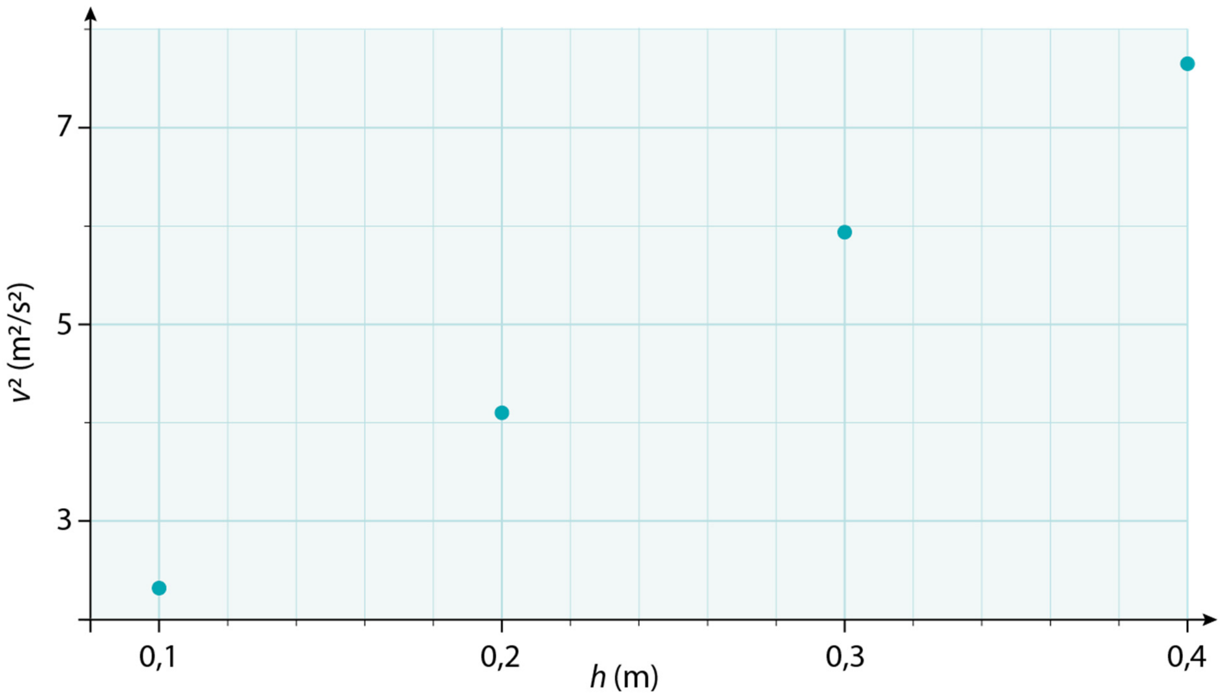
$= 14{,}7 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot 13 \cdot 3\,600 \text{ s}$

$= 6{,}8796 \cdot 10^{11} \text{ J} = 690 \text{ GJ}.$

Tehtävä 11.17.

a) ja b)

h (m)	v (m/s)	v^2(m^2/s^2)
0,10	1,522	2,316
0,20	2,030	4,121
0,30	2,446	5,978
0,40	2,777	7,712



c) Mekaanisen energian säilymisperiaatteella, kun palikka lähtee paikoiltaan ja potentiaalienergian nollataso valoportin kohdalla on nolla

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Loppunopeuden neliö on suoraan verrannollinen lähtökorkeuteen, v^2 = vakio · h.

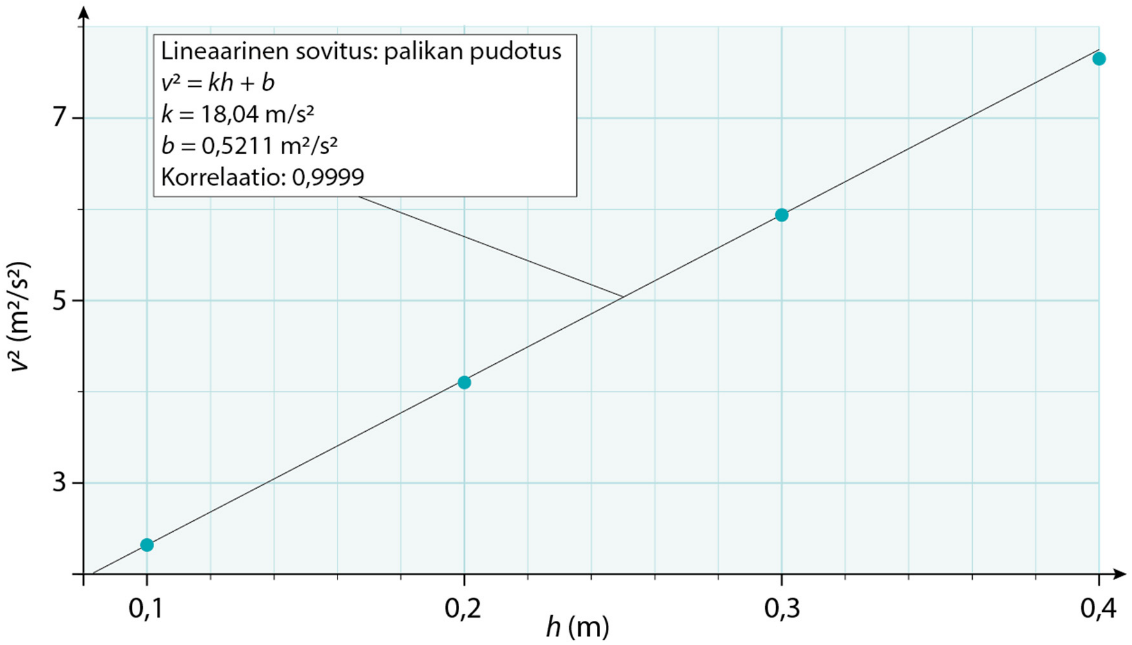
d) c-kohdan mekaanisen energian säilymisperiaatteella

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Saadaan

$$v^2 = 2gh.$$

(h, v^2)-koordinaatiston kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta saadaan 2g. Määritetään fysikaalinen kulmakerroin.



Kulmakertoimen avulla saadaan putoamiskiihtyvyys,

$$2g = 18{,}04\ \mathrm{m/s^2}$$

$$g = \frac{18{,}04\ \mathrm{m/s^2}}{2} = 9{,}02\ \mathrm{m/s^2}.$$

Tehtävä 11.18.

a) Vesivoimala tuottaa energiaa tuulivoimalaa tasaisemmin ja vesivoimalan energiantuotantoa voidaan säädellä patoluukkujen avulla. Tuulivoimala tuottaa sähköä vain, kun tuulee sopivasti. Molempien näiden sähköntuotantotapojen etu on se, että ne eivät aiheuta hiilidioksidipäästöjä käytön aikana.

   Tuulivoimala voidaan rakentaa paikkaan, jossa sähköä ei ole, esimerkiksi saaristoon. Vesivoimala tarvitsee aina virtaavan veden ja veden potentiaalienergian muutoksen. Siksi vesivoimala vaatii patoaltaita, jotka aiheuttavat ympäristöhaittaa yläjuoksulle. Vastaavasti alajuoksulla virtaava vesi aiheuttaa joen varsien maa-alueiden vajoamista jokiuomiin. Tuulivoimaloiden käytössä ei ole tätä ongelmaa.

b) Kun vesi putoaa, painovoima tekee työtä. Veden liike-energia ja nopeus kasvavat, kun vesi putoaa kohti alhaalla sijaitsevaa voimalan turbiinia.

c) Veden kaikkea mekaanista energiaa ei pystytä ottamaan talteen vedestä, sillä veden liike-energia ei täysin muunnu voimalaitoksen turbiinin liike-energiaksi, vaan turbiinista ulos tulevalla vesimassalla on vielä liike-energiaa. Turbiiniin ja generaattoriin vaikuttaa myös ulkoisia voimia (esim. kitka), joiden tekemä työ kasvattaa laitteiden rakenteiden ja ympäristön sisäenergiaa. Osa energiasta siirtyy siis ympäristöön, joka lämpenee.

Syvennä

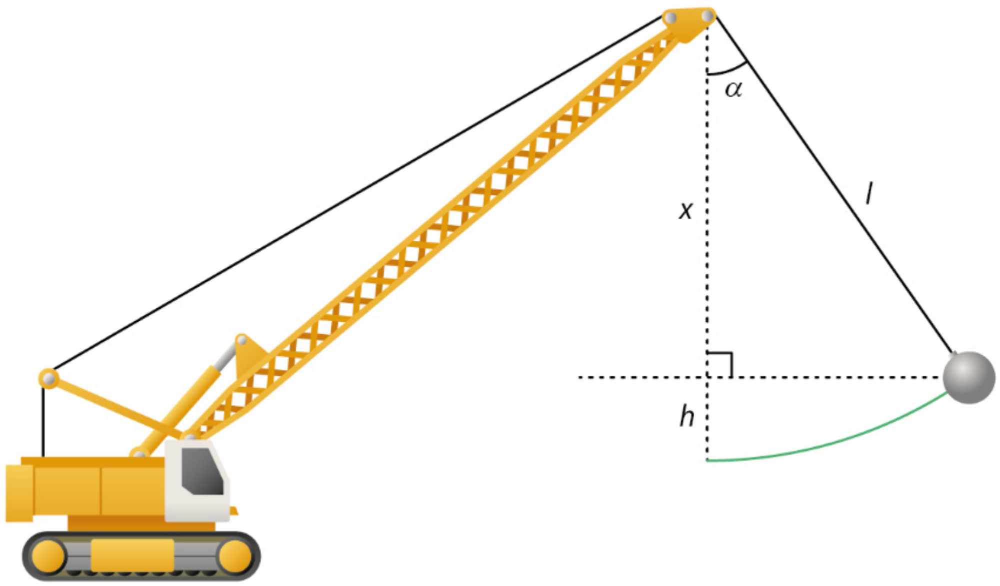
Tehtävä 11.19.

Purkupallon massa m = 450 kg

Heilahduskulma α = 35°

Vaijerin pituus l = 12 m

Putoamiskiihtyvyys g = 9,81 m/s^2



a) Kuvan avulla saadaan $\cos\alpha = \frac{x}{l}$, josta $x = \cos\alpha$.

Purkupallon korkeus muuttuu

$$h = l - x$$
$$h = l(1 - \cos\alpha)$$
$$h = 12\,\text{m} \cdot (1 - \cos 35°)$$
$$= 2{,}170\,\text{m} \approx 2{,}2\,\text{m}.$$

b) Purkupallon potentiaalienergia on suurimmillaan heilahduksen yläasemassa.

$$E_\text{p} = mgh = mg(l - x)$$
$$= mgl(1 - \cos\alpha)$$
$$= 450\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\,\text{m} \cdot (1 - \cos 35°)$$
$$= 9580{,}24\,\text{J} \approx 9600\,\text{J}$$

c) Jos potentiaalienergia muuntuisi kokonaisuudessaan liike-energiaksi,

$$E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{k}}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

Silloin kuulan nopeus on suurimmillaan alimmassa asemassa

$$\cancel{m}gl(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$\begin{aligned}
v^2 &= 2gl(1-\cos\alpha) \\
v &= \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} \\
&= \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 12\,\mathrm{m}(1-\cos 35^\circ)} \\
&= 6{,}525\,\mathrm{m/s} \approx 6{,}5\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}$$

Tehtävä 11.20.

a) Tuulienergian käyttö ei aiheuta käytön aikana hiilidioksidipäästöjä. Tuulivoimalan huonona puolena on, että tuulisähköntuotanto vaihtelee ajallisesti. Siksi tuulivoiman yhteyteen tarvitaan sähkönvarastointitekniikkaa tai täydentäviä sähköntuotantotapoja.

b) Tuulivoimalan teho on suoraan verrannollinen tuulen nopeuden kolmanteen potenssiin, eli $P \sim v^3$.

Kun tuulen nopeus kaksinkertaistuu, tuulivoimalan teho $2^3 = 8$- kertaistuu.

c) Tuulivoimalan tehoa voidaan mallintaa kaavalla $P = \eta \frac{E_\mathrm{k}}{\Delta t} = \eta \frac{\frac{1}{2}\rho \pi r^2 v^3 \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3$, jossa η on voimalan hyötysuhde, ρ on ilman tiheys, r on tuuliturbiinin lavan pituus ja v on tuulen nopeus. Teho on suoraan verrannollinen ilman tiheyteen. Ilmaa voidaan mallintaa ideaalikaasuna, jonka tiheys on kääntäen verrannollinen kaasun lämpötilaan $\rho \sim \frac{1}{T}$. Jos ilmanpaine ei muutu, niin tuulivoimalan teho pienenee, kun ilman lämpötila kasvaa.

Tehtävä 11.21.

a) Ruokasuolakiteen muodostuessa Na-atomi luovuttaa elektronipilvensä uloimman elektronin Cl-atomin elektronipilven uloimpaan osaan, jolloin muodostuu Na^{+}- ja Cl^{-}-ionit, joiden välillä on sähköinen vetovoima.

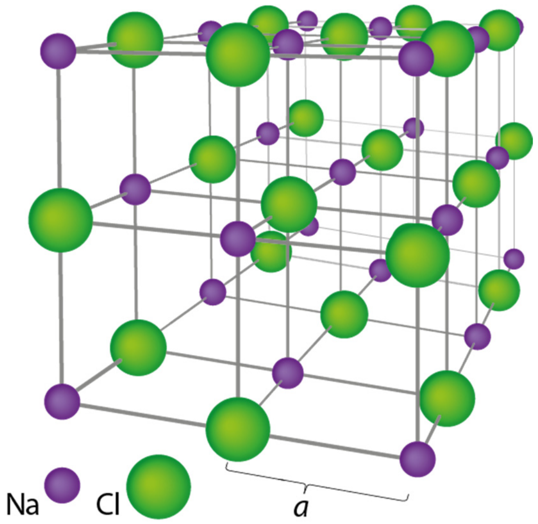
b) Ioniparin sähkömagneettinen potentiaalienergia voidaan ratkaista kaavan

$E_{p12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ avulla.

Kaavassa k on Coulombin vakio k = 8,98755·109 Nm²/C². Oletetaan että ionien etäisyys r_{12} on sama. Kun ionien varaukset q_1 ja q_2 ovat samanmerkkiset, varausten tulo on positiivinen. Jos ionien varaukset ovat erimerkkiset, potentiaalienergiasta tulee negatiivinen, eli pienempi kuin ensimmäisessä tapauksessa.

c) Natriumkloridikiteen rakenneosien eli Na^+- ja Cl^--ionien joukon sähkömagneettinen potentiaalienergia on tärkeä osa kiteen sisäenergiaa rakenneosien liike-energian (lämpöliikkeen) lisäksi. Koska natrium- ja kloridi-ionit ovat erimerkkiset, niiden muodostaman ioniparin potentiaalienergia on negatiivinen. Natriumkloridikiteen sähkömagneettinen potentiaalienergia on näin ollen pienempi kuin vastaavien erillisten ionien potentiaalienergiat yhteensä. Siksi NaCl-kiteitä esiintyy luonnossa.

Atomimallista nähdään, että kiteen keskellä olevalla Na^+-ionilla on sidos kuuteen viereiseen Cl^--ioniin. Seuraavaksi lähimmät ionit ovat Na^+-ioneja, joita on 12 kappaletta. Tämän takia ensimmäisten termien kertoimet ovat −6 ja +12. Termien nimittäjät kuvaavat naapuri-ionien etäisyyttä Na^+-ionista. Lähimmät Cl^--sidosionit sijaitsevat etäisyydellä a, ja seuraavat Na^+-ionit sijaitsevat etäisyydellä $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$



Tehtävä 11.22.

Vesivoimalan veden pudotuskorkeus h = 8,2 m

Veden virtaama $\dfrac{\Delta V}{\Delta t} = 460\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}$

Tuulivoimalan teho P_t = 5,6 MW

Tuulivoimalan lavan pituus r = 89 m

a) Veden tiheys ρ_v = 1 000 kg/m^3

Vettä virtaa sekunnissa

$m = \rho_\text{v} V = 1000\,\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 460\,\text{m}^3 = 460000\,\text{kg}.$ (1 p)

Veden potentiaalienergian muutos padossa

$E_\text{p} = mgh$ = 460 000 kg · 9,81 m/s^2 · 8,2 m

= 37 003 320 J = 37 MJ. (2 p)

b) Jos kaikki veden potentiaalienergia muuntuu veden liike-energiaksi, on

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k}$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \quad \text{(1 p)}$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2.$$

Veden nopeus putoamisen jälkeen

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8{,}2\,\mathrm{m}} = 12{,}68\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(kaava ratkaistu oikein 1 p, nopeuden vastaus oikein 1 p)

c) Tuulivoimalan hyötysuhde $\eta = 0{,}41$

Ilman tiheys $\rho_\mathrm{i} = 1{,}23\ \mathrm{kg/m^3}$

Tuulivoimalan teho on $P = \frac{1}{2}\eta\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3$.

Tällöin 5,6 MW tuottoteholla pitää tuulen nopeuden olla

$$v^3 = \frac{2P}{\eta\rho_\mathrm{i}\pi r^2}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{2P}{\eta\rho_\mathrm{i}\pi r^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2\cdot 5{,}6\cdot 10^6\ \mathrm{W}}{0{,}41\cdot 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot \pi\cdot (89\,\mathrm{m})^2}}$$

$$= 9{,}6279\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 9{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(kaavan ratkaisu oikein 1 p, nopeuden vastaus oikein 1 p)

d) Tarkastellaan vesivoimalan tehoa tuulivoimalan tehoon nähden, jolloin saadaan tarvittavien tuulivoimaloiden lukumäärä *n*.

Oletetaan, että voimaloiden hyötysuhteet *η* ovat yhtä suuret, jolloin *n* kappaletta tuulivoimalan tehoa on yhtä suuri kuin vesivoimalan teho.

$nP_{\mathrm{t}} = P_{\mathrm{v}}$. (1 p)

Vesivoimalan teho

$$P_{\mathrm{v}} = \frac{\Delta E_{\mathrm{v,anto}}}{\Delta t} = \frac{\eta \Delta E_{\mathrm{v,otto}}}{\Delta t} = \frac{\eta \Delta m g h}{\Delta t} = \frac{\Delta V \eta \rho_{\mathrm{v}} g h}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \eta \rho_{\mathrm{v}} g h. \quad \text{(2 p)}$$

Tuulivoimalan teho on

$$P_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\eta\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3.$$

Tarvittavien tuulivoimaloiden määrä

$$n = \frac{P_\mathrm{v}}{P_\mathrm{t}} = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta t}\cancel{\eta}\rho_\mathrm{v} gh}{\frac{1}{2}\cancel{\eta}\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3} = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta t}\rho_\mathrm{v} gh}{\frac{1}{2}\rho_\mathrm{i}\pi r^2 v^3}$$

$$= \frac{460\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8{,}2\,\mathrm{m}}{\frac{1}{2} \cdot 1{,}23\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \pi \cdot (89\,\mathrm{m})^2 \left(8{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^3}$$

$$= 3{,}67179 \approx 3{,}7.$$

Tuulivoimaloita tarvitaan 4 kappaletta tuottamaan yhtä suuri teho.

(lauseke supistetussa muodossa 2 p, vastaus 1 p)